La teoría de la utilidad y las magnitudes financieras

Por

ANDRES DE PABLO LOPEZ

I. INTRODUCCION

En el terreno económico, se ha manejado el concepto de utilidad con diversos significados y así Majudar (1) distingue en esta teoría cinco etapas que se corresponden con otras tantas formas de entenderla; así la primera es de cardinalismo introspectista de Hicks; la tercera, de ordinalismo con ductista con la teoría de la preferencia revelada por Samuelson; la cuarta, del cardinalismo conductista de Neumann y Morgenstern con la utilidad ante la incertidumbre o el riesgo; y la quinta de revisión del cardinalismo conductista. Ahora bien estos significados podemos agruparlos en dos grandes grupos:

Por una parte se encuentra la utilidad desde el punto de vista del consumidor, que busca la mayor satisfacción de las necesidades de tipo económico teniendo en cuenta sus preferencias. Dentro de este grupo caben destacar dos tendencias: la primera que considera a la utilidad medible y cuantificable utilidad ordinal) y la segunda que considera que sólo puede establecerse un orden de preferencias (utilidad ordinal).

Por otra parte se encuentra la utilidad desde el punto de vista de la toma de decisiones en presencia de riesgo, que busca analizar el comportamiento racional de la persona que ha de decidir en situaciones que presentan consecuencias aleatorias.

Esta teoría, sobre la que puede darse abundante bibliografía en lengua inglesa, especialmente por parte norteamericana, ha tenido a nuestro juicio, escaso eco y difusión en nuestro idioma (2). Esta circunstancia nos anima

(1) The Measurement of Utility, Londres, 1958 y recogido por J. Castañeda en su libro Teoría Económica. Ed. Aguilar, pág. 115.

(2) Cabe citar, en cuanto al segundo grupo antes citado, a Prieto (Teoría de la Inversión, 1973), Nieto de Alba (Introducción a la Estadística, 1974) y Ríos (Análisis de Decisiones, 1976), así como a Castañeda en cuanto al primer grupo.

a, siquiera brevemente, presentar ambos planteamientos buscando sus concordancias, así como exponer una idea que, desde hace ya algún tiempo, al tomar contacto con esta teoría, hemos tenido en forma latente y que es la posibilidad de que algunas magnitudes y expresiones de la Matemática Financiera pudieran ser usadas como funciones de utilidad.

II. LA TEORIA DE LA UTILIDAD DEL CONSUMIDOR

De todos es conocido que el ser humano siente la necesidad de satisfacer sus necesidades tanto vitales como culturales o de cualquier otro tipo. Estas necesidades son elevadas en número y aumentan a medida que el desarrollo económico y los avances técnicos permiten una elevación en el nivel de la vida de los consumidores, si bien son limitadas en su intensidad, la cual va disminuyendo más que proporcionalmente a medida que se van satisfaciendo.

Como es bien sabido, la escasez de los recursos económicos y la posibilidad de usos alternativos, unido a lo manisfestado en el párrafo anterior, hacen que cada consumidor, al comportarse recionalmente distribuya sus recursos tratando de obtener la máxima satisfacción de esas necesidades.

Tal como señala el profesor Castañeda, la utilidad de un bien es su capacidad para satisfacer una necesidad humana, entendida ésta en el sentido de su deseabilidad por lo que posee un carácter objetivo y subjetivo a la vez; objetivo en cuanto que es una propiedad de los bienes económicos, y subjetivo, en cuanto que expresa la capacidad de satisfacer apetitos humanos.

Utilidad Cardinal.

Se ha discutido ampliamente respecto a si la utilidad es o no medible. En un primer planteamiento de tipo cardinalista que tiene como principales mentores a Jevons, Walras, y Marshall, se considera que es medible como puedan serlo el peso o la altura de una persona, de manera que cada individuo es capaz de indicar cuantas unidades de satisfacción o utilidad le produce un determinado bien. *La utilidad tiene un carácter creciente pero* menos que proporcionalmente, hasta alcanzar el punto de saturación a partir del cual ese bien no proporciona ningún incremento de utilidad adicional. Es la utilidad marginal la encargada de medir la utilidad que proporciona la última unidad poseída (caso discreto), o la que proporciona la última cantidad infinitesimal que se posea (caso continuo).

La utilidad que proporciona la cantidad que de un bien determinado se posea viene medida por $U=U(q)$, y la utilidad marginal por la derivada $U'(q)$, en el supuesto de que la función U sea continua y derivable.

Las propiedades o axiomas que han de cumplir estas funciones de utilidad, son las siguientes:

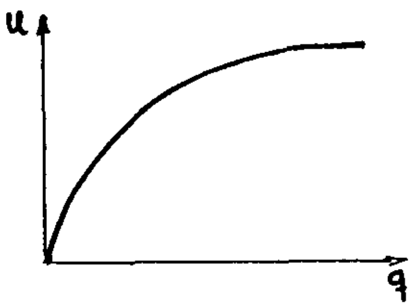
1.ª $U(q)>0$ (la f. de utilidad ha de ser positiva).

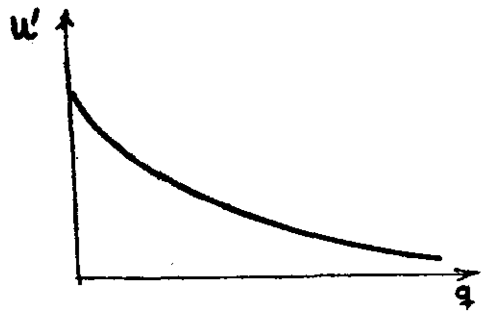
2.ª $U'(q)>0$ (la f. de utilidad ha de ser creciente).

3.ª $U''(q)<0$ (la utilidad marginal es decreciente).

Verificándose también que $U(0)=0$, es decir la utilidad es nula cuando no se posee ninguna cantidad del bien. Y que $U'(S)=0$, es decir, que para una cantidad $q=s$ (saciedad) la utilidad presenta un máximo.

Ambas funciones quedan representadas gráficamente de la siguiente forma:





Cuando se considera que cada consumidor puede elegir, entre un cierto número de bienes (o servicios), distintas posibles combinaciones de cantidades, cada combinación $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ viene representada por una n-tupla que indica las cantidades, no negativas, que pueden consumirse de cada bien teniendo en cuenta el presupuesto disponible. Así que para un conjunto de precios $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ de cada uno de los citados bienes se ha de cumplir:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot q_i = C$$

La función de utilidad es de la forma:

$$U = U(q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

hipersuperficie de $n+1$ dimensiones.

