Teoría de la selección de carteras

Por

EUGENIO PRIETO PEREZ

Catedrático de Universidad

EL problema de la selección de carteras.

El problema de la selección de carteras es básico en la economía de las denominadas empresas financieras (Bancos, entidades de Seguros, de Ahorro, Capitalización, Fondos de inversiones, etc.). Brevemente, podíamos describirlo así:

Supongamos un inversor que dispone de unos recursos líquidos C. Ante las diferentes opciones de inversión pretende seleccionar la combinación óptima, que decimos constituye su *cartera de inversiones óptima*. La composición de la cartera de inversiones óptima dependerá de las preferencias del inversor considerado y de los rendimientos de las diferentes opciones de inversión. A los rendimientos de una cierta inversión, admitiremos que será posible asociarle una variable aleatoria ξ, con función de distribución $F(x)$.

Asimsmo, supondremos que las preferencias del inversor vienen dadas por una función de utilidad

$$u(x) = x + ax^2$$

Esto significa que el inversor considera perfectamente descrita una perspectiva de inversión ξ, por los momentos

$$\mu = \text{media}$$
$$\sigma^2 = \text{varianza}$$

de su función de distribución $F(x)$.

La varianza es una medida del riesgo de que el rendimiento efectivo difiera del rendimiento esperado. Cuando se llevan a cabo dos opciones de inversión, s y j, la covarianza σ_{sj} de la distribución conjunta de los rendimientos es una medida de la correlación entre las variables rendimientos ξ_s y ξ_j, correspondientes a una y otra opción de inversión. Una covarianza positiva

(*) Publicado en la Revista *Trabajos de Estadística y de Investigación Operativa*, vol. XXIV, Madrid, 1973.

implica que los rendimientos de las dos opciones varían en el mismo sentido, lo que aumenta el riesgo de grandes fluctuaciones en el riesgo total.

Nótese que dos inversores que tengan distintas preferencias, darán diferente composición a la cartera, aun cuando hagan la misma estimación para

$$m_s, \sigma_s^2 \text{ y } \sigma_{sj} \begin{pmatrix} s = 1, \ldots, n \\ j = 1, \ldots, n \end{pmatrix}$$

Una cartera con una varianza elevada se dice que es una *cartera arriesgada o especulativa,* y cuando es *nula* o muy pequeña, que es una *cartera segura o moderada.* Para los casos intermedios se utiliza el término de *carteras de rendi mientos* (*). Esta terminología es asimismo válida para perspectivas individuales. No es preciso señalar, por otra parte, que las carteras son perspectivas aleatorias.

Formulación de la teoría.

Sea una cartera de inversiones $\mathcal{C}$, compuesta por un cierto número de activos. Denotemos por $\lambda_k (k=1, 2, \ldots)$ la proporción de la cantidad total invertida en el activo k. Tenemos:

$$\lambda_k \geqslant 0 \qquad \forall\, k = 1, 2, \ldots, n$$
$$\sum_k \lambda_k = 1$$

Los rendimientos del activo-k, en un período prefijado, los representamos por ξ_k (**), admitiendo que su cuantía es independiente del inversor.

En estas condiciones el rendimiento del la cartera $\mathcal{C}$ es:

$$\eta = \sum_k \lambda_k \cdot \xi_k$$

La función de distribución de ξ_k es $F_k(x)$.

La rentabilidad media de la cartera es:

$$\mu = \sum_{k=1}^{n} \lambda_s \cdot \mu_s$$

y la varianza:

$$\sigma^2 = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^2 \cdot \sigma_s^2 + 2 \sum_{s \neq j} \sigma_{sj} \lambda_s \cdot \lambda_j = \sum_s \sum_j \lambda_s \cdot \lambda_j \sigma_{sj}$$

La última igualdad supone hacer

$$\sigma_{ss} = \sigma_s^2$$

(*) Véase FÉLIX ROSENFIELD: *Analyse des valeurs mobiliares.* Dunod, 1967.

