La sucesión financiera aplicada a los préstamos y empréstitos

Por **D. José Antonio Estrugo Estrugo,**
Catedrático de la Escuela Central de Altos Estudios Mercantiles.

1.—Justificación.
2.—Definición de la sucesión financiera y cálculo de un término cualquiera.
3.—Caso particular notable.
4.—Notaciones.
5.—Clasificación de los empréstitos.
Estudio general y fórmulas fundamentales de los principales sistemas de amortización de empréstitos.

1.—El presente trabajo tiene por objeto dar a conocer una sucesión propiamente financiera que tiene la ventaja de poder unificar, mediante su aplicación, la exposición matemática de los problemas derivados de la amortización de préstamos y empréstitos, y éstos, a su vez, con los actuariales (*), de tal forma que, cualquiera que sea el sistema seguido para la amortización o cualquiera que sea la modalidad del seguro que se trate, el cálculo de la anualidad o de la prima pura, respectivamente, es un caso particular de la sucesión que a continuación expondremos.

Basta leer los Tratados modernos de la teoría del interés y sus aplicaciones, para sentir esa necesidad de unificación, puesto que, para cada caso de amortización es preciso emplear un artificio distinto, mediante el cual se eliminan, en el sistema de ecuaciones formado, las incógnitas precisas para obtener una fórmula inicial, que es base de todos los cálculos posteriores.

La primera parte del problema, que es de la que trataremos ahora,

(*) En nuestra conferencia dada en la Asociación Matemática de Actuarios Españoles en enero de 1935, esta segunda afirmación no la hicimos, puesto que la unificación actual es consecuencia de trabajos posteriores a esa fecha.

ha sido, hace tiempo, resuelta por P. F. Arenas Herrero (*), siendo el motivo de su no aplicación el hecho de precisarse conocimientos de Cálculo Integral, que son superiores a los adquiridos por nuestros alumnos de Matemática Financiera, que sólo llegan a los umbrales del mismo.

Como seguidamente tendremos ocasión de apreciar, los recursos que emplearemos son elementales, permitiéndonos incorporarla a la enseñanza al resolver con gran sencillez esta cuestión, llamada, no sin razón, *problema fundamental de la Matemática Financiera*.

2.—Definiremos como sucesión financiera aquella cuyos términos se forman con arreglo a la ley:

$$y_{k+1} = y_k A_k + B_k \tag{1}$$

(A_k y B_k son funciones de k), verificándose que el término de lugar $n+1$

$$y_{n+1} = c, \tag{2}$$

siendo c una cantidad constante (**).

Dando valores en (1) y teniendo en cuenta (2)

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 A_1 + B_1 \\ y_3 &= y_2 A_2 + B_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y_{k+1} &= y_k A_k + B_k \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= y_{n-1} A_{n-1} + B_{n-1} \\ c = y_{n+1} &= y_n A_n + B_n \end{aligned}$$

Por sustituciones sucesivas del valor de y de cada término en el anterior, llegamos a la expresión:

$$y_k = \frac{c}{A_k . A_{k+1} \ldots A_n} - \frac{B_n}{A_k . A_{k+1} \ldots A_n} - \frac{B_{n-1}}{A_k . A_{k+1} \ldots A_{n-1}} - \frac{B_{n-2}}{A_k . A_{k+1} \ldots A_{n-2}} - \ldots \frac{B^k}{A^k} \tag{3}$$

(*) Véase *Operaciones Financieras*.—Publicaciones del Seminario Matemático.—Madrid.

(**) En realidad, la sucesión definida en el texto es el caso general de la $y_{k+1} = y_k \alpha + \beta$ (*sin prefijar el valor de* y_{n+1}), donde α y β son constantes. Esta sucesión, que nos permitimos llamar, atendiendo a su formación, progresiones aritgeométricas (para $\alpha = 1$ aritmética; para $\beta = 0$ geométrica) sirve para la obtención de las fórmulas más sencillas de la Matemática Financiera (interés simple, compuesto, anualidades e imposiciones). Lo elemental de su deducción hace que no tratemos de estas progresiones no obstante haber sido para nosotros la base para llegar a la (1).

