Sobre las bases lógicas del método estadístico (1)

Por **Corrado Gini,**

Profesor de la Facultad de Ciencias Estadísticas, Biológicas y Actuariales de la Universidad de Roma.

Ante el panorama de un país en cuyos misterios se va a introducir, el explorador, antes de comenzar, se detiene al objeto de orientarse y de concretar su plan de acción. Después de largo camino, siente la necesidad de mirar hacia atrás para comprobar la parte de su programa ya desarrollada, y para recoger, de las experiencias sufridas, las enseñanzas necesarias para lo que le queda de viaje.

Del mismo modo, cuando yo salí de las aulas del Estudio de Bolonia y decidí aplicar mi actividad científica especialmente a la Estadística, sentí la necesidad de formarme una idea personal de su objeto y de sus relaciones con el Cálculo de probabilidades, al mismo tiempo que de los conceptos que sirven de base para éste, del alcance de las aplicaciones que hace la Estadística y del significado de las regularidades que se establecen por medio de aquél (2).

Después de treinta años laboriosos—dedicados, por un lado, a des-

---

(1) Esta conferencia fué leída en español por su autor, y la traducción a este idioma, así como la corrección del estilo y pruebas ha sido hecha por el miembro correspondiente de este INSTITUTO, D. Giorgio Stecher, Actuario en España de la «Cía. Adriática de Seguros».

(2) Fruto de las reflexiones de entonces han sido las siguientes publicaciones:

1. «Sul concetto di probabilitá», en «Atti del II Congresso della Societá Filosofica Italiana» (Parma, 25-27 septiembre 1907), Formiggini, Bologna-Modena, 1908.

2. «Che cos'é la probabilitá?», en «Rivista di Scienza» (Scientia), vol. III, año II, 1908.

3. «Contributo alle applicazioni statistiche del calcolo delle probabilitá», en «Giornale degli Economisti», diciembre 1907.

4. «Il sesso dal punto di vista statistico», Roma, «Biblioteca del Metron»,

arrollar orgánicamente la teoría estadística, haciéndola, si no me engaño, con nuevos procedimientos o con el perfeccionamiento de los ya utilizados, más adecuada a los fines de las investigaciones concretas, y por otro lado, a comprobar, en las aplicaciones dentro de los más variados campos científicos, su conveniencia y utilidad, obteniendo de éstas algunas veces el impulso hacia nuevos desarrollos—he sentido la necesidad de volver sobre el examen crítico de las bases lógicas y del alcance gnoseológico del método estadístico.

El período de aislamiento determinado por la guerra fué particularmente propicio a este repliegue de la mente sobre sí misma.

Ahora, cuando se restablecen los contactos con el mundo científico internacional, puede ser oportuno resumir, para uso de los colegas de lengua española, los resultados de este segundo examen (1) antes de

---

1908, particularmente los capítulos: II, «L'ufficio della statistica nellá questione dei sessi»; IV, «Misura della regolaritá dell'eccedenza dei maschi nelle nascité umane»; V, «Portata della regolaritá dell'eccedenza dei maschi nelle nascite umane».

5. «Intorno al metodo dei residui dello Stuart Mill e alle sue applicazioni alle scienze sociali», en «Studi economico-giuridici della R. Universitá di Cagliari», año II, 1910.

6. «Considerazioni sulla probabilitá a posteriori e applicazioni al rapporto dei sessi nelle nascite umane», en «Studi economico-giuridici della R. Universitá di Cagliari», año III, 1911.

Otros estudios quedaron, en su totalidad o en parte, inéditos, particularmente un amplio manuscrito sobre «La teoría lógica e psicologica delle probabilitá», de donde he reproducido integralmente la discusión «Sul concetto di caso», contenida en la comunicación homónima, presentada en julio 1941 a la «Societá Italiana di Statistica» (ver n. 7 de la bibliografía citada a la nota siguiente).

Dichas publicaciones serán recordadas en el curso de este artículo cada vez que se refieran a la materia tratada.

(1) He aquí los títulos de los escritos en que tal examen ha sido efectuado. En el texto del artículo su cita será sustituída por el respectivo número de orden.

1. «I pericoli della Statistica», discurso inaugural de los trabajos de la «Societá Italiana di Statistica» (Pisa, 9 octubre 1939), publicado en los «Atti della prima riunione scientifica» de dicha Sociedad y reproducido en «Rivista di Politica Economica», noviembre 1939.

2. «Sur la théorie de la dispersion et sur la verification des schemas théoriques», relación presentada en la «Reunion d'études sur l'application du Calcul des probabilités» (Ginebra, 12-15 julio 1939) y publicado en «Metron», vol. XIV, n. I, 1940.

3. «Il principio della compensazione degli errori accidentali», comunicación presentada al «II Congresso de la Unione matematica italiana» (Bologna, 4-6 abril 1940), publicada en las Actas de dicho Congreso y reproducida en el «Sup-

entregarse al ataque de otros problemas importantes que aún quedan por resolver, para la completa sistematización, desde el punto de vista lógico, de la metodología estadística.

Necesidad de la técnica estadística.—Conviene, ante todo, llamar la atención sobre cuáles son las circunstancias que hacen sea necesario recurrir a la técnica estadística.

A menudo nos interesamos por el estudio cuantitativo de los fenómenos, cuyas características no se pueden percibir con una sola observación ni tampoco con un número de observaciones tan limitado que las facultades mentales de un hombre normal lleguen a sintetizar el

---

plemento statistico ai Nuovi Problemi di Politica, Storia ed Economia», año IV, facicula I, 1940.

4. «Di alcune questioni fondamentali per la metodologia statistica», comunicación presentada en la II Reunión científica de la «Societá Italiana di Statistica» (Roma, 26-28 junio 1940) y publicada en las Actas de dicha Reunión.

5. «Alle basi del metodo statistico. Il principio della compensazione degli errori accidentali e la legge dei grandi numeri», en «Metron», vol. XIV, n. 2-3-4, 31 diciembre 1941.

6. «Degli indici sintetici di correlazione e delle loro relazioni con «l'indice interno di correlazione «intraclass correlation coefficent e con gli indici di correlazioni tra serie di gruppi», en «Metron», vol. XIV, n. 2-3-4, 31 diciembre 1941.

7. «Sul concetto di caso», comunicación presentada en la «III Riunione scientifica della Societá Italiana di Statistica» (Roma, junio-julio 1941) y publicada en los «Atti» de dicha Reunión.

8. «A proposito dei «testi di significativitá», comunicación presentada en la «IV Riunione scientifica della Societá Italiana di Statistica» (enero 1943) y publicada en los «Atti» de dicha Reunión.

9. «I testi di significativitá», discurso inaugural de la «VII Riunione scientifica della Societá Italiana di Statistica» (Roma, 27 junio 1943), publicado en los «Atti» de dicha Reunión.

10. «Osservazioni alla comunicazione del Dott. Geppert sul valore dei cosidetti «testi di significativitá», comunicación presentada en la «VII Riunione della Societá Italiana di Statistica» (Roma, 27-30 junio 1943), publicada en los «Atti» de dicha Reunión.

11. «Sulla probabilitá inversa nel caso di grandezze a distribuzione constante», comunicación presentada en la «VII Riunione scientifica Italiana di Statistica» (Roma, 27-30 junio 1943) y publicada en los «Atti» de dicha Reunión.

12. (En colaboración con el Dott. Gregorio Livada) «Sulla probabilitá inversa nel caso di grandezze intensive ed in particolare sulla sua applicazione a collaudi per masse a mezzo di campioni», comunicación presentada en la «VII Riunione scientifica Italiana di Statistica» (Roma, 27-30 junio 1943) y publicada en los «Atti» de dicha Reunión.

resultado. La inteligencia humana dispone, efectivamente, de un limitado poder de síntesis numérica: se trata de una limitación general de nuestras facultades mentales, que corre pareja a las limitaciones particulares de nuestros sentidos. Y así como se busca el remedio en algunas ocasiones contra estas limitaciones particulares, recurriendo a técnicas especiales, utilizando microscopios, anteojos, megáfonos, amplificadores, cuernos acústicos, etc., del mismo modo se remedia esa limitación general recurriendo a la técnica estadística (1). La Estadística aparece, pues, como una «Técnica apropiada para el estudio cuantitativo de los fenómenos que precisan colecciones o masas de observaciones», y por esto precisamente se les llama «fenómenos colectivos» o «de masa» (2).

Las razones por las cuales, para los fenómenos de masa, dicha técnica resulta necesaria, pueden ser varias:

A) Porque, sin la técnica estadística, resulta imposible darse cuenta de los fenómenos en cuestión, como resulta en la proporción de los sexos en los nacimientos.

B) Porque, sin la técnica estadística, resulta posible obtener de los fenómenos de masa una impresión cualitativa, pero no una medida cuantitativa, como sucede en el caso de la frecuencia de las estaturas bajas, medias, altas.

---

13. «Di alcune questioni attinenti al concetto di causalitá e a concetti connessi ed affini», en vía de publicarse.

14. «Rilleggendo Bernoulli», en vía de publicarse en italiano, publicada en alemán en la «Zeitschrift für Zweischerische Valkswistschaft und Statistik», Oktober, 1946.

15. «Del passaggio dall'indice di variabilitá di un campioni all'indice di variabilitá della massa», en vía de publicarse.

(1) Véase, para esta concepción de la Estadística, «Il sesso, etc.», ob. cit., páginas 12-13, y, para una más amplia información, las varias ediciones de nuestro Curso de Estadística, desarrollado sucesivamente en las RR. Universitá de Cagliari (1909-1913), Padova (1914-1925), Roma (desde 1926 en adelante), que han sido publicadas en litografía a cargo de alumnos y colegas. Por último, ha sido traducido al español por el Dott. J. Vandellos (Curso de Estadística. Editorial Labor, Barcelona, primera edición, 1935); una segunda edición, revisada y aumentada, esta en curso.

(2) Generalmente el fenómeno colectivo o de masa se define como un fenómeno que resulta de una masa o de una colección de fenómenos individuales, más bien que como un fenómeno que, para ser estudiado estadísticamente, necesita de una masa o colección de observaciones. Pero esta definición no es exacta; la frecuencia de los varones entre los nacidos y la frecuencia de los varones entre los

C) Porque, sin la técnica estadística, resulta también posible obtener una medida cuantitativa de los fenómenos, pero ésta resulta aproximada por los errores que la afectan (1).

Esta última necesidad puede verificarse en varias eventualidades:

a) Cuando la intensidad del fenómeno que se quiere estudiar es constante, pero en las observaciones que nosotros hacemos intervienen influencias perturbadoras de manera que los resultados están afectados por errores, que se pueden llamar «errores de dimensión».

b) Cuando la intensidad del fenómeno que se quiere estudiar se obtiene siempre exactamente, pero aquélla en realidad varía de una observación a otra, de modo que para conocer el fenómeno, convendría extender las observaciones a todos los casos en los cuales se verifica; donde esto no se haga, las varias intensidades que asume el fenómeno se presentarán (o, por lo menos, se podrán presentar) en las observaciones hechas, con frecuencias diferentes que las de la totalidad de los casos y los resultados estarán afectados por errores que se pueden llamar «errores de frecuencia».

c) Cuando la intensidad del fenómeno que se quiere estudiar varía de una observación a otra, y las observaciones se extienden a la totalidad de los casos del fenómeno, pero en ellas intervienen influencias perturbadoras, de manera que los resultados se ven afectados por «errores de dimensión».

d) Cuando la intensidad del fenómeno que se quiere estudiar varía de una observación a otra, las observaciones no se extienden a la totalidad de los casos del fenómeno, y, además, por añadidura, intervienen en ellas circunstancias perturbadoras, de forma que los resultados se ven afectados al mismo tiempo por «errores de frecuencia» y por «errores de dimensión».

