Cálculo abreviado de las reservas globales

Por D. José María de Echeverría y Muñoz-Reja,
Actuario de «La Unión y El Fénix Español».

Las obligaciones contraídas por el asegurador en virtud de un contrato de Seguros que garantice el pago de un capital determinado en caso de fallecimiento del asegurado, pueden descomponerse en dos partes:

1. El pago de dicho capital en caso de muerte durante el tiempo transcurrido desde la fecha de *suscripción* de la *póliza* hasta el momento K fijado arbitrariamente; y

2. La obligación de satisfacer en años posteriores al K-ésimo las demás condiciones estipuladas en la póliza, si el fallecimiento no ha tenido lugar hasta entonces, obligación equivalente a la constitución de la correspondiente Reserva Matemática.

En esta descomposición de compromisos se funda el método retrospectivo para el cálculo de la Reserva.

La primera parte es el precio del riesgo corrido, que se valora por la prima de un Seguro Temporal de K años de duración y la diferencia entre este valor y la suma o sumas percibidas por el asegurador hasta aquel *momento*, aplicada en prima única de Capital Diferido de plazo K, nos cifra la Reserva Matemática del contrato.

El método retrospectivo es, por lo tanto, de muy cómoda aplicación, y su ventaja principal consiste en poder calcular las Reservas de muy diversas combinaciones de Seguros con sólo disponer de baremos del Seguro Temporal y del Capital Diferido.

Permite, pues, este método la agrupación de pólizas de diferentes categorías, siempre que las tarifas estén establecidas en base a una misma Tabla de Mortalidad y afectadas del mismo tipo de interés.

Sin embargo, la agrupación de estas pólizas no podrá llevarse a efecto más que cuando coincidan dos elementos comunes, la edad en el momento del inventario y el tiempo transcurrido desde el efecto del contrato hasta aquella época, es decir, no se podrán agrupar más que aquellas cabezas que hayan ingresado en riesgo a la misma edad.

Fácilmente se comprende la importancia que tendría el poder llegar a prescindir de uno de estos elementos para realizar la agrupación, pues si se llevase a cabo ésta teniendo solamente en cuenta la edad en el momento del inventario, los grupos se limitarían a la duración de la vida humana, y si, por el contrario, la agrupación se efectuase en virtud de los años de vigencia de las pólizas, el número de grupos sería como máximo igual al plazo mayor contratado.

Así, pues, si prescindimos del factor edad y reunimos en un solo grupo todas aquellas pólizas que en el momento de un inventario lleven igual número de años en vigor, quedará el problema reducido a la determinación, dentro de cada uno de esos grupos, de una edad media tal que permita tratarle como si fuera un solo contrato con un capital igual a la suma de capitales y una prima igual a la suma de todas ellas, para llegar de esta forma a análogos resultados a los que se obtuviesen sumando las Reservas individuales de cada contrato.

La prima del Seguro Temporal, la anualidad y el Capital Diferido que se precisan para el cálculo de la Reserva por el método retrospectivo, están relacionadas linealmente por la expresión:

$$|_k A_x = 1 - \delta\, a_{x\,\overline{k|}} - {}_k E_x$$

luego la edad media de cada grupo que satisfaga al Seguro Temporal, ha de satisfacer igualmente al Capital Diferido y a la anualidad correspondiente.

Ahora bien, la prima del Seguro Temporal puede desarrollarse en serie convergente de potencias crecientes de C^x, siendo C la constante de Makehan, y expresarse, por lo tanto, como sigue

$$|_k A_x = B_0 + B_1\, c^x + \cdots + B_h\, c^{hx} + \cdots$$

donde los coeficientes B_0, B_1, ... B_h, ... no dependen más que de la duración K.

Fundamenta Lidstone su célebre método de los números "Z" en la legitimidad de la hipótesis de no cometer un error apreciable al suprimir en la expresión anterior los términos en C^x de un grado superior al primero, lo que nos permite aceptar que:

$$l_x A_x = B_0 + B_1 c^x$$

y llegar a determinar como él la expresión

$$c^y = \frac{\Sigma C c^x}{\Sigma C}$$

que simplificaremos, teniendo en cuenta que

$$\mu_x = \alpha + \beta c^x$$

de donde

$$c^x = \frac{\mu_x - \alpha}{\beta}$$

y, por lo tanto,

$$c^y = \frac{\Sigma C [\mu_x - \alpha]}{\beta \Sigma C} = \frac{\Sigma C \mu_x}{\beta \Sigma C} - \frac{\alpha}{\beta}$$

pero como

$$c^y = \frac{\mu_y - \alpha}{\beta}$$

tendremos

$$\frac{\mu_y - \alpha}{\beta} = \frac{\Sigma C \mu_x}{\beta \Sigma C} - \frac{\alpha}{\beta}$$

y, en definitiva,

$$\mu_y = \frac{\Sigma C \mu_x}{\Sigma C}$$

Por operar Lidstone con el método prospectivo, precisa utilizar como número auxiliar a

$$Z = C c^{x+n}$$

con lo que sitúa la edad en el momento final del contrato y quizá por ello represente su número auxiliar con la última letra del alfabeto.