Para distinguir α y β, las denominaremos razón acumulativa y aumentativa, respectivamente.

Esta ley de formación es general, como fácilmente puede probarse, y, por tanto, la (3) es la expresión que buscamos; pero, para hacerla más fácil al cálculo, podemos transformarla, multiplicando y dividiendo los términos negativos por

$$\prod_1^{k-1} A_k = A_1 . A_2 . A_3 \ldots . A_{k-1}, \text{ en}$$

$$y_k = \frac{c}{\prod\limits_k^n A_k} + \prod_1^{k-1} A_k \left[-\frac{B_n}{\prod\limits_1^n A_k} - \frac{B_{n-1}}{\prod\limits_1^{n-1} A_k} - \frac{B_{n-2}}{\prod\limits_1^{n-2} A_k} - \ldots - \frac{B_k}{\prod\limits_1^k A_k} \right].$$

y, por último, en forma simbólica:

$$y_k = \frac{c}{\prod\limits_k^n A_k} + \prod_1^{k-1} A_k \sum_k^n \frac{-B_k}{\prod\limits_1^k A_k} \tag{4}$$

3.—Caso particular notable de la (4), es suponer en (2) que la constante

$$c = 0, \tag{2'}$$

obteniéndose entonces

$$y_k = \prod_1^{k-1} A_k \sum_k^n \frac{-B_k}{\prod\limits_1^k A_k} \tag{4'}$$

aplicable exclusivamente a los préstamos y empréstitos.

[He aquí cómo la obtiene P. F. Arenas Herrero:

«Sea F (x) la función incógnita,

$$\varphi(x) + \psi(x) F(x) = F(x+1) \qquad [1]$$

la relación, lineal y

$$F(n+1) = 0, \qquad [2]$$

la ecuación de condición.

La ecuación [1] puede ponerse como sigue:

$$\Delta F(x) + (1 - \psi(x) F(x) = \varphi(x). \qquad [3]$$

Sean *z* é *y* dos funciones de x arbitrarias por el momento, y hagamos

$$F(x) = z\, y, \qquad [4]$$

tomando diferencias en [4] y sustituyendo el resultado en [3], se tiene

$$y[\Delta z + (1 - \psi(x)) z] (z + \Delta z) \Delta y = \varphi(x), \qquad [5]$$

determinando ahora z de manera que

$$\Delta z + (1 - \psi(x))\, z = 0, \qquad [6]$$

se deducirá el valor de y de [5]

$$y = \Sigma \frac{\varphi(x)}{z + \Delta z} + K, \qquad [7]$$

El problema queda reducido a integrar la ecuación [6]. Para esto, hagamos

$$z = e^u, \qquad [8]$$

siendo u otra función de x, tenemos:

$$\Delta z = e^u (e^{\Delta u} - 1), \qquad [9]$$

y sustituyendo en [6] resulta

$$e^{\Delta u} = \psi(x),$$

o bien

$$\Delta u = \log \psi(x),$$

de donde se deduce

$$u = \log K' \prod_{0}^{x-1} \psi(x); \qquad [10]$$

y según [8]

$$z = K' \prod_{0}^{x-1} \psi(x). \qquad [11]$$

Al ser ahora

$$z + \Delta z = K' \prod_{0}^{x} \psi(x),$$

resulta para y en [7]

$$y = \Sigma \frac{\varphi'(x)}{K' \prod_{0}^{x} \varphi(x)} + K;$$

por lo tanto, teniendo en cuenta [2], se obtiene finalmente

$$F(x) = \prod_{0}^{x-1} \psi(x) \sum_{x}^{n+1} \frac{-\varphi(x)}{\prod_{0}^{x} \psi(x)} \qquad [12]$$

y el problema se reducirá a efectuar la integración que figura en el último miembro.»

Para nosotros, el signo Σ lo consideramos, en este caso, como una forma abreviada de escribir un desarrollo; aquí, dispuesto para la integración; luego ambas fórmulas coinciden.]