La eliminación de dichos errores de frecuencia y de dimensión constituye por lo tanto uno de los objetos fundamentales de la Estadística. Ahora bien, en cuanto tales errores dependan de circunstancias per-

---

esposos, resultan ambos, por ejemplo, de una masa de fenómenos individuales (los nacidos tomados aisladamente o los esposos tomados aisladamente); pero la primera necesita para poder ser determinada de una masa de observaciones y, por lo tanto, entra en el campo de la Estadística y debe decirse precisamente un fenómeno colectivo; con la segunda no sucede lo mismo, pues se sabe «à priori» que será igual al 50 por 100.

(1) Este reparto de los objetos de la Estadística ha sido planteado y desarrollado en las publicaciones citadas en la nota 3.

turbadoras accidentales, se considera que su eliminación habrá de obtenerse precisamente recurriendo a las observaciones en masa, ya que la trascendencia de los errores accidentales sobre la intensidad media del fenómeno se reduciría con el crecimiento del número de observaciones hasta ser despreciable, cuando éste fuera suficientemente grande. Esta tesis puede exponerse, por lo que se refiere a los errores de frecuencia con la «ley de los grandes números», y por lo que se refiere a los errores de dimensión, con «el principio de la compensación de los errores accidentales».

En làs Memorias 3 y 4, y más detalladamente en la Memoria 5 (y, para un punto relacionado con ésta, en la 6), ha sido reanudado en examen riguroso, el fundamento de estas dos proposiciones, llegando a las conclusiones que aquí se resumen y en algún sitio se completan.

Ley de los grandes números.—Esta fué expuesta, como es sabido, por Poisson, que generalizó el teorema de Bernouilli, extendiéndolo, al caso en que la probabilidad de realizarse el hecho sea diferente en las pruebas sucesivas, y considerando también, además de las magnitudes intensivas, y, por lo tanto, de las frecuencias relativas, también las magnitudes extensivas, y, por lo tanto, las medias de los valores absolutos. A la generalización habría podido convenir la denominación de «teorema de Poisson», o también, para conservar en lo posible sus palabras, «teorema de los grandes números», pero Poisson, con un salto lógico, incolmable, la llamó «ley de los grandes números», declarando, además, que constituye un hecho general e incontestable, que es el resultado de experiencias que no pueden desmentirse. Era un salto lógico, porque un teorema representa relaciones necesarias entre entes abstractos, mientras que la ley representa relaciones constantes entre fenómenos concretos. Es un salto incolmable, y en vano— a mi juicio—Castelnuovo ha pretendido llenarle recurriendo a una «ley empírica del azar», en virtud de la cual la experiencia vendría a demostrar que, al crecer las pruebas, la frecuencia de un fenómeno converge oscilando alrededor de un límite constituído por su probabilidad matemática. En vano, porque para establecer dicha ley sería necesario hacer crecer las pruebas hasta el infinito, lo cual es por sí mismo humanamente imposible, y, además, hacerlas crecer hasta el infinito no una sola vez, sino cuantas fueran necesarias para establecer una ley.

Es cierto que en algunos juegos de azar y en otros experimentos dispuestos de manera que se desarrollan en condiciones uniformes dentro de lo posible—de manera que se pueda suponer que quedan constantes las probabilidades de los varios resultados—las oscilaciones de las frecuencias (relativas) de dichos resultados van reduciéndose al crecer las observaciones, lo que puede llevar a la conclusión—con una de esas generalizaciones inevitables en las disciplinas inductivas—de que exista una frecuencia límite; pero queda de todas maneras por demostrar que dicha frecuencia límite corresponda exactamente a la probabilidad matemática. Ahora no se vé cómo esto se podría hacer sino admitiendo que los casos *equiposibles (o sea equiprobables)*, en los que se basa la probabilidad matemática, presenten al límite la misma frecuencia, admitiendo, por lo tanto, como demostrada aquella correspondencia entre probabilidad y frecuencia límite que, sin embargo, habría de ser demostrada.

Frente a la dificultad—más o menos claramente percibida—de pasar de los teoremas de Bernouilli y de Poisson a la ley de los grandes números, se ha tratado por varios autores de sondear el camino inverso, definiendo a la probabilidad—en lugar de la relación de los casos favorables a todos los casos posibles—como el límite a que tiende la frecuencia al crecer el número de las observaciones, y, deduciendo de tal definición—que lleva implícita la ley de los grandes números—los teoremas de Bernouilli y de Poisson. Este enfoque tuvo su planteamiento científico y desarrollo orgánico por obra de R. von Mises. Yo no veo, sin embargo, cómo se pueda en el mismo evitar la siguiente contradicción: si la probabilidad es el límite, en el sentido del análisis, de la frecuencia, debe ser también posible fijar un número «n» de observaciones, lo suficientemente grande para que, por encima del mismo, la divergencia entre frecuencia y probabilidad permanezca seguramente inferior a una cantidad ε, pequeña a discreción, mientras que según los teoremas de Bernouilli y de Poisson, por muy grande que sea «n», existe siempre una probabilidad, aunque muy pequeña, en que se verifique una divergencia superior a ε (1).

(1) V. Mises contesta a una objeción que puede parecer, pero no lo es, análoga, y de todos modos ha sido formulada de forma que la contradicción no parece evidente.

No existe contradicción—dice—entre la afirmación de que, en un grupo de n observaciones, el número m de las veces en que se realiza un fenómeno que tenga una probabilidad p $(O < p < 1)$ puede tomar todos los valores desde O a n—como resulta en los teoremas de Bernouilli y de Poisson—y la afirmación de que la relación al número total de observaciones N del número de veces N_1 en las que el

Por otra parte, ¿cómo explicar la indiscutible confianza puesta en la ley de los grandes números o en una ley empírica del azar, confianza ésta que es el fundamento de tantas investigaciones científicas? Ello se explica—yo creo—con el hecho de que, a la palabra «probabilidad», que se utiliza en la formulación de tales leyes, se atribuye en la práctica un significado diferente del abstracto de «probabilidad matemática», que es el fundamento del Cálculo de probabilidades.

Realmente, en cuanto en cualquier investigación estadística se quieren precisar ideas, definiendo el fenómeno que nos interesa, ya sea con fines prácticos o de estudio, se aprecia en seguida de que el número de casos que entran en el mismo puede ser más o menos grande, y a veces es grandísimo, pero siempre es finito; esto es cierto, ya sea cuando se trata de los resultados de un juego de azar o de los censados, de los nacidos o de los fallecidos de una población, o de las estrellas del firmamento, o de las moléculas de un gas. La idea del infinito—por lo menos en este caso, si bien no en todos los casos—surge indebidamente de la noción—en realidad muy distinta—de lo indefinido, Ahora bien, respecto a un número finito de casos del fenómeno, la probabilidad de una característica suya, como más adelante veremos, está representada por su frecuencia en el total de los casos.

La ley de los grandes números viene a afirmar que, cuando el número de las observaciones del fenómeno crece acercándose cada vez más a su totalidad, la frecuencia de una característica del fenómeno en el número de casos observados se aproxima oscilando a su frecuencia en el total de los casos que en el fenómeno entran, hasta el punto

---

fenómeno se ha verificado tienda a la probabilidad p al crecer indefinidamente N_1 y N. Las dos frecuencias m/n y N_1/N son—a su manera de ver—de modalidad diferente: entre las dos afirmaciones enunciadas más arriba no existe ninguna conexión visible. (Cofr. R. V. Mises, «Probability, Statistics and Truth», traducción de J. Neyman, D. Sholl y E. Rabinowitsch, Hodge, Edimburgo, 1939, páginas 127-128.)

Se replica: para ver la conexión y la contradicción entre las dos afirmaciones en cuestión, hágase $n = N$, dado que nada impide que así se haga. Si, realmente, se puede hacer crecer a voluntad N, también se puede hacer crecer de la misma manera a n. Ahora bien, por muy grande que sea el número N de las observaciones realizadas, éstas se pueden considerar como un grupo del número infinito de observaciones posibles. Aquí está el punto esencial: de manera que m/n y N_1/N no son frecuencias de género distinto y, para $n = N$, se convierten en la misma frecuencia. Ahora bien, por grande que sea $n = N$, los teoremas de Bernouilli y de coincidir con aquélla cuando todos los casos han sido observados (1). Dicho supuesto—comprobable empíricamente y demostrable teóricamente—enuncia precisamente lo que es necesario y suficiente para dar fundamento a las observaciones en masa.

Concepto de probabilidad.—Para mayor claridad de cuanto queda expuesto más arriba, conviene detenerse en el concepto de probabilidad que acabamos de enunciar oportunamente (2).

¿Qué le pedimos nosotros a la probabilidad?

La misma palabra «probabilidad» sugiere que nosotros le pedimos el criterio más plausible para dirigir nuestra conducta. Esto puede suceder ante un hecho aislado, del que quedan inciertas sus características, o ante una categoría de hechos que en los casos aislados pueden presentar una u otra característica, sin que, por la definición de la categoría de que se trate, se pueda prever cuál de ellas se presentará. En el primer caso—hechos aislados—la determinación de la probabilidad, cuando puede hacerse, es inevitablemente subjetiva, en el sentido que más adelante explicaremos; en la segunda—categorías de hechos, esto es, fenómenos colectivos—aquélla puede ser objetiva. Y si nosotros

---

de Poisson conservan su validez y todos los valores de m/n desde O hasta 1 son posibles, mientras que si fuera cierto que N_1/N tiende al límite p (en el sentido que a dicha expresión se da en analítica) debería existir un número $N = n$ suficientemente grande para que queden excluídas las frecuencias que se alejan de p más de una cantidad determinada.

(1) En la Memoria 5 se pueden encontrar las fórmulas que dan la máxima desviación posible, la desviación cuadrática media y el límite, dentro del cual queda contenida la desviación con una probabilidad dada, cuando, de los N casos que entran en el fenómeno, han sido observados n.

(2) Este concepto ha sido expuesto desde el año 1908. Cfr. el artículo «Che cosa è la probabilità»? en la «Rivista di Scienza (Scientia)», vol. III, año II (1908), n. VI, y la comunicación «Sul concetto di probabilità», en «Questioni filosofiche», «Atti del II Congresso della Società Filosofica Italiana» (Parma, 25-27 septiembre de 1907), Formiggini Bologna-Modena, 1908. Si bien yo, hasta el año 1941, no había tenido ocasión de volver sobre ello; sin embargo, no quedó sin continuación. Cofr., en particular, L. G. Du Pasquier, «Sur les nouveaux fondements philosophiques et mathematiques du calcul des probabilités», en «Atti del Congresso Internazionale dei Matematici», Bologna, 3-10 septiembre 1928, tomo VI, pp. 5 y sig.; L. Galvani, «Punti di contatto e scambi di concetti tra la Statistica e la Matematica», en el «Giornalle dell'Istituto Italiano degli Attuari», año IV, n. 3, julio 1943, pp. 413-414, y «Introduzione matematica allo studio del metodo statistico», Giuffré, Milán, 1.ª edición, 1934, pp. 167-168; 2.ª edición, 1945, pp. 261-263; G. Pietra, «Metodologia Statistica», en «Società Italiana per il Progresso delle

utilizamos como criterio más plausible aquel que hace nula la suma de los errores y mínima la suma de sus cuadrados, nos induce a la conclusión de que la probabilidad de una característica será dada exactamente por su frecuencia media en los hechos que entran en la categoría que tomamos en consideración. Por otra parte, nosotros podemos determinar exactamente tal probabilidad sólo por hechos que pertenezcan enteramente al pasado, mientras que en la práctica interesa su determinación especialmente para hechos que pertenecen en parte o en su totalidad al futuro, o también que son exclusivamente hipotéticos. En la práctica nos vemos, por lo tanto, obligados a recurrir a *procedimientos indirectos* que se pueden reducir a dos: aquel que se basa en la frecuencia de la característica que ha sido observada en el pasado, *obteniendo una* «determinación aproximada «a posteriori» de la probabilidad», y aquel basado en el conocimiento del mecanismo del fenómeno, obteniendo *una* «*determinación aproximada* «a priori» de la probabilidad».