La utilidad marginal de cada uno de los bienes componentes es:

$$u'_1 = \frac{\partial u}{\partial q_1}; \qquad u'_2 = \frac{\partial u}{\partial q_2}; \qquad \ldots; \qquad \frac{\partial u}{\partial q_n}$$

Utilidad Ordinal.

El carácter medible y cuantificable de la utilidad ha sido discutido y criticado por diversos autores como Hicks y Allen, quienes elaboraron esta teoría sin considerar que la utilidad era medible, basándose en que el consumidor únicamente es capaz de establecer una escala de preferencias, dando lugar así a un planteamiento llamado ordinalista.

Los axiomas en base a los cuales se construye esta teoría son los siguientes:

1. De Comparabilidad: Cada individuo posee un sistema de preferencias, de manera que ante las combinaciones C_1 y C_2 *es capaz de indicar* cual de las dos prefiere o si son equivalentes, así pues:

$$C_1 \succcurlyeq C_2 \qquad \text{(es preferido o indiferente a)}$$

o bien

$$C_2 \succcurlyeq C_1$$

2. De Transitividad: Ante las combinaciones de consumo C_1, C_2, C_3, si prefiere C_1 a C_2 ($C_1 \preccurlyeq C_2$) y C_2 a C_3 ($C_2 \preccurlyeq C_3$) entonces preferirá C_1 a C_3 ($C_1 \succcurlyeq C_3$.

Como consecuencia de estos dos primeros axiomas se sigue que cada consumidor puede establecer una relación de orden total en el conjunto de las combinaciones de consumo posibles.

3. De Dominancia. Si una combinación C_1 tiene todas su componentes mayores o iguales a las de otra combinación C_2, entonces la primera, C_1, es preferida a la segunda, C_2.

Sean

$$C_1 = (q^{(1}{}_1, \ldots, q^{(1}{}_n) \quad \text{y} \quad C_2 = (q^{(2}{}_1, \ldots, q^{(2}{}_n)$$

si

$$q^{(1}{}_i \succcurlyeq q^{(2}{}_i \; \forall i \Rightarrow C_1 \preccurlyeq C_2$$

4. De Continuidad. Si la combinación C_1 es preferida a C y ésta a su vez lo es a la otra C_2, existe al menos una combinación lineal de C_1 y C_2 que es indiferente a C, es decir:

$$\exists \alpha \in [0,1] \, / \, [\alpha \cdot C_1 + (1-\alpha) C_2] \sim C \; .$$

Esta función U no mide cuantitativamente la utilidad de cada combinación de consumo sino que solamente sirve para establecer comparaciones entre estas, de manera que cualquier función $F(u)$, con la condición de ser monotona creciente, puede también ser utilizada.

Algunos autores manifiestan que es suficiente la utilización de los dos primeros axiomas para la construcción de esta teoría, ya que permiten establecer una ordenación completa de las preferencias compatible con una relación de equivalencia (relación de indiferencia) que permite agrupar en clases a aquellas combinaciones que son indiferentes para el consumidor, de manera que aquellas combinaciones que están en una clase de indiferencia de índice superior a otra serán preferidas a las que se encuentren en esta última. Así pues, si designamos por I_1, I_2, ..., las distintas clases de menor a mayor preferencia, se cumple que si

$$C_1 \in I_1 \quad \text{y} \quad C_2 \in I_2 \Rightarrow C_2 \succ_r C_1$$

La teoría microeconómica, en este punto, trata de analizar el comportamiento recional del consumidor en orden a obtener un óptimo en la satisfacción de sus necesidades partiendo de unos recursos limitados. En consecuencia se busca hacer:

$$\text{máx } U(q_1 q_2, \ldots, q_n)$$

cumpliéndose las condiciones

$$\Sigma q_i \cdot q_i = C \quad \text{y} \quad q_i \geqslant 0 \; \forall_i$$

III. LA TEORIA DE LA UTILIDAD EN PRESENCIA DE RIESGO

Esta teoría pretende resolver el problema de cada persona pueda tomar la mejor decisión de acuerdo con sus preferencias cuando se encuentren ante situaciones de decisión que tengan consecuencias aleatorias.

Resumen Histórico.

El criterio de decisión basado en la esperanza matemática del beneficio ha sido criticado desde diversos ángulos, siendo uno de ellos el que en muchas ocasiones no refleja el comportamiento real del decisor. Esta circunstancias ya fue observada y discutida hace más de dos siglos al tratar de dar solución al problema conocido como paradoja de Petersburgo que parece ¡ser preocupaba bastante a la Europa pensante de aquella época Este consistía en determinar el valor de un juego en el que se lanza una moneda el número de veces que sea preciso hasta que salga cara, en cuyo momento se interrumpe el juego y se cobrán 2^{n-1} ducados si la cara sale en la enésima tirada.

El valor esperado del juego, que se corresponde con lo que debería pagar por jugar en condiciones de equidad es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \infty$$

Sin embargo, en la práctica nadie estaría dispuesto a pagar una cuantía importante por participar en este juego; de aquí la paradoja debida a que el criterio del beneficio esperado no recoge el comportamiento de los individuos en casos como el descrito. Una solución fue dada por Bernoulli (3), señalando que hay que distinguir entre el valor monetario (pretium) y su utilidad (emolumentum), de manera que las personas se comportan de forma que no tratan de maximizar la esperanza del beneficio, sino la esperanza de una función de su riqueza, que denominamos de utilidad, y que él denominó "esperanza moral".

En la aportación de Bernoulli hay que destacar la idea de que la simetría entre ganancias y pérdidas monetarias, no se corresponde con la simetría entre la utilidad y desutilidad de las mismas (4), y que, además, estas últimas dependen de la riqueza inicial de cada individuo. También realiza una justificación de la existencia del seguro.

Esta teoría quedó olvidada durante dos siglos hasta que primero Ramsey en 1930 al discutir algunos puntos de vista de Keynes, y especialmente Von Neumann y Morgenstern (5) la resucitaron y desarrollaron a partir de unos axiomas que tratan de descubrir el comportamiento racional del decisor. Estos trabajos fueron completados por otros autores de la que viene denominándose, Escuela Americana.