(**) Incluimos en ξ_k los distintos rendimientos posibles (intereses, dividendos, derechos, etc.) netos de pérdidas e impuestos.

Definición:

Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos carteras caracterizadas por

	Media	*Varianza*
$\mathcal{C}_1$	μ	σ^2
$\mathcal{C}_2$	μ	σ'^2

Sea $\sigma < \sigma'$; si un agente prefiere $\mathcal{C}_1$ a $\mathcal{C}_2$ le calificaremos de prudente y, por el contrario, recibe el calificativo de *jugador* si prefiere $\mathcal{C}_2$ a $\mathcal{C}_1$.

En lo que sigue escribiremos:

$\mathcal{C}_1 \succ \mathcal{C}_2$ para indicar $\mathcal{C}_1$ preferible a $\mathcal{C}_2$

$\mathcal{C}_1 \prec \mathcal{C}_2$ para indicar $\mathcal{C}_2$ preferible a $\mathcal{C}_1$

Es claro que un mismo agente puede en unas ocasiones comportarse como prudente y en otros como jugador

Combinación de carteras.

Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos carteras de composiciones respectivamente dadas por λ y λ', y con esperanzas de rendimiento μ y μ' y desviaciones típicas σ y σ'. El coeficiente de correlación entre ambos es ρ.

La cartera $\mathcal{C}$ que surge de las dos anteriores cuya composición es:

$$X = \alpha \lambda + (1 - \alpha) \lambda' \qquad \forall \alpha \varepsilon [0,1]$$

tiene un rendimiento esperado:

$$M = \alpha \mu + (1 - \alpha) \mu'$$

y una desviación típica:

$$S = \sqrt{\alpha^2 \sigma^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma'^2 + 2 \alpha (1 - \alpha) \rho \sigma \sigma'}$$

Casos particulares.

Analizaremos tres casos de combinación de carteras que interesan extraordinariamente:

a) *Dinero efectivo.* El dinero efectivo es una inversión caracterizada por

$$\mu = 0 \qquad \sigma = 0$$

El punto representativo en el espacio (μ, σ) es el origen. La introducción de dinero efectivo en una cartera de inversiones disminuye la esperanza de rendimiento de la cartera que aumenta en seguridad.

Sin embargo, parece oportuna la siguiente observación. El agente está con frecuencia más interesado en los rendimientos reales que en los nominales. Los primeros se obtienen dividiendo los segundos por el índice de precios. *Si este índice aumenta, el dinero pierde poder adquisitivo* variando éste inversamente al índice de precios. En este caso, el rendiminto real del dinero es negativo, pero conserva desviación nula.

b) *Préstamos.* Un préstamo que no implique riesgo supone un rendimiento igual al tanto efectivo (i) y una desviación típica nula $\sigma'=0$. Representando por (μ, σ) el punto representativo, en orden a la rentabilidad y al riesgo, del resto de la cartera y si los préstamos suponen la fracción α del importe total de la nueva cartera $\mathcal{C}$ tenemos para ésta:

$$\left.\begin{aligned} M &= \alpha\, i + (1-\alpha)\,\mu \\ S &= (1-\alpha)\,\sigma \end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

Al despejar α en la segunda ecuación de [1] tenemos

$$\sigma - S = \alpha\,\sigma \Rightarrow \alpha = 1 - \frac{S}{\sigma}$$

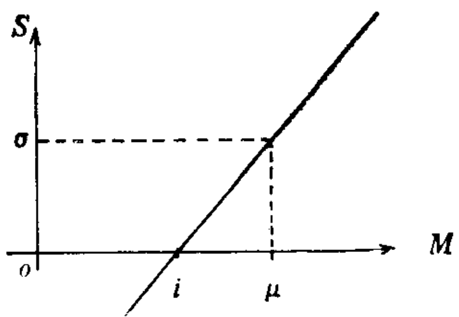
y llevando este resultado a la primera ecuación de [1] resulta:

$$M = \left(1 - \frac{S}{\sigma}\right) i + \frac{S}{\sigma}\,\mu = i + s/\sigma\,(\mu - i)$$