La determinación *aproximada* «a *posteriori*» lleva a la definición de la llamada «probabilidad empírica», según la cual, la probabilidad de la característica de un fenómeno, está dada por la relación del número de veces que la característica se ha presentado en un número elevado de observaciones respecto al número de veces en *que habría* podido presentarse; la determinación aproximada «a priori» nos lleva a la definición de la llamada «probabilidad matemática», según la cual, la probabilidad de la característica de un fenómeno viene dada por la relación entre los casos favorables al presentarse la característica, y los casos posibles, siendo todos los casos igualmente posibles.

La aproximación de la determinación empírica de la probabilidad depende de la hipótesis de que la frecuencia de la característica en los casos observados del fenómeno sea igual a su frecuencia en los casos que aún quedan por observar. Es una hipótesis que se puede hacer razonadamente, por medio de aproximación, cuando no existan circunstancias que conviertan en sistemáticamente diferentes a las dos frecuencias. Por otra parte, también en el caso de que exista una dife-

---

Scienze»; «Un secolo di progresso scientifico italiano, 1839-1939», vol. I, p. 305; «La Statistica Metodologica e la Scienza Italiana», en el «*Supplemento Statistico* ai Nuovi Problemi», año V, serie II, nn. 2-3-4. p. 137, y «Sur la statistique metodologique *italienne*», *en la* «*Revue de l'Inst. Int.* de Stat.», 8 année, livraison 3/4, 1940, p. 187.

rencia matemática, no se excluye el que se pueda valorar aproximadamente, estableciendo un coeficiente de corrección que, aplicado a la frecuencia de la característica en los casos observados, permita remontarse a su frecuencia en los casos futuros o en la totalidad de los casos en que el fenómeno se presenta. Cuanto más crece el número de las observaciones acercándose a la totalidad de los casos que entran en el fenómeno, tanto más se acerca la probabilidad empírica, determinada en base a las observaciones hechas, a la probabilidad exacta de la característica del fenómeno.

La aproximación de la determinación de la probabilidad matemática depende de la imposibilidad de juzgar «a priori» cuando dos o más casos tienen rigurosamente la misma probabilidad. La inevitable aproximación con que se juzga la equiposibilidad de los casos se refleja en la aproximación de la probabilidad matemática. En rigor, se podría deducir la equiposibilidad de los varios casos posibles sólo «a posteriori», por su frecuencia en el total de observaciones que entran en el fenómeno considerado, en cuyo caso la probabilidad matemática de una característica coincidiría con su frecuencia en dicho total.

Tanto la determinación de la probabilidad empírica como la de la probabilidad matemática, no son siempre posibles. La determinación de la probabilidad empírica supone un fenómeno que aun cuando no se haya agotado (en cuyo caso se podría proceder a la determinación directa de la probabilidad exacta) sin embargo se haya verificado muchas veces. La determinación de la probabilidad matemática supone que, en el mecanismo en que se verifica el fenómeno, se puedan distinguir varias hipótesis, algunas favorables y otras contrarias a la presentación de una determinada característica suya, y todas ellas igualmente posibles, lo cual no sucede en la práctica más que para un reducido número de fenómenos preparados artificialmente por nosotros, como en el caso de los juegos de azar.

Tanto la determinación de la probabilidad empírica como la de la probabilidad matemática, han sido identificadas—a mi juicio equivocadamente—con la definición exacta de la probabilidad. Este ha sido, particularmente, el caso para la determinación de la probabilidad matemática.

Desconocida para los primeros autores modernos que se ocuparon del concepto de probabilidad, los cuales deducían la probabilidad de la experiencia (1), ésta fué introducida por Jaime Bernouilli (2), y se convirtió en la base de la estructuración sucesiva del Cálculo de probabilidades. Su adopción general fué facilitada por el hecho de que la atención de los estudiosos del Cálculo de probabilidades se dirigió especialmente a los juegos de azar, para los que se presta particularmente la determinación de la probabilidad matemática. Por otra parte, ésta tiene la ventaja de su generalidad para fines prácticos, por lo que puede aplicarse a un número indefinido de experiencias relativas a un determinado objeto, instrumento o fenómeno. Así se habla, por ejemplo, de la probabilidad matemática de un determinado resultado en el juego de los dados, en la «roulette», en el «baccarat», independientemente de los dados, la «roulette», o, respectivamente, los mazos de cartas utilizados, de quiénes sean los jugadores, y así sucesivamente. Esta generalidad, sin embargo, se obtiene sólo a cambio de una cierta aproximación que constituye precisamente la aproximación de la determinación de la probabilidad a través de la probabilidad matemática. No es absolutamente cierto que la probabilidad de un resultado sea siempre la misma para todas las «roulettes». Cada «roulette» tiene en realidad probabilidades propias para los diferentes números, y de esta circunstancia se aprovecharon despreocupadamente unos jugadores de Montecarlo, los cuales, habiendo estudiado las tendencias de las diferentes «roulettes», y jugando, no ya en base a la probabilidad matemática, sino en base a la probabilidad empírica, alcanzaron importantes ganancias, hasta el momento en que la Administración del Casino sospechó a causa de las pérdidas sufridas, se dió cuenta del truco y lo desmanteló cambiando los platillos de las «roulettes» cada noche. Por esta razón, también en los juegos de cartas en que se ventilan grandes sumas de dinero se cambia de mazo a cada juego. No se excluye que investigaciones detenidas en grandes masas de observaciones puedan atestiguar que los resultados de los juegos de dados o de la «roulette» pueden ser sensiblemente diferentes, no sólo según las «roulettes» y los dados usados, sino también por la persona que hace girar el platillo o la que lanza los dados.

---

(1) Véase para la concepción de la probabilidad según la «Logica de Port Royal» (1662) y según Lock («An Essay concerning Human Understanding», 1690); J. M. Keynes, «A Treatise on Probability», Macmillan, London, 1921, p 80.

(2) En realidad, sin embargo, Bernouilli no consideraba la relación de los casos favorables a un fenómeno a todos los casos favorables o contrarios, como una definición de la probabifidad, sino sólo como una medida suya. La probabili-

Por lo tanto, no se trata de que la frecuencia constituya una aproximación de la probabilidad exacta proporcionada por la probabilidad matemática; es, por el contrario, la probabilidad matemática la que constituye una determinación aproximada «a priori» de la probabilidad verdadera representada por su frecuencia. Sin embargo, será necesario extenderse sobre la palabra «frecuencia»: se ha de entender la «frecuencia de una característica del fenómeno en todos los casos que entran en el concepto del fenómeno mismo»; la podríamos llamar su «frecuencia totalitaria» (1); una frecuencia parcial, aun cuando haya sido establecida sobre muchísimos casos, no puede conducir más que a una determinación aproximada «a posteriori» de la probabilidad.

Varios matemáticos modernos apoyan la definición de probabilidad en la frecuencia, pero en lugar de hacerlo en la frecuencia totalitaria lo hacen en la frecuencia límite. Vamos a ver si, y cómo, se puede justificar este concepto.

Existen—se puede observar—algunos fenómenos que se desarrollan en las mismas condiciones en varias circunstancias de lugar y de tiempo, de manera que no se vislumbra una razón para admitir que tengan una probabilidad diferente; así, por ejemplo, las relaciones de los sexos en los nacimientos del año actual y los del año sucesivo, el juego de la «roulette» esta noche y mañana por la noche. Por otra parte, aun cuando los varios fenómenos se definan exactamente precisando el lugar y el tiempo en que se desarrollan, queda generalmente indefinido—cuando no se refieren íntegramente al pasado—el número de casos en que aquéllos se verifican. ¿No representa, por lo tanto, una ventaja—puede decirse—un concepto de probabilidad, como es el deducido de la frecuencia límite, que no está vinculado ni a un número finito de casos ni a circunstancias particulares de lugar y de tiempo?

Es sencillo contestar que el hecho de que nosotros no podamos captar la diferencia entre la probabilidad de algunos caracteres en va-

---

dad de un fenómeno la define como un grado o fracción de la certidumbre de su existencia. Este grado o fracción se deduce del número y de la fuerza probatoria de los argumentos que demuestran la existencia del fenómeno y esta fuerza probatoria se deduce, a su vez, de la relación de los casos favorables al fenómeno a todos los casos favorables o contrarios. Véase, a este propósito, la Memoria 14. En Bernouilli aparece claramente formulada la concepción subjetiva de la probabilidad en la que habremos de ocuparnos más adelante.

(1) Esta expresión no deberá confundirse con la de «frecuencia total» utilizada por Borel, y basándose en su ejemplo, por otros estudiosos franceses del

rios fenómenos distintos según el *tiempo* y el lugar (por ejemplo, la probabilidad de determinados *resultados en* las jugadas de la «roulette» realizadas hoy o mañana), no quiere decir que no puedan existir diferencias *entre* dichas probabilidades por circunstancias que a nosotros escapan, *como* efectivamente aparecerá cuando el fenómeno se haya agotado en todos sus casos y pertenezca al pasado; y el hecho de que el número de casos que en cada fenómeno entran, sea indefinido, en el sentido de «imposible a determinar a priori», no debe confundirse con la afirmación de que el mismo no sea finito, sino «infinito».

Desde el punto de vista teórico, deducir la probabilidad de la frecuencia límite no presenta, por lo tanto, ninguna ventaja y se podría justificar solamente bajo el aspecto práctico, al objeto de *proporcionar* un criterio uniforme, en los casos en que prácticamente *no podemos* distinguir las diversas probabilidades del fenómeno. Pero, en la práctica, la frecuencia límite no se puede determinar y *convendría*, en su lugar, recurrir a una determinación *aproximada* «a priori» por medio de la probabilidad mátemática o a *una* determinación aproximada «a posteriori» por medio de *la* probabilidad empírica. Ahora bien, estos procedimientos, *como dijimos* más arriba, son justificables como medidas aproximadas de la frecuencia totalitaria, sin que sea necesario tener que recurrir *al* concepto de frecuencia límite.

Se podría también objetar que, si es cierto que al regular nuestra conducta nos encontramos prácticamente ante fenómenos circunscritos por tiempo y lugar o que incluyen un número finito de casos, nada nos impide que agrupemos dichos fenómenos en otros más amplios respecto a los cuales podemos determinar también la probabilidad. Por ejemplo, podemos proponernos determinar la probabilidad de obtener determinados resultados en las jugadas de la «roulette», no ya esta noche ni mañana por la noche y en una determinada *mesa*, sino en todas las mesas en que se juega, se haya jugado o se vaya a jugar, y de manera parecida podemos proponernos establecer la relación de los sexos en los nacimientos, no ya de *una* población dada y en uno u

---

Cálculo de probabilidades *para designar* la «frecuencia límite», sobre la que hemos de *tratar a* continuación. Véase, sobre el particular, por ejemplo, M. Frechet en «Exposé et discussion de quelques recherches récentes sus les fondements du Calcul des probabilités», Hermann, Paris, 1938, p. 25. Yo no veo, *para decir verdad*, la ventaja de sustituír una *expresión tan clara y* definitivamente adoptada en el lenguaje científico, *como* es la de «frecuencia límite», con otra que, empleada *en este* sentido, puede prestarse a equívoco, como es la de «frecuencia total».

otro año, sino de todas las poblaciones humanas, y en todas las épocas.

Ahora bien, esto nos llevaría a un número grandísimo de observaciones, si bien siempre finito, y, por otra parte, ampliando el número de casos más allá de aquellos que directamente nos interesan, la probabilidad iría perdiendo su función de proporcionar el criterio más plausible para regular nuestra conducta.

Tampoco serviría insistir diciendo que se puede pensar en el juego de la «roulette» o en otro hecho parecido considerado en abstracto, suponiendo las diversas hipótesis que sus resultados admiten, independientemente de pruebas efectivas u observaciones y con referencia a la posibilidad genérica de que éstas se repitan cuantas veces se quiera, ya que, en tal caso, la determinación de la probabilidad perdería el carácter «a posteriori» de la frecuencia límite para volver a la probabilidad matemática, determinada «a priori» sobre la base de los casos teóricamente posibles.