En el método que nos ocupa ocurre lo contrario, pues fundado en el método retrospectivo, la edad media inicial es la que se necesita determinar, y por ello designamos por la primera letra, A, el número auxiliar, que vendrá representado por:

$$A = C \mu_x$$

Llegado el momento de un inventario se agruparán todas aquellas pólizas que lleven igual número de años en vigor, aunque sean de distintas categorías de Seguros, y la suma de los correspondientes números "A" la dividiremos por la suma de capitales del grupo. El cociente hallado representará el tanto instantáneo de mortalidad correspondiente a la edad media del grupo tratado.

Conocida ésta, la operación de cálculo se reduce a la aplicación numérica de la fórmula del método retrospectivo.

Si las Reservas fuesen calculadas a prima de inventario, como

$$\Sigma P' C = \Sigma P C + g \Sigma C$$

siendo g los gastos de administración, la fórmula a emplear sería

$$ {}_kV'_x = \frac{[\Sigma P' C - g \Sigma c] a_{x\overline{k|}} - |_k A_x \Sigma C}{{}_kE_x} = $$

$$ = \frac{\Sigma P' C a_{x\overline{k|}} - [|_k A_x + g a_{x\overline{k|}} \Sigma C}{{}_kE_x} $$

es decir, que habría que tomar la prima de inventario del Seguro Temporal y solamente podríamos agrupar entonces aquellas combinaciones en que el valor de g coincidiese, lo que actualmente no supone problema en España, debido a la unificación de recargos establecida en el pasado año.

En aquellas combinaciones en que el plazo del pago de primas sea inferior al del Seguro, se aplicará igualmente la fórmula anterior, pues como en ella puede apreciarse, del total de los gastos recargados en la prima P' no se restan más que la parte de ellos exactamente consumida en los K primeros años de vigencia del contrato, quedando reservado el importe de los gastos correspondiente al período de liberación de la póliza cobrados anticipadamente.

La aplicación de este método entraña, pues, dos ventajas principales:

1. Obtener una gran agrupación de pólizas, que permite incluso el poder calcular las Reservas separadamente por categorías de contratos y verificar posteriormente una comprobación de resultados mediante una agrupación total, y

2. No precisar de dos números auxiliares, como ocurre en el método de Lidstone, cuando no coincide la temporalidad del Seguro con la del pago de primas, ya que no necesitamos determinar dos edades medias distintas para valorar las obligaciones futuras del asegurador y del asegurado, como en aquél ocurre, sino que, por efectuarse el cálculo por el método retrospectivo, no tendremos en cuenta las circunstancias futuras, sino las pasadas, y, por lo tanto, el mismo plazo K nos permite valorar los compromisos de ambas partes partiendo de una misma edad media inicial.

Un ejemplo nos pondrá de manifiesto el grado de aproximación que alcanza este método.

Consideremos las tres siguientes categorías de contratos de Seguro, calculadas en las Tablas de Mortalidad A. F. al 3,50 % y en base a un recargo de administración del 4 ‰ del capital.

a) Seguro Mixto sobre una cabeza, donde

$$P' = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} + 0.004$$

b) Seguro Mixto sobre una cabeza a primas limitadas, donde

$$P' = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n} + 0.004\,(N_x - N_{x+n})}{N_x - N_{x+n \cdot 5}}$$

c) Seguro Mixto sobre una cabeza con bonificación del 50 % del capital al vencimiento, donde

$$P' = \frac{M_x - M_{x+n} + 1{,}50\,D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} + 0.004$$

Supondremos que, en el momento de un Inventario, el grupo integrado por pólizas que lleven exactamente diez años en vigor está constituído en cada una de las tres combinaciones antes indicadas, de la siguiente forma:

a) SEGURO MIXTO:

Edad inicial	Plazo Seguro	Plazo primas	Capital	Primas invent.	Reserva Matemática	"A"
25	30	30	600000	16891	131943	3750
25	25	25	750000	25245	217251	4688
25	20	20	900000	38256	361477	5625
25	15	15	400000	23177	238857	2500
30	30	30	250000	7331	55841	1730
30	25	25	100000	3461	29069	692
30	20	20	300000	12979	120329	2076
30	15	15	400000	23417	238384	2768
35	30	30	800000	25900	182980	6376
35	25	25	200000	7214	58491	1594
35	20	20	700000	31105	280229	5579
35	15	15	800000	47578	475333	6376
40	30	30	600000	20328	142086	5754
40	25	25	700000	26832	206635	6713
40	20	20	200000	9251	79837	1918
40	15	15	100000	6092	59151	959
45	30	30	400000	15428	97277	4844
45	25	25	300000	12545	89879	3633
45	20	20	500000	24546	198767	6055
45	15	15	900000	56859	528466	10899
50	30	30	600000	26578	159887	9612
50	25	25	300000	14149	92014	4806
50	20	20	400000	21397	158224	6408
50	15	15	300000	20009	174255	4806
			11500000	515568	4376662	110161

$$\mu_y = \frac{110161}{11500000} = 0{,}0095792$$

Edad media = 39,97 años.

b) Seguro Mixto a primas limitadas:

Edad inicial	Plazo Seguro	Plazo primas	Capital	Primas invent.	Reserva Matemática	"A"
25	30	25	400000	12336	101593	2500
25	25	20	500000	19185	174618	3125
25	20	15	250000	12900	129213	1563
30	30	25	250000	7990	64261	1730
30	25	20	300000	11784	105089	2076
30	20	15	800000	41870	413456	5536
35	30	25	700000	23574	183125	5579
35	25	20	600000	24408	211139	4782
35	20	15	100000	5347	51682	797
40	30	25	200000	7256	53669	1918
40	25	20	400000	17132	141684	3836
40	20	15	300000	16567	155028	2877
45	30	25	500000	20153	138471	6055
45	25	20	600000	27671	214494	7266
45	20	15	300000	17377	154942	3633
50	30	25	100000	4606	29117	1602
50	25	20	400000	20443	144849	6408
50	20	15	200000	12413	103167	3204
			6900000	303012	2569597	64487

$$\mu_y = \frac{64487}{6900000} = 0{,}0093459$$

Edad media = 39,36 años.

c) SEGURO MIXTO CON BONIFICACIÓN DEL 50 %

Edad inicial	Plazo Seguro	Plazo primas	Capital	Primas invent.	Reserva Matemática	"A"
25	30	30	400000	14218	125425	2500
25	25	25	600000	26540	254127	3750
25	20	20	200000	11570	119186	1250
25	15	15	100000	8129	89279	625
30	30	30	600000	21691	186257	4152
30	25	25	300000	13408	125801	2076
30	20	20	400000	23281	236645	2768
30	15	15	500000	40778	444720	3460
35	30	30	300000	11145	91924	2391
35	25	25	600000	27266	247990	4782
35	20	20	200000	11753	117019	1594
35	15	15	400000	32790	353716	3188
40	30	30	500000	19418	150896	4795
40	25	25	300000	14007	121442	2877
40	20	20	200000	11937	115062	1918
40	15	15	200000	16530	175300	1918
45	30	30	300000	12663	87664	3633
45	25	25	100000	4880	39365	1211
45	20	20	300000	18367	168264	3633
45	15	15	200000	16751	172857	2422
50	30	30	100000	4653	29786	1602
50	25	25	200000	10484	76097	3204
50	20	20	100000	6383	54068	1602
50	15	15	200000	17118	169208	3204
			7300000	395760	3752098	64555

$$\mu_y = \frac{64555}{7300000} = 0{,}008842465$$

Edad media = 37,94 años.

Con objeto de obtener la mayor aproximación posible, se ha empleado para el cálculo la fórmula:

$$ {}_{K}V'_{y} = \frac{[\Sigma P' C - 0.004 \Sigma C] (N_y - N_{y+k}) - \Sigma C (M_y - M_{y+k})}{D_{y+k}} $$

determinándose en cada combinación dos reservas consecutivas y, por interpolación lineal entre ellas, la correspondiente a la edad media obtenida.

Los resultados son los siguientes:

Categoría	Reservas aproximadas	Reservas exactas	Diferencia
a)	4377136	4376662	474
b)	2568650	2569597	— 947
c)	3753790	3752098	1692

Efectuando ahora la agrupación total de contratos, tendremos los siguientes datos:

Categoría	Capitales	Primas de inventario	Reservas exactas	"A"
a)	11500000	515568	4376662	110161
b)	6900000	303012	2569597	64487
c)	7300000	395760	3752098	64555
	25700000	1214340	10698357	239203

Luego como

$$ \mu_y = \frac{239203}{25700000} = 0{,}0093075 $$

la edad media del grupo total será de 39,26 años, y operando en base de dicha edad, las Reservas quedan cifradas en 10.703.753 pesetas, con un error por exceso de 5.396 pesetas, que representa un 0,5 $^{0}/_{00}$ sobre las calculadas contrato por contrato.