Se parte de un conjunto χ de perspectivas aleatorias

$$\chi=\{\xi;\ \eta;\ \gamma;\ \ldots,\}$$

en el que a cada uno de los resultados $A_1, A_2, \ldots, A_n$, cada perspectiva asigna unas determinadas probabilidades $P_1, P_2, \ldots, P_n$ siendo

$$\Sigma P_i=1 \qquad \text{y} \qquad P_i \geqslant 0\ \forall i$$

En este conjunto se define la operación lineal o de mixtura, de forma que dadas dos perspectivas ξ y η, se obtiene otra perspectiva γ, tal que:

$$\gamma=p\cdot\xi+(1-p)\eta \qquad \text{con} \qquad 0\leqslant p\leqslant 1$$

de manera que siendo:

$$\xi=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_n \\ P_1 & P_2 & \ldots & P_n \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \eta=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_n \\ P'_1 & P'_2 & \ldots & P'_n \end{pmatrix}$$

entonces:

$$\gamma=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & & A_n \\ p\,p_1+(1\ \ p)\,p'_1 & p\,p_2+(1-p)\,p'_2 & \ldots & p\,p_n+(1-p)\,p'_n \end{pmatrix}$$

(3) D. Bernoulli: "Epecimen Theoriae Novae de Mensura Sortis", memoria presentada en la Academia de Ciencias de Petersbpurgo en 1738. Se encuentra traducida a varios idiomas entre ellos el inglés: Econométrica, vol. 22, núm. 1 págs. 23-36.

(4) Marschak resumió esta idea en una frase muy gráfica diciendo que "una bolsa llena, no es tan buena, como mala es un bolsa vacía".

(5) Von Neumann y Morgentern: "Theory of Games and Economic Behavior". Princeton U. P., 1944.

En la estructura formada por el conjunto χ y la operación de mixtura se definen los axiomas que intentan descubrir el comportamiento racional del decisor y que aparecen recogidos en las obras de los profesores Prieto, Nieto de Alba y Ríos. Siguiendo al primero son:

1.ª De Comparabilidad. Cada persona posee un sistema coherente de preferencias, de forma que ante dos perspectivas ξ y η sabe cuál es preferible (o si son indiferentes), cumpliéndose además la propiedad transitiva.

$$\xi \succcurlyeq \eta \quad \text{o bien} \quad \eta \succcurlyeq \xi$$

y si

$$[\xi \succcurlyeq \eta \quad \text{y} \quad \eta \succcurlyeq \gamma] \quad \Rightarrow \quad \xi \succcurlyeq \gamma$$

2.ª De Preferencia Absoluta. Dadas las perspectivas ξ y η con funciones de distribución.

$$F_1(x) = P_r(\xi < x) \qquad \text{y} \qquad F_2(x) = P_r(\eta \leqslant x)$$

tales que si

$$F_2(x) < F_1(x), \forall x \quad \Rightarrow \quad \eta \succcurlyeq \xi$$

3.ª De Continuidad. Si se verifica que $\xi \succcurlyeq \lambda \succcurlyeq \eta$ existe una mixtura γ tal que

$$\gamma = [p \cdot \xi;\ (1-p)\,\eta] \sim \lambda$$

4.ª De Sustitución. Dadas ξ y η tales que $\xi \sim \eta$ y otra perspectiva λ se verifica que las mixturas α y β tales que

$$\alpha = [p \cdot \xi;\ (1-p)\,\lambda] \qquad \text{y} \qquad \beta = [p \cdot \eta;\ (1-p)\,\lambda]$$

son equivalentes para todo P.

Cumplidos estos axiomas, se demuestra que es posible definir una función de utilidad u que asocia a cada perspectiva ξ un número real $u(\xi)$ que cumple las propiedades siguientes:

1.ª Si

$$\xi \succ \eta \quad \Rightarrow \quad u(\xi) \succ u(\eta)$$

2.ª

$$u\,[p \cdot \xi;\ (1-p)\,\eta] = p \cdot u(\xi) + (1-p)\,u(\eta)$$

y además toda función

$$V(\xi) = a \cdot u(\xi) + b \qquad \text{con} \qquad a > 0$$

es también función de utilidad

Estos axiomas pronto fueron sometidos a observación experimental para ver si las personas con posibilidades de tomar decisiones (empresarios, ejecutivos, etc.), se comportan siguiéndolos. Así Mosteller y Nogee tomaron como sujetos del experimento a alumnos de la Universidad de Harward. Mac Crimonn *tomó a hombres de empresa con práctica en la toma de decisiones.* En general, los resultados fueron bastante concordantes, aunque no en todos los casos. El axioma de sustitución ha sido bastante criticado, entre otros por Allais y Massé. La transitividad puede no verificarse en algunas ocasiones, tal como pone de manifiesto con algún ejemplo May (6).

— Construcción de curvas de Utilidad.

Para obtener la curva de utilidad de una persona, se toman dos cuantías que indiquen situaciones extremas para esa persona, una de ellas positiva y muy elevada y la otra nula o negativa, tal que signifique una situación opuesta a la anterior. A cada una de ellas se le asigna la utilidad que considere adecuada el decisor (en una concepción ordinalista pueden asignarse dos números cualesquiera, así por ejemplo a la primera situación puede asignársele una utilidad de 1 y a la segunda, una utilidad de 0).

Para ir cubriendo los restantes puntos de la curva se irá enfrentando al decisir con perspectivas aleatorias, cuyas consecuencias se encuentren entre esos dos valores extremos y los nuevos que se vayan obteniendo, a los cuales les asigna un equivalente de certidumbre y siendo su utilidad la esperanza de las utilidades de cada perspectiva (7).

Una vez trazada la curva de utilidad, el decisor puede delegar la adopción de decisiones en otras personas, las cuales en base a la citada curva procederán de la misma forma en que lo haría el primero, ya que con la citala curva se puede conocer:

a) La utilidad que proporciona una cuantía determinada.

b) La cuantía cierta que corresponde a una determinada utilidad.

c) Comparar distintas mixturas.