Por otra parte, conviene tener presente, como se hizo notar más arriba al hablar de la ley de los grandes números, que la definición de probabilidad como frecuencia límite lleva a una contracción que no parece se pueda evitar, con los teoremas de Bernouilli o de Poisson, de forma que tal definición parece que tendrá que ser descartada definitivamente.

Antes de dejar este argumento, diré dos palabras sobre la llamada «teoría subjetiva de la probabilidad», que muchos—a mi juicio, erróneamente—juzgan incompatible con el concepto de probabilidad deducido de la frecuencia y puesto como base de la teoría citada, por el contrario «objetiva».

Algunos autores hay que estiman que cuando la probabilidad se aplica, no a una categoría de casos (por ejemplo, probabilidad de muerte de los habitantes de un país que tengan una cierta edad durante un intervalo dado de tiempo; probabilidad de naufragio, durante un determinado viaje, de los buques asegurados en una determinada Compañía), sino de un caso aislado (por ejemplo, sexo de un individuo que va a nacer; modalidad de un acontecimiento histórico), ésta no puede basarse en la frecuencia—que en un caso aislado es necesariamente $= 0$ ó $= 1$—, sino que representa únicamente el grado subjetivo de confianza de que, en el caso aislado, se presenta una modalidad en lugar de la otra. Y ya que, por lo general (algunos llegan a decir, exagerando manifiestamente, «siempre»), la probabilidad se aplica a casos aislados, ésta habría de ser la definición a adoptar para el término de probabilidad.

Ahora bien, cuando se profundiza en el argumento se da uno cuenta de que también, cuando la probabilidad se «aplica» a un caso *aislado*, ésta ha sido siempre «establecida» por *una categoría* de casos, en los cuales el caso aislado queda comprendido. De los antecedentes del *fenómeno* (o también en la hipótesis de un fenómeno que no pertenezca al futuro, de las circunstancias que le son concomitantes o subsiguientes) que tiene relación con la modalidad que nos interesa, nosotros no sabemos lo suficiente para decidir si ésta se presenta o no *en el* caso que nos ocupa y tenemos, por lo tanto, que *admitir* que dichos antecedentes puedan verificarse, ya sea en casos en que la modalidad se presente, *o en* casos en que así no suceda, cuyos casos—reales o hipotéticos—constituyen, en efecto, la categoría para la que es válida la probabilidad que se establece. El grado de confianza en que la modalidad se presente en el caso aislado que se está considerando, *no es más* que la frecuencia con la que, a base de *consideraciones* «a priori» o «a posteriori», *nosotros estimamos* que la modalidad se presente en la categoría estimada en que se incluye el caso aislado en cuestión. Dicha correspondencia es a que hace razonable una apuesta sobre el hecho de realizarse o no la modalidad en el caso aislado. No se puede, sin embargo, representar siempre numéricamente dicha *frecuencia*; muy a menudo podemos solamente decir que la *misma* es elevada o, al contrario, baja *o de media* magnitud. Y, por otra parte, la delimitación de la categoría, en la cual se puede incluir el caso aislado considerado, no constituye un dato del problema, sino que depende de los conocimientos más o menos amplios y de las investigaciones más o menos profundas de quien quiere establecer la probabilidad, o también de la mayor o menor importancia que el mismo *atribuye* a una u otra de las diversas circunstancias que pueden influir en el hecho de presentarse la modalidad; y en este sentido la determinación de la probabilidad en los casos aislados puede llamarse, con derecho, subjetiva (1).

Concepto de azar.—A la contraposición entre «teoría objetiva» y «teoría subjetiva» de la probabilidad, tenemos una contraposición, bajo

(1) La tesis de que cada probabilidad sea determinada en relación con una categoría de casos y que la definición de la probabilidad respecto a tal categoría sea objetiva, mientras es subjetiva la de limitación de categoría, ha sido sostenida últimamente por FRECHET, modificando la opinión expuesta precedentemente por el mismo (cfr. «Exposé» arriba citado, p. 50). Nosotros la habíamos *expuesto desde* el año 1908 (cfr. el citado artículo «*Che cosa è probabilitá*»?, pp. 7-11 del extracto). No sabemos si FRECHET estuviera al corriente de la tesis nuestra sostenida tantos años antes.

un punto de vista semejante, entre «azar en sentido objetivo» y «azar en sentido subjetivo». Las dos contraposiciones son análogas en cuanto que, del mismo modo que la concepción subjetiva de la probabilidad, también la concepción subjetiva del azar se refiere a los hechos aislados, mientras que la concepción objetiva del azar, al igual que la concepción objetiva de probabilidad, se refiere a categorías de hechos.

Llamamos «casual» a un hecho aislado cuando no lo podemos prever. Admitido que todos los hechos tengan una causa, se puede deducir que sólo nuestra ignorancia nos permite hablar del azar. Para un ser que todo lo supiera y, como tal, conociera todas las causas de los fenómenos, no habría nada imprevisible y el azar no existiría. Este es el «concepto subjetivo del azar», que ha sido enunciado por los clásicos del Cálculo de probabilidades, pero que ya tenía precedentes que se remontan, por lo menos, a Spinoza (1677).

A este concepto contrapuso Cournot el «concepto objetivo del azar» que, sin embargo, se encuentra ya enunciado en un tratado de Jean de Laplacette (1714), y, según expone el mismo Cournot, había sido ya percibido, desde la Edad Media, por Santo Tomás y, aun antes, por Boecio. Definida una categoría de fenómenos B, cuando, por verificarse B, no podemos prever que se realice un fenómeno A, diremos que el hecho de que se verifique A es casual respecto a B. Cournot dice que esto tiene lugar cuantas veces A y B se deriven de causas independientes. Pero ello no tiene lugar sólo en dicha hipótesis: si entre A y B existe una relación negativa, a mayor abundamiento el hecho de que A se verifique aparece casual respecto al hecho de que se verifique B. Respecto a B, puede, por lo tanto, definirse como casual un fenómeno A que, al verificarse, no lo hace solidariamente con B. Ello resulta así, no ya por la ignorancia de esta o aquella persona, sino para todas ellas, independientemente de sus conocimientos. En este sentido es objetivo.

Resulta así por el hecho de que se supone que no se conocen, entre las circunstancias que preceden o acompañan al fenómeno A, nada más que aquellas que definen al fenómeno B con el cual se ha relacionado A. A es casual respecto al conocimiento de B. Puede haber quien conozca o no conozca las causas por las que un individuo se ha vuelto delincuente: sin embargo, todos habrán de reconocer que el hecho de que el delincuente haya nacido en un día de la semana en lugar de otro, es puramente casual. El hecho casual en sentido objetivo puede, por lo tanto, considerarse como tal «en sentido relativo», en tanto que lo es respecto algunos de nuestros conocimientos, mientras que un hecho casual en sentido subjetivo puede, en contraposición, considerarse *como* tal «en sentido absoluto», ya que lo es con relación a todos nuestros conocimientos.

Se puede hacer la observación de que, incluso tomado *en sentido objetivo*, el concepto de azar implica una ignorancia, la ignorancia de todas las circunstancias precedentes y concomitantes de A, que no son las que definen el fenómeno B, con el que se pone *en relación al* A; pero se trata de una ignorancia hipotética, no efectiva, artificial, no real.

La ignorancia efectiva de las causas, de las que se deriva el azar en sentido subjetivo, puede ser evitable o *inevitable*. Esta *segunda* posibilidad se presenta en los juegos de azar, planteados de una manera tal que los resultados resultan imprevisibles. Para ellos puede hablarse de «azar en sentido casi objetivo».

¿Existe verdaderamente una contraposición entre los conceptos de azar y de causa? Hoy en día se habla de ello más que nunca, especialmente por los físicos, que oponen las leyes deterministas a las leyes estadísticas. ¿Qué se puede decir a este respecto?

El efecto sigue siempre a la causa, de manera que, entre aquél y ésta existe una relación de *frecuencia* $= 1$; pero, a menudo, en lugar de una causa única, el efecto es determinado por un complejo de causas que se pueden escindir en varias «concausas». Entre una concausa y el efecto existe entonces una relación de probabilidad, que se traduce en una frecuencia inferior a 1, pero superior a $^1/_2$. Una frecuencia $= {^1/_2}$ es índice de independencia entre el hecho y las circunstancias con las que se le *relaciona, y, por último*, una frecuencia inferior a $^1/_2$ revela, entre dichas circunstancias, la presencia de algún factor que actúa en sentido contrario, que podríamos llamar «contracausa». Un hecho nos aparece *casual* cuando las circunstancias con las que se le relaciona no contienen ni su causa ni una de sus concausas.

La contraposición entre causa y azar es, por lo tanto, infundada, si *con ella* se ha de suponer que un fenómeno, que se atribuye al azar, se substrae al principio de la causalidad; pero es exacta si se supone que el fenómeno se llama casual respecto a una circunstancia o a un complejo de circunstancias que no representa ni contiene la causa o una concausa del fenómeno (1).

---

(1) Sobre el concepto de azar, véanse las Memorias 5 y 7; sobre el principio de la causalidad en relación con el *llamado principio* de indeterminación, véase la Memoria 13.

Principio de la compensación de los errores accidentales.—Hay quien define como accidentales aquellos errores cuyo valor probable es igual a cero; esto es, los errores que tienden a compensarse; así planteado, el principio de la compensación de los errores accidentales se reduce a una pura tautología (1). Ahora bien, se puede dar otra definición de los errores accidentales, entendiéndose por tales los «errores que son efecto de circunstancias perturbadoras que tienden a compensarse». La cuestión de que los errores accidentales tiendan a compensarse al crecer el número de las observaciones, adquiere entonces un sentido, que es el siguiente: admitido que un fenómeno se observe en los casos en los cuales éste se verifica bajo la influencia de una determinada circunstancia (o de un determinado grupo de circunstancias), de las que nos interesa estudiar los efectos, y, al mismo tiempo, bajo la influencia de otras circunstancias perturbadoras que juzgamos independientes de las primeras, y, por lo tanto, respecto a las mismas, accidentales, de manera que a paridad con ellas, tiendan a compensarse, ¿podemos admitir también que los efectos de estas circunstancias accidentales tiendan a compensarse al crecer el número de las observaciones? Este es, precisamente, el sentido que atribuyen a la cuestión los estadísticos desde los tiempos de Quetelet (2).

---

(1) En un recientísimo artículo, «Sulla teoria della media tipica» («Analisi», año I, 2.° trimestre 1945), BOLDRINI—con referencia evidente a nuestra Memoria 5—afirma que la «clásica definición de los errores accidentales», según la cual se llaman accidentales los errores de observación cuya suma tiende a O al crecer el número de observaciones, «ha sido recientemente declarada tautológica» y se detiene para valorar tal acusación de tautología (cfr. pp. 12-13). Ahora bien, a mí nunca se me ocurrió afirmar que dicha definición—de la que he de ocuparme más adelante (cfr nota 16)—sea tautológica. He afirmado, por el contrario, que el principio de la compensación de los errores accidentales se convierte en tautológico cuando se tome esta definición de los errores accidentales. He aquí mis palabras textuales: «Admitida esta definición de errores accidentales es evidentemente cierto; pero se reduce a una tautología, esto es, a la afirmación de que, al crecer el número de observaciones, tienden a compensarse aquellos errores cuya influencia, por definición, tiende a anularse al crecer el número de las observaciones» (pp. 11-12). Me parece que tal afirmación es, por una parte, incontrovertible, y por otra, tan clara, que no habría tenido que dar lugar a un equívoco.

El citado artículo de BOLDRINI constituye la primera parte de una Memoria del mismo título, presentada en la Academia Pontificia de las Ciencias en la Reunión del 5 de abril de 1945, y de la que recibo un extracto del autor precisamente mientras estoy corrigiendo estas pruebas de imprenta.