Cuando α varía $[\alpha \in [0, 1]]$, M toma valores en la recta de ecuación

$$M = i + \frac{S}{\sigma}(\mu - i)$$

que une los puntos: (i, o) y (M, σ).



c) *Empréstitos.* Sea α el porcentaje de la cartera $\mathcal{C}$ de características (M, S), que el agente puede adquirir con el dinero obtenido vía-empréstito al tanto efectivo i_e. El rendimiento de la nueva cartera es:

$$(1 + \alpha)\,\eta$$

El valor medio de este rendimiento aleatorio es:

$$(1+\alpha) M$$

yla desviación típica

$$(1+\alpha) S$$

Del rendimiento medio hemos de deducir los pagos que comporta el empréstito, o sea:

$$\begin{aligned}(1+\alpha) M - \alpha \cdot i_e &= (1+\alpha) M - \alpha i_e - i_e + i_e \\ &= (1+\alpha)(M - i_e) + i_e\end{aligned}$$

La cartera óptima.

Consideremos m perspectivas aleatorias distintas $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$. Todas las posibles carteras que pueden formarse con ellas se diferencian en la composición. Esta viene dada por el vector variable λ. La cartera de composición λ tiene un rendimiento:

$$\eta = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot \xi_k$$

de modo que:

$$\mu = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot \xi_k$$

$$\sigma^2 = \Sigma \Sigma \lambda_k \cdot \lambda_j \sigma_{kj}$$

El problema de la determinación de la cartera óptima consiste en encontrar un vector que haga máxima la utilidad

$$U(\mu, \sigma^2) = \mu - a \sigma^2 \quad *$$

Evidentemente, deben cumplirse las condiciones:

1) $\lambda_k \geqslant 0 \qquad \forall k = 1, 2, \ldots, n$

2) $\Sigma \lambda_k \leqslant 1$

Así, pues, el problema es hallar el máximo de

$$U = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot \mu_k - a (\sum_k \sum_j \lambda_k \cdot \lambda_j \sigma_{kj})$$

(*) El parámetro a mide la aversión al riesgo.

sujeto a las condiciones:

$$\lambda_k \geqslant 0 \qquad \forall\, k = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1$$

es decir, un simple problema de programación cuadrática.

Enfoque de Markowitz.

El problema de la selección de carteras lo enfoca Harry M. Markowitz del modo siguiente:

Admite la existencia de una función de utilidad para el inversor, que satisface las condiciones:

$$\frac{\partial U}{\partial \mu} > 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial \sigma^2} < 0$$

que significan, respectivamente:

— La primera, que dos carteras que impliquen igual riesgo, medido éste por la varianza, es preferible el que tenga mayor rentabilidad.

— La segunda, que a igualdad de rendimiento entre dos carteras, se prefiere la que implique menor riesgo.

Después, Harry M. Markowitz decide entre las carteras a las que corresponde una rentabilidad media prefijada μ aquella que tenga una varianza menor. Este criterio implica hallar

$$\text{mín. } \sum_k \sum_j \lambda_k \cdot \lambda_j \, \sigma_{kj}$$

con las restricciones:

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \, \mu_k = \mu$$

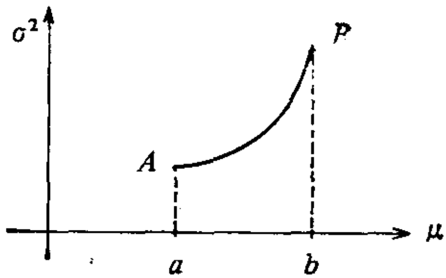
$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \leqslant 1$$

$$\lambda_k \geqslant 0 \qquad \forall\, k = 1, 2, \ldots, m$$

Este, es también un problema de programación cuadrática cuya solución es un vector $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ que determina la cartera óptima (*) para el nivel de rendimiento μ.

(*) Eficiente en el lenguaje estadístico, pues presenta varianza mínima.