Es usual en las aplicaciones de tipo económico, expresar la utilidad como función de la riqueza (cuantía del capital) del decisor: $U=U(C)$, siendo C ahora, una perspectiva expresada en términos monetarios. Como ya se ha mencionado anteriormente, el criterio de elección, sustituye la maximización de beneficio esperado por la maximización de la utilidad esperada. Dado que los inversores, usualmente, buscan obtener el mayor beneficio con el menor riesgo y que, también usualmente, se mide ese beneficio por su esperanza matemática $E(C)$ y el riesgo por su varianza $V_{ar}(C)$, se ha buscado por

(6) Puede encontrarse un interesante resumen de algunos de los experimentos en las obras de K. Borch: "Economía de la Incertidumbre" y de S Ríos: "Análisis de Decisiones".

(7) En nuestra tesis doctoral sobre Criterios de Decisión Financiera en la Empresa, realizamos al aplicación a un caso concreto.

algunos autores, como Tobin y Markowitz, funciones de utilidad cuya esperanza quede medida por la utilidad del valor esperado y por su varianza, al menos con una aproximación suficiente.

$$U=U[E(C); \qquad V_{ar}(C)]$$

Si se considera una función de utilidad con carácter general y siguiendo a Farrar (8) se desarrolla por la fórmula de Taylor (admitiendo que reúne las condicones puestas para ello) par el valor (constante) $E(C)$ se tiene:

$$u(c) = u[E(c)] + u'[E(c)][c - E(c)] + \\ + \frac{u''[E(c)]}{2!}[c - E(c)]^2 + \frac{u'''[E(c)]}{3!}[c - E(c)]^3 + \ldots$$

Y el valor esperado de la utilidad será:

$$E[u(c)] = u[E(c)] + u'[E(c)] \cdot E[c - E(c)] + \\ + \frac{u''[E(c)]}{2} E[c - E(c)]^2 + \frac{u'''[E(c)]}{3!} E[c - E(c)]^3 + \ldots$$

En consecuencia, la utilidad esperada se puede expresar en función de la utilidad del beneficio esperado, de su varianza y de los sucesivos momentos respecto a la media.

Si como valor aproximado se toman los tres primeros sumandos (teniendo en cuenta que el segundo es nulo), la utilidad esperada queda descrita.

$$E[u(c)] \simeq u[E(c)] + \frac{u''[E(c)]}{2} \cdot V_{ar}(c) = u(\mu) + \frac{u''(\mu)}{2}\sigma^2$$

con

$$\mu = E(c) \qquad y \qquad \sigma^2 = V_{ar}(c)$$

En ocasiones esta aproximación no será suficiente por lo que habrá que proceder de forma cautelar. Una función bastante utilizada ha sido la cuadrática (Markowitz (9), por ejemplo), ya que el valor esperado de la utilidad es función exclusiva de esos dos parámetros.

Pues bien, teniendo en cuenta lo manifestado anteriormente, el lugar geométrico de los puntos (μ, σ) que proporcionan la misma utilidad esperada se denominan funciones de indiferencia de utilidad y se representan en un sistema cartesiano mediante *curvas de indiferencia de utilidad* que pueden presentar distinta concavidad según sea la actitud frente al riesgo que adopte el decisor.

---

(8) D. Farrar: "The Investment Decision under Uncertainty", 1967.

(9) H. Markowitz: "Portfolio Selection". Wiley, 1959.

Comportamientos frente al riesgo.

De los axiomas expuestos se deduce que la utilidad ha de ser creciente con la riqueza:

$$\frac{du}{dc} = u'(c) > 0$$

y en consecuencia la utilidad marginal será positiva. Pero nada se deduce respecto a la proporcionalidad de ese crecimiento.

Así cabe distinguir tres actitudes primarias frente al riesgo:

1.ª Aversión al riesgo.
2.ª Indiferencia por el riesgo.
3.ª Preferencia (o atracción) por el riesgo.

— Aversión al riesgo.

El comportamiento de las personas adversas al riesgo es tal que prefiere la cuantía cierta: $C_1 \cdot p + C_2(1-p)$, a la perspectiva aleatoria $[C_1 \cdot p; C_2(1-p)]$, porque le proporciona mayor utilidad.

$$u[p \cdot c_1 + (1-p)c_2] > p \cdot u(c_1) + (1-p)u(c_2)$$

Como señalan Borch y Prieto este comportamiento justifica la existencia del seguro. En efecto, si se dispone de un bien de valor C que puede perderse totalmente con probabilidad $1-p$, se está ante la perspectiva aleatoria $\xi = [p \cdot C; (1-p) \cdot 0]$. Como la prima de riesgo en este seguro es $(1-p) \cdot C$, el valor cierto del bien sería $C-(1-p)C = C \cdot p$, y los individuos con esta actitud frente al riesgo prefieren esta cuantía cierta, a la aleatoria:

$$u(p \cdot c) > p \cdot u(c) + (1-p)u(0)$$

En consecuencia estarán dispuestos a pagar una prima mayor que la de riesgo, a tener que afrontar la perspectiva aleatoria, hasta una diferencia D tal que se cumpla:

$$U(p \cdot C - D) = p \cdot U(C) + (1-p)U(0)$$

por lo tanto acometerá el seguro hasta una prima de tarifa que no supere la cuantía

$$(1-p) \cdot C + D$$

por lo que las curvas son cóncavas hacia abajo, figura 1.

Las curvas de indiferencia de utilidad represetnadas en un sistema de coordenadas (η, σ) siguen la forma de la figura 1, verificándose que:

$$\frac{d\sigma}{d\mu} > 0 \quad \text{y} \quad \frac{d^2\sigma}{d\mu^2} < 0$$

y también que

$$\frac{\partial E(u)}{\partial \mu} > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial E(\mu)0}{\partial \sigma} < 0$$

lo que significa que la utilidad esperada aumenta con la rentabilidad y disminuye con el riesgo.

— Indiferencia ante el riesgo.

El comportamiento de indiferencia al riesgo se presenta cuando al decisor le son indiferentes la cuantía cierta $C_1 \cdot p + C_2(1-p)$ y la perspectiva aleatoria descrita anteriormente:

$$U[C_1 \cdot p + C_2(1-p)] = p \cdot U(C_1) + (1-p)U(C_2)$$

Es fácil comprobar que las funciones lineales respecto a C: $U = a \cdot C + b$ corresponden a individuos que se comportan en este sentido.