(2) Quetelet distingue las causas de los fenómenos estadísticos en constan-

El principio de la compensación de los errores accidentales, se reduce así a admitir que—siendo $= 0$ el valor probable de las desviaciones que la intensidad de determinadas circunstancias presentan respecto a su media aritmética, mientras permanece constante otra circunstancia (o grupo de circunstancias)—sea también $= 0$ el valor probable de los efectos de tales desviaciones.

Definido de tal manera el contenido del principio de la compensación de los errores accidentales, resulta evidente que dicho principio no es necesariamente cierto. En efecto, es obvio que, si el valor probable de una variable—representada en nuestro caso por el conjunto de *las circunstancias* perturbadoras—es $= 0$, no sucede lo mismo necesariamente con el valor probable de una función suya cualquiera. Para que el valor de una función suya sea $= 0$, es *necesario* que esta función responda también a determinadas condiciones.

Varias condiciones, suficientes para este objeto, fueron examinadas:

---

tes, variables y accidentales, y asignaba a la Estadística la labor de recoger los efectos de las causas sistemáticas (*constantes o variables*) *eliminando* aquéllos de las causas accidentales (ver «Lettres sur la Théorie des Probabilités appliquée aux sciences morales et *politiques*», Bruxelles, Hayez 1846). Define las causas accidentales: «Les causes accidentalles ne se manifestent que fortuitement et agissent indifferemment *dans l'un ou l'autre sens*» (p. 159). No define, sin embargo, los errores accidentales, pero está claro que los considera como efectos de las causas *accidentales*.

Más preciso en este asunto había sido Gauss, el cual en el primer párrafo de la célebre «Theoria Combinationis Observationum Erroribus Minimis Obnoxiae» (1821), se expresaba de la siguiente manera: «Quaedam errorum caussae ita sunt comparatae, ut ipsarum effectus in qualibet observatione a circunstantiis variabilibus pendeat, inter quas et ipsam, observationem nullus nexus essentialis concipitur: errores hinc oriundi irregulares sed fortuiti vocantur quatenus que illae circunstamtiae calculo subiici nequeunt idem etiam de erroribus ipsis valet» («Carl Friedrich Gauss Werke», Vierter Band. Zweiter Abdruck, Cottingen, 1880).

Está claro que tanto Gauss como Quetelet consideran los errores accidentales como efectos de las causas que obran independientemente de la magnitud constante que se quiere observar; este concepto corresponde bien a la definición de los errores accidentales que ya hemos dado y que no contiene de por sí como cosa esencial la condición de la compensación de los errores. Boldrini afirma, a su vez, que, según el concepto clásico de los errores accidentales, «se conocen por ese nombre los numerosos errores de origen desconocido, normalmente pequeños, que se cometen inevitablemente, midiendo cuidadosamente, repetidamente, una misma magnitud Estadística; la suma de los cuales tiende *hacia cero, al ir aumentando* el número de las observaciones» (véase «Sobre la Teoría de la media típica», p. 9 del Art. en «Analisis», p. 2 del extracto de los Actos de *la Academia* Pontificia *a)* Relación lineal entre intensidad de las circunstancias perturbadoras e intensidad de los errores que resultan de ellas.

b) Simetría, ya sea en la curva de frecuencia de la intensidad de las circunstancias perturbadoras, ya sea en las relaciones entre la intensidad de éstas y la intensidad de los errores que de aquí resultan.

c) Concordancia entre la media y la mediana, tanto de las circunstancias perturbadoras como de los errores resultantes, y relación monótona entre intensidad de las circunstancias perturbadoras e intensidad de los errores consiguientes, de forma que, a circunstancias perturbadoras más fuertes correspondan errores más intensos.

d) Coincidencia entre media aritmética y moda de los valores observados y relación inversa entre frecuencia e intensidad de los errores (1).

Por el detallado examen que se realizó, ha resultado que no siempre se verifica una de las condiciones citadas. Se llega a la conclusión

---

de las Ciencias), definición que yo hubiera sugerido rehusar por presentar una mía propia. Sería mi gran deseo que Boldrini reprodujera los pasos de los clásicos—ya que entre éstos no están ni Gauss ni Quetelet—que dan la definición de los errores accidentales que él les atribuye.

(1) Siguiendo a Quetelet, muchos estadísticos consideraban ser condición suficiente para la aplicación del principio de los errores accidentales el hecho que la curva de las magnitudes observadas siga la distribución normal o de Gauss, de manera que la media aritmética de una distribución normal daría el valor del fenómeno que se habría de verificar por el efecto de la causa o de las causas sistemáticas ajenas a la intervención de las circunstancias perturbadoras.

La afirmación—como yo hacía notar en la Memoria 5—no está, sin embargo, demostrada y, por el contrario, todo hace suponer que sea infundada, por lo menos en lo que se refiere a las distribuciones aproximadamente normales que se encuentran en la práctica. Yo mismo he aportado en dicha Memoria un ejemplo de distribución, que en la práctica sería juzgado ciertamente normal de magnitudes resultantes de la combinación de una magnitud constante y de las perturbaciones ocasionadas por dos circunstancias, las cuales asumen una intensidad que se compensa, pero que tienen efectos que no se compensan. La media de las magnitudes observadas por tal distribución resulta = 17'42, que es sensiblemente distinta de la intensidad = 16'58 de la magnitud constante.

Boldrini, en su Memoria «Sobre la Teoría de la media típica», presentada en la Academia Pontificia de las Ciencias, insiste todavía—aunque introduciendo limitaciones que, a su manera de ver, constituirían puntos de contacto con mis objeciones—sobre la teoría Queteliana, pero, según mi punto de vista, con absoluto fracaso. En realidad, Boldrini no excluye o, mejor dicho, no toma en consideración la posibilidad, que yo también había ejemplificado, que circunstancias perturbadoras, con efecto no constante y con intensidades que se compensan, de que la aplicación del principio de la compensación de los efectos de las circunstancias perturbadoras accidentales, que sirve de base para tantos métodos estadísticos, no es legítima por sí misma. Para que resulte legítima, convendrá examinar, de caso en caso, si existe alguna razón para suponer que una de las condiciones más arriba examinadas se verifique, si no exactamente, por lo menos con la aproximación exigida por la naturaleza de las investigaciones. Verdad es que, aún cuando ninguna de las condiciones citadas se verifique, no se podrá por ello excluir que la aplicación del principio en cuestión pueda llevar a conclusiones exactas, pudiéndose verificar alguna hipótesis más complicada que haga legítima la aplicación de dicho principio, pero hasta que no quede demostrado que dicha hipótesis más complicada responde a la realidad, no se podrá justificar la aplicación del principio.

Principio del predominio de las causas constantes.—Es, por lo tanto, conveniente preguntarse si no es posible indicar un principio de aplicación más general que el principio de la compensación de los errores accidentales en el que se pueda basar la eliminación de los errores de dimensión. Se puede observar, a este respecto, que cuando los errores son tanto más raros cuanto más intensos, la frecuencia máxima de los valores observados corresponderá a un error $= 0$, esto es, la moda de los valores observados corresponderá al valor verdadero de la magnitud. La validez de esta condición es más general que aquella de la condición *d)* arriba citada, ya que no exige la hipótesis de la correspondencia entre la moda y la media aritmética de los valores observados. A esto añádase que no implica tampoco la hipótesis de que las causas perturbadoras tengan carácter accidental. Esta exposición puede llamarse «principio del predominio de las causas constantes». El mismo conduce al uso de la moda, en lugar del de la media aritmética, como valor más plausible de la verdadera intensidad del fenómeno, prescindiendo de la influencia de los factores de perturbación (1).

---

puedan hacer divergir de la magnitud constante la media de las magnitudes observadas, sin que la distribución de éstas se aleje esencialmente del tipo normal. Cuando no se toman en consideración las hipótesis contrarias a su propia tesis se puede pretender demostrar todo lo que se quiera.

(1) En la Memoria 5 se observa que «el principio de la compensación de los errores accidentales tiene la ventaja de que la media aritmética, a la cual conduce aquél, resiente menos, en comparación con la moda, a la que el principio del predominio de las causas constantes conduce, la influencia del número limitado de las observaciones, y aun cuando el error probable no sea despreciable, éste se puede

Analisis de la variación.—Además de la influencia de los errores accidentales sobre la intensidad media, debe tenerse en cuenta su influencia sobre la variabilidad.

Se sabe que el valor probable de la variación global de una serie de cantidades afectadas por errores accidentales es igual a la variación de las cantidades exactas (variación sistemática), más el valor probable de la variación a que, por efecto de los errores accidentales, están sujetas las cantidades observadas aisladamente (variación accidental).

Este resultado, extendido a las medias subjetivas, nos lleva a considerar la variación de un fenómeno que está bajo la influencia de dos grupos de circunstancias A y B, como la suma de la variación V_{ma}, que presentan los valores medios del fenómeno al variar una circunstancia (o grupo de circunstancias) A, y de la variación ${}_{a}v_{b}$ que, siendo A constante, presentan los valores aislados del fenómeno al variar B (procedimiento α); o también como la suma de la variación V_{mb}, que presentan los valores medios del fenómeno al variar la circunstancia (o el grupo de circunstancias) B, y de la variación ${}_{b}V_{a}$, que, siendo constante B, presentan los valores aislados del fenómeno al variar de A (procedimiento β). Ambos procedimientos se utilizan para separar la variación global del fenómeno en las dos partes debidas, respectivamente, a los dos grupos de circunstancias A y B.

Ahora bien, una objeción que no parece rebatible es la de que los resultados de los dos procedimientos simétricos (α y β) no coinciden, excepto en casos particulares, y a menudo incluso, difieren considerablemente. Por ejemplo, aplicado al análisis de la variación del número de los ocelos de la «Drosophila», según la constitución genética y según la temperatura, deducido por los experimentos de Krafka, un procedimiento conduce a atribuir, a dos grupos de circunstancias, la importancia respectiva del 55 y del 45 por 100, y el otro, en cambio, del 68 y del 32 por 100.

Parece más recomendable atenerse a un tercer procedimiento, igualando la variación ${}_{b}V_{a}$, que el fenómeno presenta según el grupo de

---

determinar de todas formas, mientras que todavía no se sabe determinar el error probable de la moda», p. 207.

Para la realidad el error probable de la moda había sido determinado—como he constatado después—por KAZATURO YASUKAWA en el laboratorio del profesor K. Pearson («On teh probable Error of the Mode of Skew Frequency Distributions», en «Biometrika», vol. XVIII, partes III-IV, 1926), suponiendo una distribución hipergeométrica. Partiendo, como es sabido, de esta distribución, Pearson circunstancias A, cuando se mantiene constante el grupo de circunstancias B, o bien la variación ${}_aV_b$, que *presenta* el *fenómeno* según el grupo de circunstancias B cuando se ha mantenido constante el grupo de *circunstancias* A a la suma de las dos variaciones ${}_bV_a$ y ${}_aV_b$. Esto corresponde al procedimiento seguido en el método experimental, en el que se aisla la influencia de cada factor, observando cómo se desarrollan las cosas cuando los demás factores permanecen constantes. En nuestro ejemplo, la influencia de la constitución genética y de la temperatura sobre la variación del número de ocelos de la «Drosophila», resultan, respectivamente, con dicho procedimiento, del 60 y del 40 por 100 (1).

Las relaciones de causalidad y de probabilidad no son inversibles.— Admitido el hecho de que al aumentar el número de observaciones se pueden prácticamente eliminar los errores accidentales de frecuencia y se pueden compensar, cuando se verifiquen determinadas condiciones, los errores accidentales de dimensión, se precisa buscar las relaciones entre el número de observaciones y la intensidad de tales errores—otro problema fundamental de la metodología estadística al objeto de juzgar la veracidad de los datos disponibles.

Cuando la probabilidad de un fenómeno correspondiente a su frecuencia en el total de las observaciones sea conocida, es fácil, por el teorema de Bernouilli, establecer la probabilidad de un error accidental de frecuencia, y, cuando sean conocidos el valor verdadero y la desviación media cuadrática de una magnitud absoluta, resulta fácil, de la curva de los errores accidentales, deducir la probabilidad de un error de dimensión.