Como nuestro objeto no es una exposición metodológica de la disciplina cuyo estudio efectuamos, sino solamente hacer resaltar la utilidad que del empleo de la sucesión antes definida puede obtenerse en el desarrollo de la misma, es por lo que comenzamos con la aplicación del nuevo algoritmo de iteración a los empréstitos.

4.—Las notaciones que emplearemos serán las siguientes:

αk, anualidad correspondiente al año k-ésimo; *n*, duración en años del empréstito; *i*, tanto por uno de interés.

Nk, número de obligaciones vivas o en circulación al comienzo del año *k* (Por consiguiente N_1 será el de las emitidas, y siendo *n* la duración, $Nn + 1 = 0$).

$Mk = Nk - Nk + 1$, número de obligaciones amortizadas en el k-ésimo sorteo.

C, valor nominal de las obligaciones.

Ck, valor de amortización de una obligación el año *k*.

5.—Atendiendo al cupón o interés nominal de las obligaciones, haremos la clasificación en tres grupos:

1.° Obligaciones cuyo interés se satisface por atrasado, o a cupón vencido.

2.° Obligaciones cuyo interés se satisface por anticipado, o a cupón adelantado, y

3.° Obligaciones sin cupón.

A su vez las obligaciones de cada uno de estos grupos pueden amortizarse por su nominal, o bien por un tanto efectivo constante o variable (*) y la renta con que se amortizan puede ser igual o distinta cada año.

PRIMER GRUPO

a) Empréstitos normales.—Son aquellos en que las obligaciones se amortizan por su nominal y mediante renta constante.

La anualidad α, en un año cualquiera *k*, ha de servir a satisfacer

(*) Otras veces se conceden lotes o sumas destinadas a premiar algunas de las obligaciones que se amortizan en cada sorteo.

los intereses de los Nk títulos en circulación Nk Ci, y al mismo tiempo para amortizar los correspondientes a ese sorteo: (Nk — Nk + 1) C; por lo tanto, podemos escribir que será

$$\alpha = Nk\,Ci + (Nk - Nk + 1)\,C. \tag{5}$$

De aquí se deduce que

$$Nk + 1 = Nk\,(1 + i) - \frac{\alpha}{C}$$

y como Nn + 1 = 0, se verifica (1; 2′), siendo en este caso $Ak = 1 + i$, y $Bk = \frac{-\alpha}{C}$, luego según (4′)

$$Nk = \prod_{1}^{k-1}(1+i)\sum_{k}^{n}\frac{\alpha/c}{\prod\limits_{1}^{k}(1+i)} = \frac{\alpha}{C}(1+i)^{k-1}\sum_{k}^{n}(1+i)^{-k} =$$

$$= \alpha/C\,(1+i)^{k-1}\left[(1+i)^{-k} + (1+i)^{-(k+1)} + (1+i)^{-(k+2)} + \ldots (1+i)^{-n}\right]$$

$$= \frac{\alpha}{C}(1+i)^{k-1}\frac{(1+i)^{-k+1} - (1+i)^{-n}}{i} =$$

$$= \frac{\alpha}{C}\,\frac{1 - (1+i)^{-(n-k+1)}}{i} = \frac{\alpha}{C}\,a_{\overline{n-k+1|}}. \tag{6}$$

Como para $k = 1$, N_1 es el número de las emitidas, dando en (5) este valor y despejando α, se tiene:

$$\alpha = \frac{N_1\,C}{a_{\overline{n|}}} \tag{7}$$

que coincide con la fórmula tipo para esta forma de empréstito.

En función de (6) y (7), puede obtenerse cualquier dato que se precise; por ejemplo: I) Número de títulos u obligaciones amortizadas en cada sorteo.