Resolviendo el problema de programación cuadrática anterior $\forall \mu \in I(a, b)$, el *conjunto de las carteras eficientes resultantes tendrán varianzas mínimas dentro de las de igual rentabilidad*, formando un conjunto que en el plano representa una curva tal como



Los puntos situados por debajo de la curva $\widehat{AB}$ representan carteras cuya composición *no es factible* dentro del conjunto de perspectivas $\mathcal{C}$ considerado. Los puntos situados por encima de la curva $\widehat{AB}$ son posibles, pero no significan *carteras* eficientes.

Como señala Karl H. Borch, "la idea básica tras el modelo de Markowitz es la de que el inversionista debería examinar la curva durante un tiempo suficientemente prolongado y después decidirse por un punto que más que ningún otro satisface sus necesidades y preferencias en lo referente al riesgo y beneficios".

Pensemos que, en efecto, es más sencillo resolver un problema de programación cuadrática como el planteado por Markowitz que establecer un conjunto completo y consistente de preferencias. Entendemos que operando tal como indica Markowitz reducimos el problema de la decisión de invertir a su forma más simple, pues solamente después de conocidas las combinaciones (μ, σ^2) de $\widehat{AB}$, aplicamos un criterio que nos lleva a la decisión final. El enfoque que corres pondería a la aplicación del principio de Bernouille nos obligaría a declarar nuestras preferencias en relación con todas las carteras del plano $\mu\ \sigma^2$, incluso las *no factibles*. Es claro que éste es un problema prácticamente inabordable. El modelo de Markowitz es como todo modelo una simplificación, pero creemos que se corresponde bastante bien con las actuaciones de los individuos en el mundo de los negocios. "El procedimiento usual parece ser —escribe Karl H. Borch— el que los técnicos se encarguen de clarificar los problemas, si es preciso, con la ayuda de una máquina electrónica y presentar los resultados obtenidos a la alta administración de la empresa. Lo hallado será después considerado a puerta cerrada, en la sala de Juntas de la Dirección, y entonces se procederá a tomar una decisión. El procedimiento alternativo, sigue diciendo Karl H. Borch, por lo que se refiere a la alta administración de la empresa, consistiría en poner de manifiesto sus preferencias, o los objetivos de la sociedad, y dejar que los técnicos fuesen quienes decidieran".

Entre las ventajas que ofrece el procedimiento de Markowitz puede señalarse una fundamental, la empresa, o en general el inversor mantiene en secreto sus objetivos, secreto que puede ahorrarle no pocas situaciones embarazosas incluso ante sus propios técnicos y empleados que podrían pensar que tales objetivos eran inconsistentes.

Algunas objeciones al modelo de Markowitz.

A pesar de la simplificación que entraña, parece claro que el modelo de H. M. Markowitz capta elementos esenciales del comportamiento del inversor. Veamos algunas de sus principales limitaciones.

— El modelo es estático, cuando ocurre que la selección de una cartera *es un elemento de su gestión que constituye un proceso din ámico. Las acciones a llevar a cabo son múltiples y discurren en el tiempo.* No pueden decidirse por anticipado y de una vez por todas, pues las circunstancias, el conocimiento de las circunstancias y los gustos evolucionan, la decisión es secuencial.

— Al limitarse a describir la función de probabilidad de ξ por μ y σ^2 y no tener en cuenta otros parámetros de la función de distribución, podemos llegar a estimar que existe entre dos perspectivas ξ_1 y ξ_2, la relación $\xi_1 \succ \xi_2$ cuando en realidad sea otra.

BIBLIOGRAFIA

S. Ch. Kolm: *Les choix financieres et monétaires.* Dunod, 1967.

F. Rosenfield: *Analyse des valeurs mobilieres.* Dunod, 1967.

J. C. G. Boot: *Programmation quadratique.* Dunod, 1968.

H. M. Markowitz: *Portofolio Selection. Eficient Diversification of Investment.* John Wiley, 1959.

K. H. Borch: *The Economics of óncertainty.* Princeton University Press, 1968.