Sucede, sin embargo, que, generalmente, ni la probabilidad, en el primer caso, ni el valor verdadero y la desviación *media cuadrática* de la magnitud absoluta, en el segundo, nos son conocidos. Se suelen, por lo tanto, sustituir estos *valores con los de la frecuencia y*, respectivamente, con el valor medio de la desviación media cuadrática, deducidos de un gran número de observaciones. Dichas sustituciones—y de manera especial la de la desviación media cuadrática observada, a la desviación media cuadrática teórica—dan lugar a algunas reservas (cfr. Memoria 1); pero la mayor dificultad no depende de esto. Para

ha deducido sus conocidos tipos de curvas. El estudio del problema ha sido reanudado recientemente en el Instituto de Estadística de la R. Universidad de Roma, *ya sea con relación a los varios tipos de curvas* estudiados por Pearson, ya sea partiendo de hipótesis más generales.

(1) Para el análisis de la variación, véanse Memorias 3, 4, 5, 6,

pasar—ya sea sólo aproximadamente—de la magnitud observada al valor probable de la magnitud verdadera, ¿bastan los mismos conocimientos que se necesitan para pasar de la magnitud verdadera al valor probable de la magnitud observada? Este es el punto crucial de la cuestión. Este es el problema alrededor del cual giran todas las discusiones sobre la probabilidad inversa, sobre los textos de significación, sobre los intervalos de confianza (1).

Para resolver la cuestión es conveniente partir de la constatación, no discutida, de la no inversibilidad de las relaciones de causalidad. Después de una lluvia, las calles quedan mojadas; pero el hecho de que una calle se halle mojada no quiere decir que haya llovido; la calle puede haber sido regada, o bien puede haber intervenido una inundación, o también puede haberse esparcido el agua a causa de la rotura de una cañería. Además, si nosotros no tenemos algún conocimiento acerca de la frecuencia de la lluvia, del riego, de las inundaciones y de las roturas de las cañerías, no podremos nunca afirmar con qué probabilidad la mojadura de la calle puede deberse a uno u otro de los antecedentes en cuestión.

Las relaciones de probabilidad difieren de las relaciones de causalidad en cuanto un mismo antecedente o un mismo sistema de antecedentes no determinan siempre el mismo efecto, sino que, a veces, determinan efectos de una forma o de otra, cada uno con una determinada probabilidad; pero también para ellos sucede que un mismo efecto puede derivar de diferentes antecedentes o sistemas de antecedentes y resulta de la misma manera imposible el determinar la probabilidad de que un efecto se derive de un antecedente mejor que de otro, sin tener algún conocimiento sobre la frecuencia con que estos diferentes antecedentes se realizan, conocimiento que, en cambio, no es necesario cuando, conociendo un antecedente, se trata de determinar la probabilidad de sus varios efectos posibles. Por ejemplo, es fácil calcular la probabilidad de que, a uno u otro juego de cartas, un jugador se encuentre con cuatro ases en la mano; pero si ustedes ven, en la mano de un jugador, cuatro ases, no pueden calcular la probabilidad de que se esté jugando un juego en lugar de otro, si no se conocen los juegos que se practican y con qué frecuencia.

Cuando estas obvias consideraciones sean tenidas en cuenta, aparece claro que el intento de invertir los teoremas de la probabilidad—y

(1) A ello ha sido dedicada en gran parte la Memoria 1, lo mismo que las 8, 9, 10, 11, 12 en su totalidad. (Véanse también Memorias 13 y 14.)

en particular de construir textos de significación y de establecer intervalos de confianza—sin tener, o suponer que se tiene, algún conocimiento sobre la frecuencia de las causas posibles de los resultados, es un intento desesperado, en el que sólo por error pueden algunos haber creído alcanzar el fin.

Vamos a ver dónde puede haber surgido el error.

Probabilidad de que un resultado se verifique en una combinación por azar y probabilidad de que un resultado dependa de una combinación por azar.—Consideremos una familia con 10 hijas. La probabilidad de que esta combinación se dé por efecto del azar es bien pequeña: ya que nacen menos hembras que varones, aquélla resulta inferior a $\frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1.014}$. Hay alguien que deduce que existe una probabilidad superior a $\frac{1.013}{1.014}$ de que la pareja procreadora tenga una tendencia a producir hembras.

En una genealogía se comprueba que el abuelo, el padre y cuatro hijos han muerto de una determinada enfermedad. Sea $1/200$ la probabilidad de que una defunción tenga lugar por dicha enfermedad: admitido que se trate de enfermedad no contagiosa, $1/200^6$ será la probabilidad de que tal combinación se verifique por efecto del azar. Muchos llegan a la conclusión de que la enfermedad en cuestión, o por lo menos la predisposición a la misma, tenía seguramente carácter hereditario, habiendo sólo 1 sobre 200^6 posibilidades a favor de la hipótesis contraria. Esta es una argumentación que hallamos a menudo entre los genetistas, para demostrar la importancia de los factores hereditarios en la determinación de ciertos caracteres.

La siguiente argumentación, que se propone demostrar la imposibilidad práctica de que la materia orgánica se derive de la inorgánica, tendría aún mayor alcance. La probabilidad—se dice—de que una de las más sencillas moléculas orgánicas, constituída apenas por 2.000 átomos, haya surgido de una combinación casual de los átomos en cuestión, es inferior a $1/10^{600}$. Existe, por lo tanto, menos de una posibilidad sobre 10^{600} de que la misma no se derive de un esquema preestablecido. En esta argumentación y en otras análogas busca un fundamento objetivo la reacción mística contra el concepto materialista del origen de la vida.

La validez de estas argumentaciones aparece para muchos incontestable; pero su falsedad se percibe claramente cuando se recurra a una argumentación análoga que no convenga a nuestros intereses, porque entonces nuestra sensibilidad lógica se despierta y agudiza.

Supongan ustedes que, jugando en Italia al «lotto», han ganado una cuaterna y se dirigen a cobrar el premio. Se encuentran en la ventanilla a un policía que les detiene y les dice: «La probabilidad de que sus números salieran por el solo efecto del azar es de 1/511,038. Existen, por lo tanto, 511,037 probabilidades contra una de que su ganancia no sea el efecto del azar sino de un fraude. Es suficiente para que yo les considere arrestados.» ¡Estoy seguro de que la argumentación no les resultaría convincente!

Para convencerse de la falsedad de este y de otros razonamientos precedentes, baste considerar que, entre las 1.014 combinaciones de sexos que pueden verificarse en diez nacimientos, entre las 200^6 combinaciones de las causas de muerte que se pueden verificar en la secuela de dos ascendientes y de cuatro hermanos, entre las 10^{600} y más combinaciones de los 2.000 átomos, entre las 511 038 combinaciones de 4 de los cinco números extraídos, una combinación debía, sin embargo, verificarse, y aquella que se ha verificado era tan probable como cualquier otra. El mismo razonamiento se habría podido repetir para cualquier otra combinación que hubiera surgido, concluyendo, con el mismo fundamento, que ella no podía ser casual.

¿Dónde está, por lo tanto, el error? El error está en el hecho de confundir la probabilidad de que un determinado resultado se realice «en» una serie de combinaciones por azar y la probabilidad de que el mismo se realice «por» una combinación al azar, mejor que por una combinación debida a causas sistemáticas. En dicho equívoco, que parece banal, han incurrido e incurren autores, incluso entre los de más reputación. El equívoco es evidente, por ejemplo, en una Memoria de Carlos Pearson, a la que se puede hacer remontar la moderna construcción de los textos de significación, debida a la escuela inglesa. La Memoria se titula: «On the Criterion that a given System of Desviations from the Probable in the Case of a Correlated System of Variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from Random Sampling» («Philosophical Magazine», 1900). «From Random Sampling», dice el título; pero he aquí que en el texto, la expresión se sustituye por la otra «on a randon selection» y es esta la expresión que corresponde a la demostración que efectivamente se da en la Memoria. Pearson se proponía dar, por lo tanto, un criterio para que «en» una elección al azar se obtenga el sistema de desviaciones considerado.

Entre la probabilidad, que indicaremos con ${}_aP_e$, de que un determinado hecho «e» se produzca en una combinación casual y la probabilidad, que indicaremos con ${}_e\pi_a$, de que el mismo hecho, que se ha verificado, se derive de una combinación casual, existe una relación sencillísima que yo he recordado en la Memoria 1 y sobre la que he vuelto en la Memoria 9. Esta es

$$ {}_e\pi_a = \frac{{}_aP_e}{{}_aP_e + \frac{1 - p_a}{p_a}\, {}_sP_e} \qquad [1] $$

donde ${}_aP_e$ y ${}_e\pi_a$ tienen los significados indicados más arriba, p_a indica la probabilidad de que intervengan las causas accidentales, $1—P_a$ la probabilidad complementaria de que no intervengan causas no accidentales, y ${}_sP_e$ la probabilidad de que, habiendo intervenido causas no accidentales, se verifique el hecho tomado en consideración.

Apliquemos esta fórmula al caso de la ganancia de la cuaterna. En tal caso, como hemos visto, es ${}_aP_e = 1/511{,}038$; pero admitido que el juego de la lotería se desarrolle con toda imparcialidad, no intervienen en el mismo nada más que causas accidentales; por lo tanto, $p_a = 1$ y de aquí que $(1 - p_a) : p_a = 0$, de donde ${}_e\pi_a = 1$. Existe, por lo tanto, la certeza (y no ya una probabilidad $= 1/511{,}038$) de que la ganancia provenga de una combinación casual. Naturalmente, la conclusión sería distinta en el caso de que el juego de la lotería no se desarrollara con completa imparcialidad.

Apliquemos una vez más la fórmula a la formación de la molécula orgánica. Aquí es ${}_aP_e < 1/10^{600}$; pero, ¿cuáles son los valores de p_a y de ${}_aP_e$? La persona no creyente rechaza el tomar en consideración otras causas que no sean las naturales, y niega la posibilidad de un fin preestablecido en la naturaleza; para él $p_a = 1$, por lo tanto ${}_e\pi_a = 1$. El creyente, en cambio, está convencido de lo contrario: para el, $1 - p_a = 1$ y también ${}_aP_e$ alcanza un valor elevado, de forma que ${}_e\pi_a$ alcanza un valor evanescente.

Téngase en cuenta que cuando intervienen factores no accidentales, de modo que es $p_a < 1$; $(1 - p_a) : p_a > 0$ el valor de ${}_sP_e$, y, por lo tanto, el de ${}_e\pi_a$ no es igual para todas las combinaciones posibles, para las que en cambio es igual el valor de ${}_aP_e$. Para quien admite que el proceso de la naturaleza se dirija hacia un fin, existe una fuerte probabilidad ${}_sP_e$ (si no se trata incluso de la certeza) de que la combinación preestablecida de los átomos haya dado lugar a la formación de la molécula orgánica, pero no hay la misma probabilidad de que aquélla diera lugar a otra combinación cualquiera. En un país imaginario, en el que la lotería no se desenvuelva honradamente, existirá una probabilidad más o menos fuerte de que una ganancia de importancia se deba a un fraude, mientras que no existe el mismo motivo para suponer que la aparición de ciertos números que a nadie beneficia, sean efecto de un fraude.

Conviene, además, tener presente, a este respecto, que la utilidad de la fórmula [1], más que de permitir la determinación numérica de ${}_e\pi_a$, que en realidad se puede lograr sólo excepcionalmente, es de demostrar la relación entre ${}_aP_e$ y ${}_e\pi_a$, lo que es útil desde un doble punto de vista: desde un punto de vista negativo, en tanto que saca a la luz cuán arbitrario es, e incluso que pudiera llegar a ser peligroso, el remontarse desde ${}_aP_e$ a ${}_e\pi_a$ sin otros conocimientos; desde un punto de vista positivo, ya que indica como, en casos particulares en los que se tengan estos conocimientos, que se refieren efectivamente a los valores de p_a (y, por lo tanto, de $1 - p_a$) y de ${}_sP_e$, se pueda llegar a conclusiones fundadas, aunque no siempre expresables numéricamente, sobre el valor de ${}_e\pi_a$.