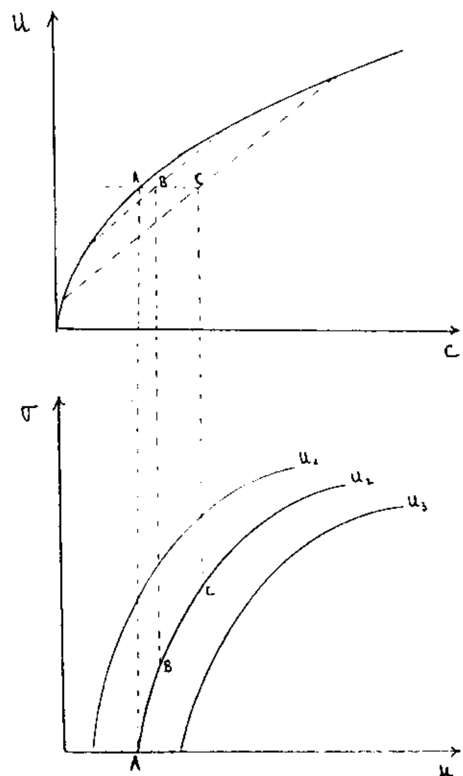


Figura 1

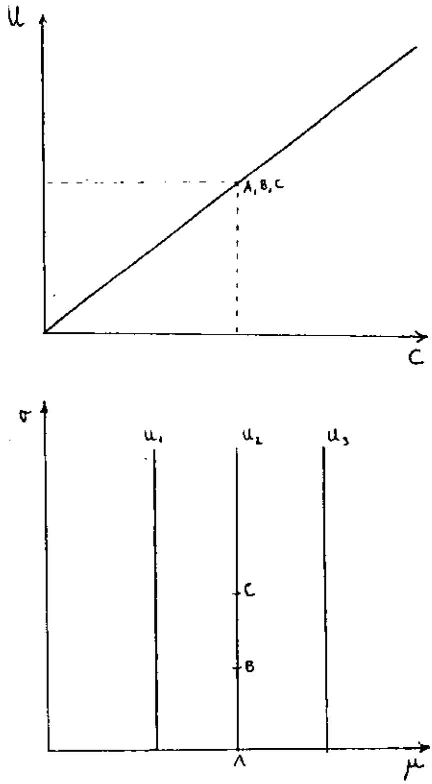


Figura 2

Se verifica ahora:

$$u'(c) > 0; \qquad u''(c) = 0; \qquad \frac{d\sigma}{d\mu} = \infty$$

En consecuencia la utilidad marginal del dinero es constante y las líneas de indiferencia de utilidad son verticales. En la figura 2 se representan ambas funciones.

— Preferencia por el riesgo.

Este comportamiento se presenta cuando.

$$U[p \cdot C_1 + (1-p)C_2] < p \cdot U(C_1) + (1-p)U(C_2)$$

Es la actitud característica de los especuladores, jugadores, etc. Y se verifica que

$$U''(C) > 0 \quad \text{y} \quad \frac{d\sigma}{d\mu} < 0$$

por lo que las curvas de utilidad son cóncavas hacia arriba.

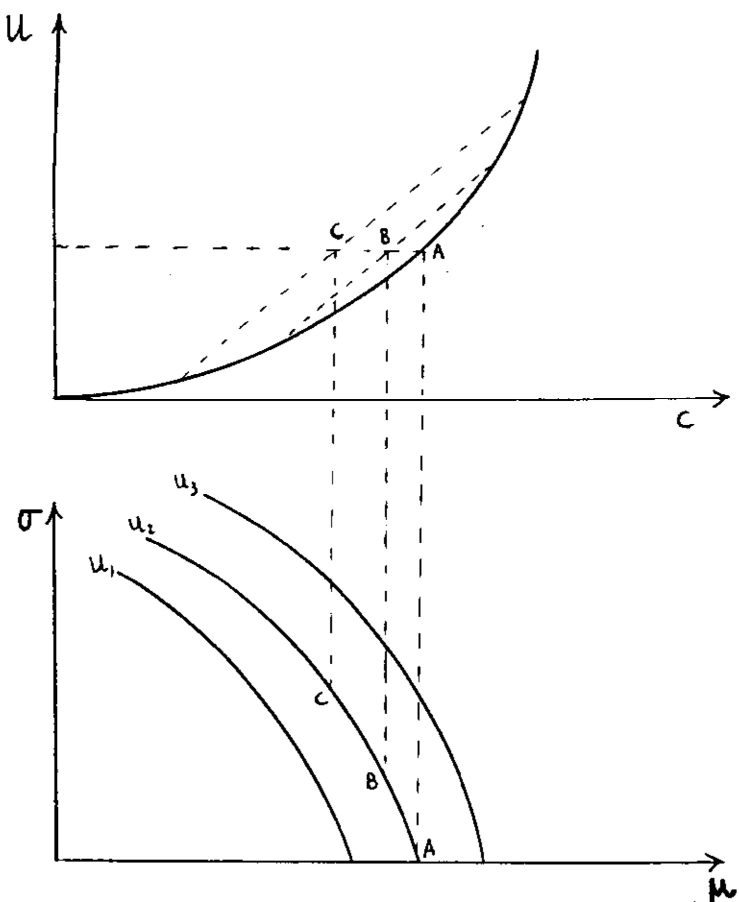
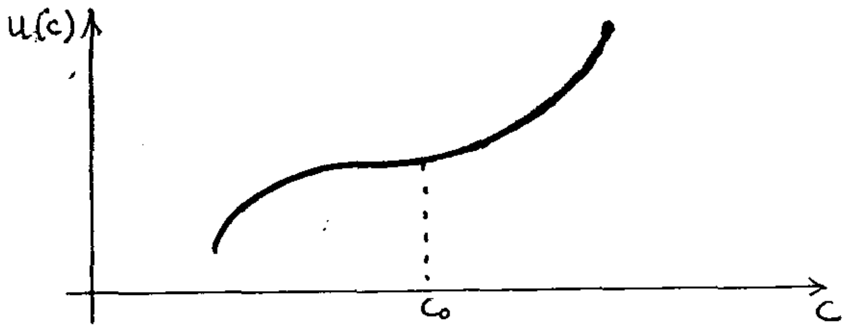


Figura 3

Sin embargo, en la práctica todas las personas no pueden ser clasificadas con uno de estos modelos simples de utilidad. Muchas personas se comportan de una forma mixta ya que por un lado se aseguran contra grandes pérdidas y por otro están dispuestas a jugar ciertas cantidades a la lotería. Friedman y Savage describieron una función de utilidad que presenta un punto de inflexión cerca de la cuantía de riqueza (C_0) normal del decisor, teniendo una representación gráfica:



También Markowitz (10 describe una curva de utilidad mixta con la particularidad de medir en abscisas, no cuantías absolutas de riqueza, sino incrementos (positivos o negativos) respecto a la riqueza normal que se sitúa en el origen de coordenadas.

