Estructura racional de las operaciones financieras

Por **D. Angel Vegas Pérez,**
Catedrático.

La matemática financiera no es otra cosa que la aplicación de los recursos que ofrece la matemática al estudio de la variación cuantitativa del capital. Por ello podemos afirmar que es una parte, y de las más fecundas, de la Economía matemática.

Como dice Amoroso, en sus *Lezioni de Economia matematica,* no toda la Economía Política se puede estudiar matemáticamente, pero sí una parte muy importante de ella, aquella que trata de magnitudes de carácter matemático: cantidad de mercancías vendidas, precio de venta..., y a sus relaciones.

Todo estudio racional, deductivo, teórico, exige la precisión previa de unos postulados fundamentales surgidos por una definición por abstracción y que constituyen los principios de los que se deducen consecuencias susceptibles de aplicaciones dentro del significado determinado por ellos.

Así, para el estudio de la Economía racional por vía matemática es necesario, entre otros, el postulado de conmensurabilidad del placer experimentado por la satisfacción de una necesidad (o felimitá), o la definición de las funciones índices de Pareto.

También son necesarios, para desarrollar el estudio matemático de la variación cuantitativa del capital, postulados que conocemos como "postulados de la Matemática financiera".

El primero de ellos, llamado clásicamente "Principio genético del rédito", nace de la definición que Fisher hizo de Capital en su doble aspecto de estático y dinámico.

Bien económico es todo objeto material apropiable, entendiendo esta apropiabilidad como capacidad para cubrir necesidades (Propiedad en el sentido económico, distinta de la propiedad ontológica o jurídica).

Toda transformación que aumenta la economicidad de un bien económico o que convierte en bien económico al que no lo era, recibe el nombre de *servicio económico* y el conjunto de bienes y servicios económicos es lo que Fisher llama *elemento de riqueza.*

La definición hecha de *bien económico* y de *servicio económico,* por apoyarse en objetos materiales y en transformaciones efectuadas sobre objeto, lleva consigo la posibilidad de medida de los elementos de riqueza, empleando sistemas adecuados a la naturaleza de los bienes o servicios (peso, volumen, tiempo...).

La simple operación de cambio de elementos de riquezas lleva a la definición de precio y, por ende, a la expresión cuantitativa del valor.

El valor de un conjunto de elementos de riqueza en un instante determinado recibe, según Fisher, el nombre de *capital estático* o capital propiamente dicho, y ese mismo conjunto de elementos de riqueza, variando y transformándose en su valor, en el espacio y en el tiempo, es llamado *capital dinámico* o rédito.

Cuando prescindimos de la variación espacial, es decir, de la influencia del lugar, y sólo atendemos a la variación del capital en el tiempo, la determinante de la variación cuantitativa de dicho capital se llama operación financiera. La Matemática Financiera tiene por objeto el estudio matemático de esta clase de operaciones.

La operación financiera, en su expresión más simple (y a ella siempre pueden referirse las más complejas), puede resumirse en un cambio de capitales en diferentes tiempos. Según eso, se reduce a una prestación correspondida no simultáneamente por una contraprestación.

Los postulados fundamentales de la Matemática Financiera, son dos: "Principio genético del rédito" y "Equivalencia financiera".

El *primer postulado* se puede enunciar de la siguiente forma: "El crecimiento infinitesimal de un capital viene dado por una ecuación diferencial de la forma

$$d\,c(t) = c(t) \,.\, p(t)\,dt$$

integrable, de solución válida para toda la duración de la operación financiera y de la misma forma para todas las operaciones.

Como consecuencia de dicho postulado, la expresión del valor del capital en el instante t, será

$$c_t = c_0 \, e^{\int_0^t \rho(t)\, dt}$$

Igual a $c_0 e^{\delta t}$, $c_0 (1+i)^t$ ó $c_0 (1+ti)$, según que $\rho(t)$ sea igual a δ ó $l(1+i)$ ó $\frac{i}{1+t\,i}$.

El *segundo postulado* dice que en un momento cualquiera el compromiso total de las dos partes contratantes es el mismo. Por compromiso total entendemos el que recoge todo lo anterior y lo posterior al momento considerado. Si sólo se considerase o lo pasado o lo futuro, tendríamos, al restar los compromisos, las llamadas *reservas matemáticas.*

Este postulado ha de verificarse en todo momento para poder hacer uso de la Matemática Financiera en el estudio de las operaciones.

Por ello, cuando en las aplicaciones no se verifique el postulado es necesario encontrar fórmulas que conviertan los hechos reales al molde definido por el postulado. Estas fórmulas serán llamadas de *conversión.*

Siguiendo a Insolera en lo relativo a las condiciones *formales y substanciales* que definen a una operación financiera, entendemos por substanciales las que determinan una variación cuantitativa de la contraprestación, y por formales las que no la varían. Entre aquéllas estarán el capital, el tanto, el tiempo (los coeficientes de probabilidad también si la operación fuese aleatoria) y, entre las formales, las infinitas que puedan pensarse y que no son más que diversas maneras de presentarse la misma operación: modos diversos de amortización...

Según esto, tendremos que las fórmulas de conversión no serán otra cosa que relaciones funcionales entre las condiciones substanciales que definen dos operaciones que formalmente son iguales.

Supongamos que se trata de un préstamo con intereses anticipados.