Si en (6) ponemos k+1 en lugar de *k*, y restamos de (6), hallamos que

$$Mk = Nk - Nk + 1 = \frac{\alpha}{C}\left[a_{\overline{n-k+1|}} - a_{\overline{n-k|}}\right] = \frac{\alpha}{C}(1+i)^{-(n-k+1)}$$

II) Los intereses en un año *k* cualquiera serán:

$$Nk\,Ci = \frac{\alpha}{C}\,a_{\overline{n-k+1|}}\;Ci = \alpha i\,a_{\overline{n-k+1|}} = \frac{N_1\,Ci}{a_{\overline{n|}}}\,a_{\overline{n-k+1|}}$$

b) Si la renta amortizativa fuera variable en progresión aritmética de razon *r* y su primer término α, la (5) se escribiría

$$\alpha + (k-1)r = N_k Ci + (N_k - N_{k+1})C$$

y de aquí,

$$N_{k+1} = N_k(1+i) - [\alpha + (k-1)r]/C \qquad (N_{n+1} = 0)$$

Es decir, que el número de obligaciones vivas cada año forma una sucesión financiera de razón acumulativa $A_k = 1 + i$, y aumentativa $B_k = -\frac{\alpha + (k-1)r}{C}$; por consiguiente, según (4') será

$$N_k = \prod_{1}^{k-1}(1+i)\sum_{k}^{n}\frac{[\alpha+(k-1)r]/C}{\prod_{1}^{k}(1+i)} = \frac{(1+i)^{k-1}}{C}\sum_{k}^{n}[\alpha+(k-1)r](1+i)^{-k}$$

$$= \frac{\alpha - r}{C}\, a_{\overline{n-k+1}|} + \frac{r}{C}(1+i)^{k-1}\left[(Ia)_{\overline{n}|} - (Ia)_{\overline{k-1}|}\right]$$

igualdad esta última que se obtiene sin más que desarrollar el sumatorio y aplicar la propiedad distributiva.

Finalmente, teniendo en cuenta los valores de $(Ia)_{\overline{n}|}$ y $(Ia)_{\overline{k-1}|}$ (*)

$$N_k = \left[\alpha + \frac{r}{i} + nr\right]\frac{a_{\overline{n-k+1}|}}{C} - \frac{n-k+1}{Ci}\cdot r$$

dando a *k* el valor 1 en la expresión anterior, puede despejarse α, y, en función de los dos valores encontrados, buscar la relación que liga a los demás elementos que intervienen en esta clase de empréstitos.

c) De la misma forma, si los términos de la renta amortizativa forman progresión geométrica de razón *q*, la (5) sería en este caso

$$\alpha q^{k-1} = N_k Ci + (N_k - N_{k+1})C$$

por consiguiente

$$N_{k+1} = N_k(1+i) - \alpha q^{k-1}/C \qquad (N_{n+1} = 0)$$

(*) $(Ia)_{\overline{n}|}$ es el valor actual de una renta temporal variable según la serie natural de los números enteros. Su valor $(Ia)_{\overline{n}|} = (1 + \frac{1}{i})a_{\overline{n}|} - n(1+i)^{-n}/i$, se deduce en la teoría de rentas; por tanto, puede considerarse inmediato su cálculo.

luego,

$$Nk = \prod_{1}^{k-1}(1+i)\sum_{k}^{n}\frac{\alpha q^{k-1}/C}{\prod_{1}^{k}(1+i)} =$$

$$\alpha/C\,(1+i)^{k-1}[q^{k-1}(1+i)^{-k}+q^{k}(1+i)^{-(k+1)}+\ldots\ldots+q^{n-1}(1+i)^{-n}] =$$

$$=\alpha/C\,\frac{q^{k-1}-q^{n}(1+i)^{-(n-k+1)}}{1+i-q}.$$

Haciendo ahora $k = 1$, y despejando el primer término de las anualidades

$$\alpha = N_1 C\,\frac{1+i-q}{1-q^{n}(1+i)^{-n}}\;;$$

puede ya resolverse cualquier problema relativo a este caso.

d) Los empréstitos en los cuales las obligaciones se amortizan por un efectivo C', distinto del nominal, se resuelven mediante el planteo de la ecuación en el año *k*.

$$\alpha_k = NkCi + (Nk - Nk + 1)\,C',$$

que forma la sucesión financiera.

$$Nk+1 = Nk\,(1+\frac{C}{C'}\,i) - \frac{\alpha^k}{C'} \qquad (N_{n+1} = 0)$$

en donde la razón acumulativa es $(1+\frac{C}{C'}i)$ y la aumentativa $-\frac{\alpha_k}{C'}$, lo que nos permite resolver fácilmente los problemas derivados de este subgrupo.

e) Al objeto de hacer más sensible la simplificación que introduce en la deducción de las fórmulas la sucesión financiera, vamos a estudiar el caso de empréstitos cuyas obligaciones son amortizables por un efectivo variable cada año, cuestión que eluden tratar, por su dificultad, la mayoría de los textos dedicados a esta especialidad.