IV. PUNTOS DE CONTACTO ENTRE AMBAS TEORIAS

Los dos grandes grupos en que inicialmente hemos compartimentado esta teoría son concordantes en muchos aspectos; no en vano aparecen comprendidas dentro del mismo rótulo de Teoría de la Utilidad. Y es que, en efecto, aunque analizan cuestiones perfectamente diferenciadas tienen un nexo común que es importante resaltar.

En primer lugar ambos estudian el comportamiento racional de las personas y aunque su aplicación concreta busca objetivos distintos, no hay duda de que ese comportamiento racional, en cada persona, se guía por unos principios o reglas que operan en el subconsciente de manera común.

En segundo lugar, la axiomática es en buena medida coincidente, buscando establecer un orden de preferencias que sólo se distingue en cuanto a los objetivos finales que son distintos.

---

(10) "The Utility of Wealth" Journal of Political Economy", 1952, págs. 141 a 158.

En tercer lugar, las funciones de utilidad pueden ser utilizadas indistintamente ya que la expresión matemática de dichas funciones surge al cumplir los axiomas y la diferenciación aparecerá en la forma de aplicarlas a los casos concretos.

V. LAS FUNCIONES DE UTILIDAD Y LAS MAGNITUDES FINANCIERAS

Como señalábamos al inicio, desde hace algunos años, en que por primera vez entramos en contacto con la teoría de la utilidad de Neumann y Mogernstern al necesitar en algunas ocasiones usar de estas funciones al trabajar en la preparación de nuestra tesis doctoral, tuvimos una impresión de carácter intuitivo de que algunas de las magnitudes y expresiones de la Matemática Financiera podrían ser usadas como funciones de utilidad o intervenir en alguna forma en las mismas.

Creemos conveniente recordar el concepto de capital financiero que, siguiendo al profesor Gil Peláez (11), es la medida de un bien económico referido a la época en que es disponible. Por lo tanto queda determinado por un par ordenador de número reales (c, t) de manera que el primero, indica la cuantía del capital, y el segundo, el momento de su disponibilidad. Estos componentes: cuantía y vencimiento, son las magnitudes financieras primarias y fundamentales.

Como ya se ha visto a lo largo de este trabajo, las funciones de utilidad usuales lo son de la cuantía del capital (o riqueza) del decisor.

Sin embargo, debe tenerse en cuenta que aparece una componente temporal, tanto en las elecciones del consumidor, en cuanto que puede diferir una parte de sus disponibilidades de consumo a través del tiempo en forma de ahorro para consumir en períodos posteriores, como en las elecciones en presencia del riesgo en las que frecuentemente los capitales tienen distintos vencimientos (como por ejemplo, los rendimientos aleatorios de una inversión) lo que hace que se pueda afirmar que las funciones de utilidad descubrirán mejor el comportamiento del decisor si además de la componente cuantía incluyen la componente tiempo.

Pues bien, designando por C a la cuantía y por t al tiempo (vencimiento de ese capital); por $U(c,t)$ la función de utilidad del capital financiero, y tomando como origen de tiempos el momento actual, las condiciones que

(11) L. Gil Peláez: "Matemática de las Operaciones Financieras", Madrid, 1967, pág. 1.

debe cumplir la función para que pueda ser utilizada como función de utilidad (en el supuesto de que sea continua y derivable) son:

1.ª $$\frac{\partial u}{\partial c} > 0$$

2.ª $$\frac{\partial^2 u}{\partial c^2} \leqslant 0$$

3.ª $$\frac{\partial u}{\partial t} < 0$$

que no transgreden los axiomas enunciados y cuyo significado es: de la primera, que la utilidad del dinero es creciente; de la segunda, que la utilidad marginal del dinero es decreciente o nula; de la tercera, que la utilidad decrece a medida que el vencimiento es más alejado en el tiempo (principio de subestimación de los capitales futuros respecto a los actuales de igual cuantía).

La segunda condición podría suprimirse en una consideración exclusiva de la utilidad con riesgo, pero hemos preferido incluirla por estar incursa dentro de la utilidad del consumidor y porque en aquellas recoge las actitudes de los decisores no especuladores (básicamente inversores). También pueden hacerse conjeturas sobre el signo de $\partial^2 u/\partial t^2$ pero no es necesario analizar aquí; baste decir que dependerá de la intensidad de subestimación.

En consecuencia, cualquier función de C y t que verifique esas tres condiciones podrá ser usada como función de utilidad recibiendo la denominación de función de utilidad del capital financiero.

La representación gráfica de esa función de utilidad será de la forma de la figura 4.

Los puntos del plano $C\,O\,T$ representan al conjunto de los capitales financieros. Para $t=0$, la utilidad para las distintas cuantías viene expresada por la curva OF; así, a la cuantía $C_1=OB$ le corresponde una utilidad de BF: $U(C_1; 0)=BF$. Si esa misma cuantía es disponible cuando ha transcurrido el tiempo $t_1=OA$, la utilidad viene representada por DE: $U(C_1; t_1)=DE$.

En definitiva, la función de utilidad queda representada por una superficie alabeada, que al ser cortada por planos paralelos al $C\,O\,T$ van definiendo líneas de indiferencia de utilidad que proyectadas sobre dicho plano serán de la forma de la figura 5.

Estas líneas de indiferencia de utilidad siguen la misma forma que las líneas de indiferencia financiera en las que se produce una sustitución entre cuantías y tiempos de manera que un mayor diferimiento en la disponibilidad de un capital sólo puede compensarse con una mayor cuantía para que siga manteniéndose la equivalencia financiera. Como para cada ley se define un mapa de curvas de indiferencia financiera, las leyes financieras pueden ser tomadas como expresiones de las líneas de indiferencia de utilidad.