El equívoco entre problemas directos y problemas inversos de la probabilidad no surgió, sin embargo, por primera vez en la moderna escuela estadística inglesa. En realidad, se remonta a épocas anteriores.

Jaime Bernouilli ha demostrado—como es sabido—que, conociendo la probabilidad «$\bar{v}$» de un fenómeno, es posible calcular la probabilidad de que en un número dado de observaciones, su frecuencia «$\bar{f}$» se desvíe de «$\bar{v}$» en menos de una cantidad dada. Es este el teorema—un teorema de probabilidad directa—conocido con el nombre de teorema de Bernouilli. Pero él, en cambio, se había propuesto un problema de probabilidad inversa, esto es, de remontar «a posteriori» de la frecuencia observada «$\bar{f}$» del fenómeno, a su probabilidad desconocida «v» con un error inferior a una intensidad dada, cuando dicha probabilidad no se pudiera determinar «a priori» mediante tal relación de los casos favorables a los casos posibles del fenómeno.

El contraste entre el cometido y la demostración es evidente para cualquiera que lea atentamente el «Ars Conjectandi», y si normalmente no se aprecia, esto sucede porque—yo creo—muchos hablan de Bernouilli, pero poquísimos lo han leído. Keynes, que lo había leído, ha resaltado el contraste, y para explicarlo, pensaba que, en realidad, Bernouilli se había propuesto—después de haber demostrado el teorema directo—demostrar el teorema inverso correspondiente, lo que no le fué posible lograr por haber muerto, dejando su obra sin terminar. Ahora bien, no existe duda alguna de que la «Ars Conjectandi» está sin terminar, pero lo que falta son las aplicaciones a las materias civiles, morales y económicas, mientras que por lo que se refiere a la parte teórica, una atenta lectura de la obra y de las cartas cruzadas entre el A. y Leibnitz no dejan la menor duda de que Bernouilli consideraba haber demostrado satisfactoriamente su cometido. (Véase a este objeto la Memoria 14). El se equivocaba, por lo tanto, manifiestamente entre un teorema de probabilidad directa y un teorema de probabilidad inversa. Bernouilli es justamente considerado como el fundador del Cálculo de probabilidades. El equívoco, por lo tanto, se remonta a los orígenes de éste. Se le podría llamar el «pecado original del Cálculo de probabilidades». Se puede explicar, por lo tanto, que sea tan difícil de extirpar.

La inversión del teorema de Bernouilli llevada a cabo por Laplace en la hipótesis de equiprobabilidad de las causas. Propuesta de un esquema más general y su aplicación a la comprobación de partidas sobre la base de muestras.—La fórmula [1] arriba indicada, no representa otra cosa sino un caso particular de una fórmula más general que se usa en el Cálculo de probabilidades para la determinación de la probabilidad «a posteriori» en base a la probabilidad de las causas, caso particular en el que las causas han sido agrupadas en dos categorías: causas accidentales y causas sistemáticas. Cuando las causas consideradas sean, en cambio, muy numerosas (teóricamente infinitamente numerosas) e intervengan todas con la misma probabilidad y corresponden a probabilidades diversas del hecho que se distribuyan uniformemente entre los valores 0 y 1, Laplace ha demostrado que el teorema de Bernouilli puede ser invertido, esto es, que la probabilidad ${}_{\bar{v}}P_{+ef}$ de que en «n» casos se verifique una frecuencia «f», la cual difiera del correspondiente valor verdadero (o sea de la correspondiente probabilidad) «$\bar{v}$» en más de

$$e\sqrt{\frac{2\bar{v}\,(1-\bar{v})}{n}}$$

es igual, en tal hipótesis, a la probabilidad ${}_{\bar{f}}\pi_{+ev}$ de que la probabilidad desconocida «v» difiera de la frecuencia «$\bar{f}$» verificada en «n» casos por más de

$$e\sqrt{\frac{2\bar{f}\,(1-\bar{f})}{n}}$$

Ahora bien, la hipótesis de la equiprobabilidad de las causas, que implican los diversos valores desde 0 hasta 1 de las probabilidades «a priori» del hecho, no es, en general, comprobable, y muchas veces no corresponde manifiestamente a la verdad; de manera que se puede entender que muchos autores hayan buscado demostrar que tal hipótesis no es necesaria. Ellos creen haberlo demostrado con tal de que el número «n» de las observaciones sea bastante grande, de manera que puedan despreciarse los términos de orden $1/n$; pero sus demostraciones no quedan libres de objeciones, como he demostrado en la Memoria 9. Volviendo y desarrollando un esquema ya propuesto en 1911 (1) he demostrado, incluso en la Memoria 12 (preparada en colaboración con el Doctor G. Livada) que, cuando las causas correspondientes a las probabilidades «a priori» del hecho se condensan alrededor de un valor modal «$k/(k+h)$» y presenten un valor comprendido entre «x» y «$x+dx$» con una probabilidad

$$p_x = \frac{(k+h+1)!}{k!\,h!}\, x^k\, (1-x)^h\, d_x$$

los valores de $\bar{f}\,{}^{\pi}{}_{+ev}$ dependen de los valores de «k» y «h», en la misma proporción que del número «$\bar{f}n$» de veces en que el hecho se ha realizado y del $(1-\bar{f})\cdot n$ en que no se ha realizado. Y, dado que no existe ninguna restricción en los valores de «k» y de «h», parece claro que, aun cuando el número «n» de las observaciones sea tan grande que se puedan despreciar los términos de orden $1/n$, los resultados dependen esencialmente de los valores de «k» y de «h», esto es, de la distribución de las causas.

Este esquema es más general que el tomado en consideración por Laplace, que se reduce al caso particular de «k» $= 0$ y «h» $= 0$, y puede aplicarse en la práctica también, habiendo sido efectivamente aplicado por mí al caso de la comprobación de las partidas de productos realizados por medio de muestras, cuando las empresas que se presentan a la comprobación han presentado precedentemente otras muestras de las que se pueden obtener los valores de «k» y de «h». Yo he demostrado que, haciendo varias hipótesis sobre los porcentajes de los elementos defectuosos aparecidos en muestras precedentes, la pro-

(1) En la Memoria «Considerazioni sulle probabilitá a posteriori e applicazioni ai rapporti dei sessi delle nascite umane», en «Studi Economici Giuridici» de la R. Universidad de Cagliari, año III, 1911.

babilidad de que, en la partida presentada, el porcentaje de elementos defectuosos no supere un cierto límite, puede resultar muy diverso según los porcentajes de elementos defectuosos que resultan de las muestras precedentes, y, en todo caso, muy distinto del que se habría alcanzado sobre la base de la hipótesis de Laplace sobre la equiprobabilidad de las causas. Según esta hipótesis, habríamos tenido que esperar, en el ejemplo aportado por mí, una probabilidad $= 0'1438$ de que el porcentaje de los elementos defectuosos no fuera superior a un 8 por 100, mientras que según las varias hipótesis consideradas en la aplicación de nuestro esquema, *la probabilidad respectiva* resultaba ser 0'8773; 0'2996; 0'0004; 0'3107.

La introducción de este esquema más general aplicable a las comprobaciones por medio de muestras, representa—si no me equivoco—un adelanto substancial en el desarrollo de los problemas de la probabilidad inversa, ya sea desde el punto de vista teórico o desde el punto de vista práctico.

La inversión de la probabilidad de los errores en el caso de magnitudes absolutas.—Teoría de las estimaciones.—Un camino distinto del recorrido por Laplace, ha seguido, al tratar los textos de significación, R. A. Fisher, en una Memoria del año 1930, en la que demostraba de considerar intuitivo—ya que no daba demostración alguna—el que, si hay una probabilidad, por ejemplo, del 95 $^0/_0$ o del 997 $^0/_{00}$ de que el valor observado «t» de una magnitud extensiva o intensiva, de intensidad conocida $\bar{\theta}$ o de una función de ella, exceda del límite «t», existe también una probabilidad del 95 $^0/_0$ o, respectivamente, del 997 $^0/_{00}$, de que habiéndose observado un valor «t», el valor verdadero de la magnitud quede inferior a $\bar{\theta}$. Fisher no estima necesaria ninguna otra hipótesis aparte de la de la continuidad de la magnitud de «t». Sobre esta tesis se basa substancialmente la construcción del método de los intervalos de confianza, desarrollado más tarde por J. Neyman y por E. S. Pearson (1).

(1) El mismo Neyman, escribiendo en el año 1934 («Journal of the R. Statistical Soc.», vol. XCVII), consideraba el método citado como *una extensión* de los precedentes resultados obtenidos por Fisher. De un artículo aparecido durante la guerra («Biometrika», vol. XXXII, parte II, octubre 1921), del cual, solamente ahora, mientras estoy corrigiendo estas notas, tengo conocimiento, constato que Neyman ha cambiado después radicalmente de opinión y sostiene que entre las dos teorías—la de Fisher y la suya y de E. S. Pearson—no hay ninguna relación. De todos modos la falta de fundamento del método de Neyman y E. S. Pearson

Volviendo a la cuestión de la Memoria 11, yo he demostrado que dicha tesis es infundada y que la legitimidad de la inversión está subordinada a dos hipótesis:

a) Que el valor verdadero de la magnitud θ pueda tomar «a priori», con la misma probabilidad, uno cualquiera de los valores inferiores o superiores que $\bar{\theta}$, de los cuales puede deducirse el valor observado «t».

b) Que la curva de distribución de los valores observados «t» no varíe al variar el valor de $\bar{\theta}$, por lo menos entre los límites de los cuales se puede deducir el valor observado «t».

No es indispensable que se verifique ni la continuidad de la magnitud «t» ni la de la magnitud θ.

Estas hipótesis no son idénticas a aquéllas en base a las cuales Laplace ha demostrado la inversión del teorema de Bernouilli para las frecuencias relativas. Mientras que la hipótesis *a)* es análoga a la de Laplace sobre la equiprobabilidad de las causas que implican probabilidad «a priori» comprendidas entre 0 y 1, la hipótesis *b)* no puede realizarse en el esquema de Laplace concerniente a las frecuencias relativas, ya que la curva binomial, según la cual se distribuyen éstas, varía notablemente de forma según que los términos del binomio sean iguales o distintos y, en este segundo caso, según que sean más o menos distintos. La hipótesis *b)* no puede verificarse más que para magnitudes absolutas.

Mediante un ejemplo apropiado, he examinado también el alcance, en los dos casos sensible, que puede tener sobre los resultados el hecho de no verificarse la hipótesis *a)* o la hipótesis *b)*.

El citado sistema de las hipótesis, si bien es suficiente, no es, sin embargo, necesario, en tanto que puede ser sustituído por sistemas de hipótesis diferentes, que resultan igualmente suficientes.

La inversión en cuestión, en realidad, está igualmente autorizada cuando se verifican las dos hipótesis siguientes:

α) Que el logaritmo del valor verdadero de la magnitud pueda tomar «a priori» con la misma probabilidad uno cualquiera de los valo-

---

ha sido ya demostrada por mí—independientemente de su derivación del de Fisher—, ya sea en la Memoria 9 según el artículo de Clopper y E. S. Pearson (aparecido en «Biometrika», vol. XXVI, partes III y VI en el año 1934), ya sea en la Memoria 10, basándome en la exposición que de dicho método ya había sido hecha en 1943 en la Sociedad Italiana de Estadística por la Doctora Geppert.

res inferiores o superiores a θ, de los cuales puede deducirse el valor observado «$\bar{t}$».

β) Que la curva de distribución de los logaritmos de los valores observados no varíe al variar el valor θ, por los menos, dentro de los límites de los cuales se puede derivar el valor observado «$\bar{t}$».