Supuesta la anualidad constante, la ecuación el año k-ésimo será

$\alpha = Nk\,Ci + (Nk - Nk + 1)\,Ck$; y de aquí $Nk + 1 = Nk\left(1+\frac{Ci}{Ck}\right)-\frac{\alpha}{Ck}$

Por tanto, siendo en este caso $Ak = 1 + \frac{Ci}{Ck}$ y $Bk = -\frac{\alpha}{Ck}$, será

$$Nk = \prod_{1}^{k-1}\left(1 + \frac{Ci}{Ck}\right)\sum_{k}^{n}\frac{\alpha/Ck}{\prod_{1}^{k}\left(1 + \frac{Ci}{Ck}\right)} =$$

$$= \frac{\alpha}{Ci}\prod_{1}^{k-1}\left(1 + \frac{Ci}{Ck}\right)\sum_{k}^{n}\frac{Ci}{Ck}\prod_{1}^{k}\left(1 + \frac{Ci}{Ck}\right)^{-1} \text{ (*)}$$

ahora, desarrollando el sumatorio y observando que

$$\prod_{1}^{k-1}\left(1 + \frac{Ci}{Ck}\right)^{-1} - \prod_{1}^{k}\left(1 + \frac{Ci}{Ck}\right)^{-1} = \frac{Ci}{Ck}\prod_{1}^{k}\left(1 + \frac{Ci}{Ck}\right)^{-1}$$

se llega, sustituyendo este valor—y después de simplificar y efectuar el producto indicado—a la expresión

$$Nk = \frac{\alpha}{Ci}\left[1 - \prod_{k}^{n}\left(1 + \frac{Ci}{Ck}\right)^{-k}\right]$$

que es la que deseamos encontrar.

Haciendo $k = 1$, y despejando la anualidad

$$\alpha = N_1 C \frac{i}{1 - \prod_{1}^{n}\left(1 + \frac{Ci}{Ck}\right)^{-1}}$$

se puede ya resolver sin dificultad el problema consistente en hallar los restantes elementos del empréstito (**).

SEGUNDO GRUPO

Prescindiendo del primer cupón, las obligaciones de este grupo difieren del anterior en que las amortizadas en cada sorteo no perciben el interés que vence en el momento de su amortización. Por consi-

---

(*) Nótese que se ha dividido y multiplicado por la constante Ci.

(**) Cada grupo en que hemos considerado clasificado los empréstitos, es susceptible de una fórmula general que comprenda a los demás como caso particular. Sin embargo, nos parece más apropiada la exposición que hemos hecho, pues así se obtiene naturalmente para cada forma de amortización, la sucesión financiera que ha de resolverla.

guiente, podemos considerar que se amortizan por un efectivo C — Ci, *y quedan reducidos los empréstitos de este grupo al ya tratado.*

Como ejemplo, resolveremos el caso de empréstito normal, es decir, aquel cuya renta amortizativa es constante, abonándose, como hemos indicado, los intereses por adelantado.

La ecuación el año k será:

$$\alpha = \mathrm{Nk}\,\mathrm{Ci} + (\mathrm{Nk} - \mathrm{Nk}+1)(\mathrm{C}-\mathrm{Ci}) \qquad (8)$$

y de aquí,

$$\mathrm{Nk}+1 = \mathrm{Nk}(1-i)^{-1} - \frac{\alpha}{C}(1-i)^{-1}; \qquad (\mathrm{Nn}+1=0)$$

por tanto, es una sucesión financiera en donde $\mathrm{Ak} = (1-i)^{-1}$ y $\mathrm{Bk} = -\frac{\alpha}{C}(1-i)^{-1}$, luego, según (4'), se verifica