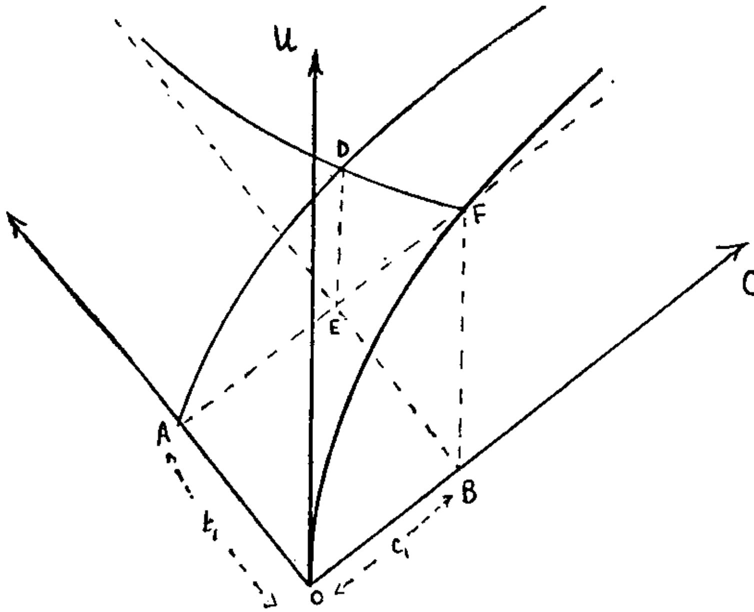


Figura 4

Veamos ahora, si las leyes financieras pueden ser usadas como funciones de utilidad. Para ello, tomando una ley financiera completa $F(c, t, p)$, y teniendo en cuenta que una de las propiedades que ha de cumplir la función F para que pueda ser utilizada como ley financiera de valoración en p es que sea homogénea de grado uno respecto de la cuantía se tendrá:

$$U=F(c, t, p)=C \cdot F(t, p)$$

siendo $F(t, p)$ una ley financiera unitaria.

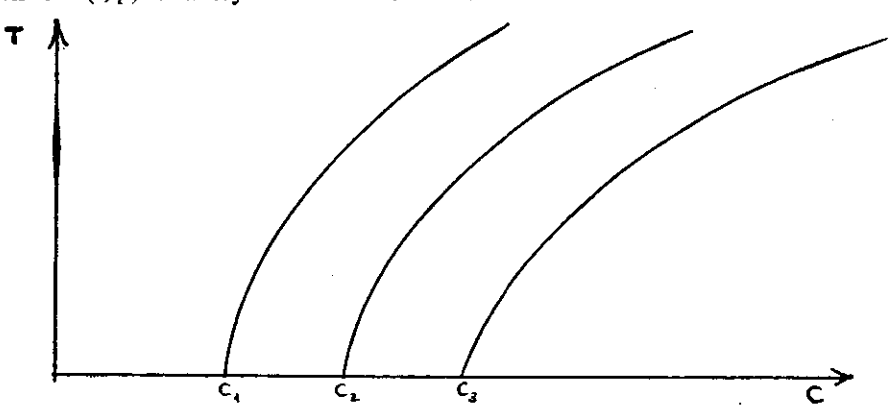


Figura 5

Por la primera condición, debe verificarse que

$$\frac{\partial u}{\partial c} = F(t; p) > 0$$

condición que cumplen las leyes financieras.

Al aplicar la segunda condición:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial c^2} = 0$$

en consecuencia, las leyes financieras son un caso particular de las funciones de utilidad en las que la utilidad marginal del dinero es constante. En la representación gráfica de la figura 4, la curva *OF* sería una línea recta y la función de utilidad, una superficie reglada.

La tercera condición exige que:

$$\frac{\partial u}{\partial t} < 0$$

es otra propiedad que se exige que cumplan las leyes financieras como consecuencia de la admisión del principio de subestimación de las necesidades futuras.

Situando el punto p de valoración en estos momentos, para que la utilidad sea menor a medida que el vencimiento del capital es más alejado, la ley financiera ha de proporcionar resultados inferiores a C, y, por tanto, la ley unitaria ha de verificar:

$$O \leqslant F(t; p) \leqslant 1$$

condición que cumplen las leyes financieras de descuento.

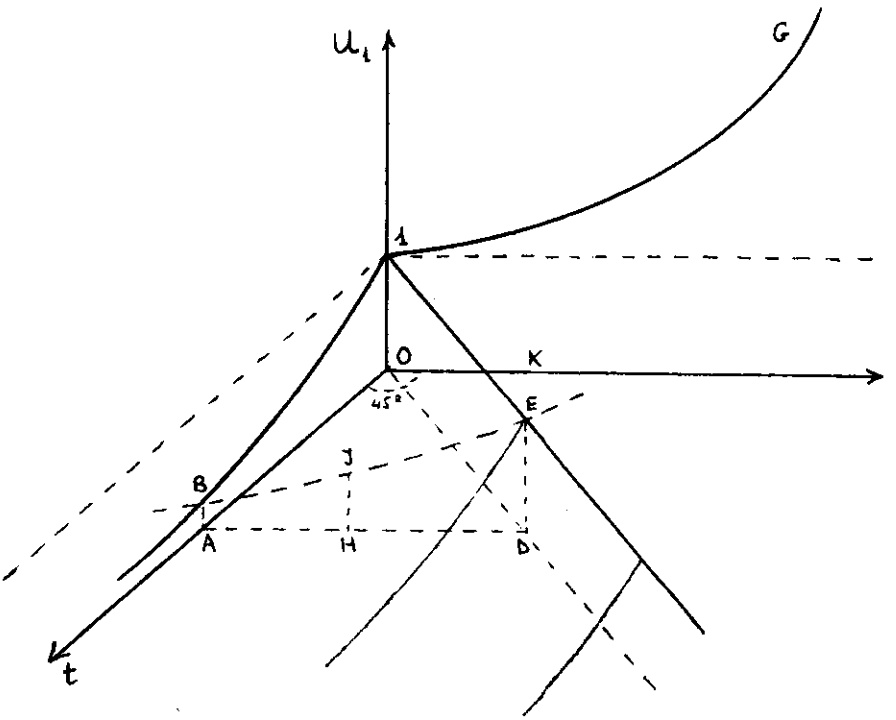
Designando por $u_1 = u/c = F(t; p)$, la función de utilidad unitaria, la representación gráfica en función de t y p será una superficie alabeada en el espacio de tres dimensiones de la siguiente forma:

Cuando $t < p$, semiespacio a la derecha de la bisectriz *OD* en el plano t o p de la figura, corresponde a las leyes de capitalización, obteniéndose valores de $F(t; p) > 1$ por lo que que no pueden utilizarse como funciones de utilidad.