La operación normal supone que la indemnización sea regulada por la formación del montante con arreglo a una determinada ley de capitalización. Así, si se hubiera prestado un capital c por un año, habría que devolver $c\,(1+i)$, siendo i el tanto por uno de interés; y si el préstamo fuese de n años de duración, la cantidad a devolver sería $c_0\,(1+i)^n$.

Tratándose de intereses anticipados, tendremos que lo que en realidad se recibe es c (I — a), siendo a el tanto correspondiente, y se devuelve *c*. La conversión de este caso particular al caso normal se hará con la fórmula $i = \frac{a}{1-a}$, que nace de la sencilla proporción $\frac{1-a}{1} = \frac{1}{1+i}$. Con esta fórmula de conversión podemos calcular el montante cuando se trata de intereses anticipados sirviéndonos de las fórmulas normales, así

$$c_n = c_o (1+i)^n = c_o (1-a)^{-n} = c_o \left(1 + \frac{a}{1-a}\right)^n$$

Si se tratase de un préstamo amortizable por el método de intereses anticipados, las fórmulas que convierten este préstamo al préstamo de amortización progresiva o de sistema francés, se obtendrán de la siguiente forma:

La fórmula de la anualidad correspondiente al año *r* será

$$a_r = c_{r+1}\, i + A_r$$

Siendo c_{r+1} el capital vivo al principio del año $r + 1$, *i* el tanto y *Ar* el capital que se amortiza al fin del año *r*

$$a_r = (c_r - A_r)\, i + A_r = c_r\, i + A_r (1 - i)$$

$$\frac{a_r}{1-i} = c_r \frac{i}{1-i} + A_r \qquad [1]$$

Recordando que en los préstamos de amortización por el sistema francés, la fórmula de la anualidad en:

$$a_r = c_r\, i + A_r$$

poniendo $\frac{a_r}{1-i} = a'_r$ y $\frac{i}{1-i} = i'$ [2]

tendremos que [1] se convierte en

$$a'_r = c_r\, i' + A_r$$

es decir, en un préstamo normal, mediante las fórmulas [2] que son por ello de conversión, según la nomenclatura adoptada.

Supongamos un empréstito con prima de amortización constante. La fórmula de la anualidad será

$$a = N_r\, c\, i + \mu_r (c + P)$$

siendo N_r el número de obligaciones vivas al principio del año r y μ_r el número de las que se amortizan, c su valor nominal y P la prima de amortización.

La anualidad puede ponerse de la forma

$$a = N_r\, (c + P)\, \frac{c\, i}{(c + P)} + \mu_r\, (c + P)$$

y haciendo $c + P = c'$,, $i\, \frac{c}{c + P} = i'$, tendremos:

$$a = N_r\, c'\, i' + \mu_r\, c'$$

es decir, se ha convertido en un empréstito normal, cuyo valor nominal sería c' y su tanto i', siendo éstas las fórmulas de conversión.

De la misma forma obtendremos que las fórmulas de conversión de un empréstito en que no se paga el último cupón, son

$$c\,(1 - i) = c' \text{ ,, } \frac{i}{1 - i} = i'$$

Consideremos ahora el caso más complicado en que el cupón se paga por enésimas partes de año, que las obligaciones se amorticen con prima y no se paga el último cupón:

$$a = N_r\, c\, i\, \frac{i}{(1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1} + \mu_r \left(c + P - \frac{c\, i}{m}\right)$$

Las fórmulas de conversión serán:

$$c' = c\left(1 - \frac{i}{m}\right) + P$$

$$i' = \frac{i^2}{\left((1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right)}\; \frac{c}{\left(c\left(1 - \frac{i}{m}\right) + P\right)}$$

Las mismas consideraciones, como es lógico, cabe hacer cuando la definición formal del empréstito indique es una progresión aritmética o geométrica la ley que siguen las anualidades.

Para terminar, diremos que los tantos llamados efectivos, en los empréstitos, no son otra cosa que tantos de conversión.

En efecto, el llamado *tanto emisor,* calculado en función del valor de emisión, nace de convertir a empréstito normal el caso de obligaciones emitidas a valor distinto de aquel a que se amortizan, suponiendo que las obligaciones emitidas al valor v se amortizan a ese mismo valor. Las fórmulas correspondientes serían

$$N V \frac{e}{1-(1+e)^{-n}} = N C \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

es decir, que mediante e (tanto efectivo emisor) podemos considerar el empréstito en la forma enunciada.

Iguales razones sirven para el *tanto prestatario,* es decir, el tanto efectivo calculado sobre la cantidad líquida que recibe el que emite el empréstito.

Si suponemos que los gastos de emisión son G, tendremos

$$N V = K + G$$

siendo K la cantidad líquida que percibe el prestatario.

El tanto efectivo prestatario p vendrá dado, según las definiciones hechas, por:

$$N V \frac{e}{1-(1+e)^{-n}} = N C \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = K \frac{P}{1-(1+p)^{-n}}$$

Este tanto p es el que debe tenerse en cuenta cuando se quiera comparar la rentabilidad económica total de un negocio con el tanto a que resulta un empréstito, considerado en el movimiento económico de la Empresa que lo emite.

La posibilidad de reducir mediante las fórmulas de conversión gran número de empréstitos a empréstitos normales supone, según hemos visto, especiales ventajas y obedece a un proceso eminentemente racional.