$$\mathrm{Nk} = \prod_{1}^{k-1}(1-i)^{-1}\sum_{k}^{n}\frac{\frac{\alpha(1-i)^{-1}}{C}}{\prod_{1}^{k}(1-i)^{-1}} = \frac{\alpha}{C}(1-i)^{-(k-1)}\sum_{k}^{n}(1-i)^{k-1} =$$

$$= \frac{\alpha}{C}(1-i)^{-(k-1)}\left[(1-i)^{k-1}+(1-i)^{k}+\ldots+(i-i)^{n-1}\right] =$$

$$= \frac{\alpha}{C}\,\frac{1-(1-i)^{n-k+1}}{i}$$

Si damos a k el valor **1**, y despejamos la anualidad

$$\alpha = \frac{N_1\,Ci}{1-(1-i)^{n}}$$

se puede ya, como en los otros casos anteriores, encontrar los restantes elementos del empréstito.

Si la renta no fuera constante, bastaría sustituir el primer miembro de la (8) por $\alpha + (k-1)\,r$ ó αq^{k-1}, si forma progresión aritmética o geométrica, respectivamente, viendo luego la sucesión financiera a que dan lugar.

Basándose en lo ya indicado, se puede resolver con facilidad cualquier otro caso perteneciente a este grupo.

(*) El número de pagos será: n anualidades de valor α cada una al final de cada año de duración del empréstito, y un pago único, inmediato, equivalente a N_1Ci.

TERCER GRUPO

Las obligaciones de este grupo se amortizan por un efectivo creciente, ya que no se le abonan intereses a aquéllas.

Como comprendido en este grupo, estudiaremos el caso en que el valor de amortización de las obligaciones coincide con su valor acumulado a interés compuesto.

La ecuación en el año *k* será, teniendo en cuenta que en la (5) $i = 0$ y que las obligaciones ese año se amortizarán por $C(1+i)^k$,

$$\alpha = (N_k - N_{k+1})\, C\,(1+i)^k$$

que da lugar a la sucesión financiera

$$N_{k+1} = N_k - \frac{\alpha}{C}(1+i)^{-k};$$

luego, para $A_k = 1$ y $B_k = -\frac{\alpha}{C}(1+i)^{-k}$; resulta:

$$N_k = \sum_k^n \frac{\alpha}{C}(1+i)^{-k} = \frac{\alpha}{C}\left[(1+i)^{-k} + (1+i)^{-(k+1)} + \ldots + (1+i)^{-n}\right] =$$

$$= \frac{\alpha}{C}\,\frac{(1+i)^{-k} - (1+i)^{-n-1}}{1-(1+i)^{-1}} = \frac{\alpha}{C}\,\frac{(1+i)^{-k+1} - (1+i)^{-n}}{i} =$$

$$= \frac{\alpha}{C}(1+i)^{-k+1}\,\frac{1-(1+i)^{-(n-k+1)}}{i} = \frac{\alpha}{C}(1+i)^{-k+1}\, a_{\overline{n-k+1|}}$$

que para el valor $k = 1$,

$$N_1 = \frac{\alpha}{C}\, a_{\overline{n|}}$$

y, despejando la anualidad, queda

$$\alpha = \frac{N_1 C}{a_{\overline{n|}}},$$

fórmula que coincide con la (7)

Las expresiones relativas a los préstamos pueden ser obtenidas en forma análoga a lo tratado. Es decir, estableciendo la ecuación para un año *k* cualquiera, y ver la sucesión financiera a que da lugar.

Lo expuesto creemos es suficiente para dar una idea de las ventajas que se obtienen aplicando la sucesión financiera al desarrollo matemático de los préstamos y empréstitos, tanto por la unidad que imprime a su estudio, como por la sencillez con que son deducidas las fórmulas fundamentales.

La segunda parte de este trabajo será destinada a estudiar la aplicación de la mencionada sucesión al cálculo de las primas puras y problemas derivados de las distintas modalidades de seguros, cuestión más compleja por intervenir el concepto de probabilidad; pero, que con ayuda de las (1, 2 y 4), puede ser desarrollado de manera similar a como han sido tratados los temas anteriores.