Para $t = p$, puntos de bisectriz *AD*, $F(t; p) = 1$ correspondiente a los puntos de la recta horizontal $1E$.

Para $t > p$, semiespacio de la izquierda, $F(t, p) < 1$, lo que indica que los capitales unitarios con vencimiento posterior a p, tienen un equivalente menor que la unidad dependiendo cada valor concreto de la forma particular que adopte la función F.

En conclusión, las leyes financieras de descuento pueden ser usadas como funciones de utilidad, con la particularidad de ser la utilidad marginal del dinero constante.



Cuando la ley $F(t; p)$ es estacionaria, se presenta la particularidad de que los planos perpendiculares al t o p y paralelos a la bisectriz OD cortan a la superficie $F(t; p)$ según rectas horizontales por ser $F(t; p) = F(t+h; p+h)$, $\forall h$ y esa superficie es reglada.

Los factores de descuento y de contracapitalización como magnitudes derivadas que permiten establecer la equivalencia entre cuantías con distintos vencimientos también gozan de las propiedades adecuadas para ser usadas como funciones de utilidad.

Entre las diversas leyes financieras resulta interesante destacar la de descuento compuesto porque merced a sus propiedades de estacionariedad y multiplicatividad, es muy práctica, las equivalencias se mantienen para todo valor de p, y permite operar en función del tiempo de desplazamiento de los capitales.

$$u = c \cdot e^{-\delta z} = c\,(1+i)^{-z} \qquad \text{con} \qquad \delta = \lg_e (1+i) \qquad \text{y} \qquad z = t - p$$

Si consideramos una renta cualquiera (de cuantía variable, por ejemplo) con capitales $(C_1;\, t_1), \ldots (C_n;\, t_n)$ y obtenemos el valor actual de la misma con la ley financiera anterior:

$$U = V_{t_0} = C_1(1+i)^{-(t_1-t_0)} + C_2(1+i)^{-(t_2-t_0)} + \ldots + C_n(1+i)^{-(t_n-t_0)}$$

Se puede comprobar que también sirve como función de utilidad de tipo lineal respecto de la cuantía.

Precisamente K. Borch describe una función similar en su libro "Economía de la Incertidumbre" si bien solamente en función de las cuantías afectadas de unos coeficientes, que en nuestro caso, recogen precisamente el aspecto financiero que produce el distinto desplazamiento en el tiempo. Si en vez de tratarse de la ley de descuento compuesto fuera otra cualquiera, se operaría con el factor de actualización correspondiente:

$$U = V_{t0} = C_1 \cdot f(t_0\, t_1) + C_2 \cdot f(t_0;\, t_2) + \ \ldots\ + C_n \cdot f(t_0;\, t_n)$$

Estas funciones de utilidad pueden considerarse como suma de funciones de utilidad individuales o simples, tal como hemos descrito un poco más arriba al utilizar el descuento compuesto. Así designado $U_s = C_s \cdot f(t_0;\, t_s)$ resulta:

$$U = \sum_{s=1}^{n} U_s$$

Esta propiedad de obtener la utilidad total cómo suma de las utilidades correspondientes a cada período se verifica siempre en funciones lineales respecto a la cuantía pero puede no cumplirse en los demás casos.

Finalmente creemos necesario citar un interesante trabajo de Pratt (12) en el que después de obtener una medida de la aversión al riesgo ante pequeñas variaciones de la riqueza del individuo, analizar la forma que tendrán las funciones cuando esta persona muestra comportamiento de aversión al riesgo creciente, decreciente y constante. En todas ellas aparece la magnitud cuantía formando parte de expresiones de tipo potencial o exponencial. Todas ellas son aptas para efectuar una acomodación que permite tener en cuenta el aspecto temporal y por ende financiero de la utilidad.

---

(12) J. Pratt: "Risk Aversion in the Small and in the Large". Económetrica, enero 1964, págs. 122-136. Este artículo viene recogido en los libros de lecturas: "Investment Portfolio Decision Making", de Bicksler y Samuelsón (1974), en "Stochastic Optimizacion Models in Finance", de Ziemba y Wickson (1975).

BIBLIOGRAFIA

BERNOULLI, D.: *Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis.* Traducido al inglés y púbicado en Econométrica, vol. 22, pág. 23-26.

BORCH, K.: *Economía de la Incertidumbre.* Ed. Aguilar, Madrid, 1977.

CASTAÑEDA, J.: *Teoría Económica.* Ed. Aguilar, Madrid, 1968.

GIL PELÁEZ, L. *Matemática de las Operaciones Financieras,* Madrid, 1967.

NEUMANN Y MORGENSTERN: *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton U. P., 1944.

NIETO DE ALBA, V.: *Introducción a la Estadística.* Ed. Aguilar, Madrid, 1974.

PABLO LÓPEZ, A.: *Criterios de Decisión Financiera en la Empresa, Tesis Doctoral, Universidad Complutense,* Madrid.

PRATT, J.: *Risk Aversion in the Small and in the Large.* Econometría, vol. 32, pág. 122-136

PRIETO, E.: *Teoría de la Inversión.* Ed. ICE, Madrid, 1973.

RÍOS, S.: *Análisis de Decisiones.* Ed. ICE, Madrid, 1976.

OBSERVACIONES: Queda un gran número de autores y obras sin recoger porque la lista sería extensísima. Entre los autores de la Escuela Americana podemos citar los nombres de Marchak, Debreu, Hernstein, Milnor Samuelson, Friedman, Savage, Luce, Raiffa, Fisburn, etc., además de los que han centrado su atención primordial en aspecto económico como Markowitz, Tobin, Farrar, Mao y otros muchos.