Estas dos hipótesis pueden considerarse como verificadas (mientras no se pueden considerar como tales las dos hipótesis precedentes *a)* y *b)*, en el caso de que la magnitud verdadera de θ esté representada por el índice (absoluto) de variabilidad de un fenómeno colectivo y la magnitud observada «t» por el índice obsoluto de variabilidad de una muestra suya. El paso del índice de variabilidad de la muestra, al índice de variabilidad del fenómeno colectivo es, por lo tanto, posible tomando las dos hipótesis α) y β) (véase a este respecto la Memoria 15).

Para que la teoría de las estimaciones—que se propone, en efecto, remontarse desde los caracteres de la muestra hasta los caracteres correspondientes del fenómeno colectivo—adquiera carácter de rigurosidad, es necesario:

1) Hacerse a la idea de que desde los caracteres de la muestra no se puede remontar a los fenómenos colectivos sin hacer hipótesis:

2) Precisar—de forma general o de vez en cuando—las hipótesis suficientes para que se pueda autorizar dicha inferencia.

El problema planteado en el número 2 puede adoptar dos formas:

a) Determinar cuáles son las hipótesis suficientes para que se pueda autorizar una determinada inferencia; por ejemplo, determinar las hipótesis que son suficientes para que se pueda autorizar la inversión del teorema de Bernouilli o para que se pueda autorizar la inversión del tránsito de la desviación media cuadrática de un fenómeno colectivo a la desviación media cuadrática de una muestra suya:

b) Determinar, dadas ciertas hipótesis, cuál es la indiferencia autorizada: por ejemplo, determinar el valor probable de la probabilidad «p» después de que se haya verificado, en «n» observaciones, una frecuencia m/n, en la hipótesis de que, antes de las «n» observaciones, todos los valores de «p» fueran igualmente probables. Como es sabido, en dicha hipótesis, el valor probable de «p» es $= \frac{m+1}{n+2}$.

Posibilidad probatoria de un hecho a favor de una hipótesis y veracidad de la hipótesis después de haberse realizado el hecho.—El alcance de las conclusiones obtenidas en las Memorias 8, 9, 10, 11, 12, 15, va mucho más lejos del alcance del Cálculo de probabilidades. El problema planteado en dichas Memorias no es, en realidad, sino un caso particular de un problema más general que comprende toda la teoría del conocimiento.

Considérense varias hipótesis A, B, C, ... Z, estimadas todas ellas como admisibles en un determinado estado de nuestro conocimiento. Acontece un hecho α. Se pregunta el «valor probatorio del hecho α a favor de la hipótesis A». El problema es soluble en línea de máxima.

El valor probatorio de α a favor de la hipótesis A (mejor que a favor de las hipótesis alternativas B, C, ... Z) depende en realidad de la conciliabilidad de α con A mejor que con B, C, ... Z, o sea desde la probabilidad de que, suponiendo verdadera la hipótesis A, se realice el hecho, en comparación con la probabilidad de que, supuesta que sea verdadera una de las hipótesis alternativas B, C, ... Z, se realice el hecho α.

Esto está bien, pero no hay que confundir el valor probatorio que así ha sido determinado del hecho α a favor de la hipótesis A con la verosimilitud de la hipótesis A después del hecho α.

La verosimilitud de la hipótesis A después del hecho α depende evidentemente, no sólo del valor probatorio del hecho α para la hipótesis A, sino también de la «veracidad de la hipótesis A antes del hecho α». Y es absurda la pretensión de determinar la verosimilitud de la hipótesis A después del hecho α, si no se conoce (o no se supone conocer) la verosimilitud de la hipótesis A antes de dicho hecho α.

Sólo en el caso en que antes del hecho α la verosimilitud de las varias hipótesis A, B, C..., Z fuera igual, la verosimilitud de una cualquiera de entre éstas, después del citado hecho, resultaría proporcional al valor probatorio del hecho a favor de la hipótesis considerada; pero muchas veces la verosimilitud de las varias hipótesis A, B, C..., Z antes del hecho α es, desde una a otra hipótesis, diferente y, en tal caso, su verosimilitud después del hecho α no depende sólo de la posibilidad probatoria del hecho α y a veces depende de esto sólo en pequeña proporción (1).

Estas conclusiones podrán parecer obvias; y hay que suponer que ninguno de los partidarios incondicionales de los textos de significación y de los intervalos de confianza les rechace su propio consentimiento. Valga esto para demostrar cómo, en las cuestiones de lógica,

(1) Véase en particular, acerca de este argumento, la Memoria 8.

la matemática a veces, en lugar de esclarecer, puede confundir las ideas. Esto sucede cuando operaciones que se expresan con los mismos símbolos o con símbolos semejantes, tienen un significado lógico diferente, como precisamente sucede en los teoremas directos e inversos del Cálculo de probabilidades (1).

Alcance de las aplicaciones de la teoría de la dispersión y en general de los esquemas teóricos.—Volvamos al problema del que habíamos partido, esto es, el de decidir si una determinada combinación observada depende o no de causas accidentales. Hasta el momento en que nos encontramos ante la única observación en que la combinación ha tenido lugar, no se puede recurrir más que a la fórmula [1]; pero cuando, además de esta observación, hayamos hecho otras en número suficientemente grande, se puede uno proponer el problema de si la frecuencia de la combinación en cuestión sea más o menos alta de cuanto debiera, por efecto del azar. Esta investigación se realizó, por ejemplo, de manera satisfactoria por lo que se refiere a la combinación de los sexos en las familias. Se tiene entonces una de las aplicaciones inductivas del Cálculo de probabilidades que entran en la teoría de la dispersión de Dormoy y de Lexis.

Ahora bien, a este respecto hay que hacer varias consideraciones que circunscriben el alcance de dicha comparación.

La primera es que dicha comparación no nos dice nada sobre el carácter accidental o sistemático de una combinación observada aisladamente. Si nosotros comprobamos, como en efecto se comprobó, que las combinaciones de los sexos en las familias aisladas dependen por una décima parte o poco más de las tendencias sistemáticas de las parejas procreadoras para producir un sexo en lugar de otro y por el remanente son efecto del azar (2), esto no significa que se pueda decir otro tanto para una familia aislada cualquiera. Si una familia, por ejemplo, tiene 10 hembras de 10 nacimientos, esto podrá depender completa-

(1) Los equívocos—podrá decirse—no son imputables a la matemática, sino al mal uso que de ella se hace. Aquéllos pueden evitarse naturalmente con la introducción de nuevos símbolos que permitan diferenciar debidamente las diversas operaciones. En tal sentido contiene propuestas nuestra Memoria, en vías de publicación, titulada: «Di alcuni simboliche sarebbe opportuno impiegare nella trattazione matematica dei fenomeni statistici».

(2) Véase «Il sesso dal punto di vista statistico», 1908, Roma, Biblioteca del «Metron», cap. X. «La variabilitá individuale della tendenza a produrre i due sessi».

mente del azar, no teniendo la familia una tendencia especial para procrear hembras e incluso quizás teniendo una tendencia para procrear varones, y en cambio podrá depender exclusivamente de una incapacidad de la pareja procreadora para tener varones, quedando excluída toda influencia de carácter accidental.

La segunda observación es que, también por lo que se refiere al complejo de observaciones, la comparación de los resultados observados con la previsión deducida del Cálculo de probabilidades, no nos puede llevar a conclusiones seguras. Existe siempre la posibilidad de que una coincidencia de los datos efectivos con los teóricos represente el efecto del azar, mientras que grupos de observaciones sucesivas podrían demostrar que el fenómeno tiene en realidad una dispersión superior o inferior a la teórica. Y existe también la posibilidad de que dependa del azar una divergencia entre los resultados observados y las previsiones teóricas, mientras que grupos de observaciones sucesivas revelarían que el fenómeno tiene efectivamente una dispersión normal. Más de una vez ha sucedido en Estadística que una regularidad aparente, que se había obtenido de un número de observaciones que parecía bastante amplio, fué desmentida por observaciones sucesivas. Del resultado de la comparación entre datos efectivos y previsiones teóricas, que se representa con el índice de dispersión, debe deducirse, por lo tanto, el error probable; pero el cálculo del error probable, por una parte está subordinado a las hipótesis arriba citadas, implícitas en la inversión de la probabilidad, y por otra parte tampoco aquél se sustrae a la influencia del azar. Concluyendo, no se ha de olvidar nunca que las aplicaciones del Cálculo de probabilidades llevan a conclusiones a menudo hipotéticas y siempre más o menos probables, pero nunca a conclusiones seguras.

Por último, hay que hacer una tercera consideración relativa al alcance gnoselógico de tales comparaciones. Es una observación que se extiende a todos los esquemas teóricos, en los cuales la teoría de la dispersión entra como un caso particular.

Un esquema teórico es una construcción lógica que implica generalmente varias hipótesis. La constatación de que los resultados de la observación corresponden a los datos del esquema teórico no autoriza a sentar la conclusión de que las hipótesis inherentes al esquema «tengan» que corresponder a la realidad, sino que solamente aquéllas «puedan» corresponder a la realidad. La correspondencia se podría explicar en realidad también con diversas hipótesis. Para afirmar que las citadas hipótesis—supongamos en número de «s»—que comprenden el esquema, corresponden a la realidad, es necesario que corresponda también a la realidad, no sólo el resultado global previsto en base al esquema teórico, sino también (s—1) de las hipótesis que el esquema lleva implícitas.

En el caso de la dispersión, el esquema lexiano presupone que la probabilidad del hecho considerado sea constante y que al verificarse el hecho en un caso sea independiente de haberse verificado en los casos precedentes; pero una dispersión normal puede obtenerse igualmente en el caso de que haya compensación entre los hechos sucesivos, mientras que la probabilidad del hecho esté sujeta a variación en el curso de la observación. La dispersión normal—establecida por múltiples investigaciones—de la relación de los sexos en los nacimientos humanos de las diferentes circunscripciones territoriales o de los sucesivos intervalos de tiempo, no autorizaba, por lo tanto, de por sí, la conclusión de Lexis de que la probabilidad de un nacimiento de un varón o de una hembra no variara de una circunscripeión territorial a otra y de intervalo de tiempo considerado a otro: esta conclusión fué autorizada sólo después de haber sido excluída la tendencia compensadora—sostenida por varios autores—entre las relaciones de los sexos en grupos de nacimientos sucesivos; aquélla permitió entonces prescindir de múltiples teorías sobre la determinación del sexo que con tal constancia resultaban conciliables (1).

(1) Véase, para todo ello, la obra citada sobre «Il sesso dal punto di vista statistico» (1908), donde se dedican dos capítulos a las aplicaciones de la teoría de la dispersión a la relación de los sexos en los nacimientos de varias circunscripciones territorialen y de los sucesivos intervalos de tiempo. (Cap. IV: «Misura della regolaritá dell'eccedenza dei maschi nelle nascite umane»; cap. V: «portata della regolaritá dell'eccedenza dei maschi nelle nascite umane»). En el cap. V, en particular, se examina el significado sustancial de la dispersión normal y salen a la luz las conclusiones, que de ello se deducen, sobre la teoría de la determinación del sexo. Están igualmente expuestas las formas con las que la probabilidad de un fenómeno puede variar en el curso de las observaciones o puede ser influenciada por la frecuencia del fenómeno en sus casos antecedentes y de cada una se indica la influencia que ejerce sobre la dispersión, tendiendo a que se haga supernormal. Son tomadas en consideración, entre otras, las interdependencias, positivas o, por el contrario, negativas, entre las probabilidades que el fenómeno adquiere en los casos aislados que entran en cada término de la serie, interdependencia que ahora veo fué objeto de un detenido examen por parte de HILDA HEIIENGER en un artículo aparecido durante la guerra («A New Explanation of Non-

De manera parecida, la uniformidad, desde el punto de vista genético de varios individuos de una población respecto a un carácter sujeto, en sus manifestaciones fenotípicas, a la influencia perturbadora del ambiente, conduce a una curva de distribución gaussiana de las intensidades del carácter; pero es un error deducir, como hacía Quetelet, de dicha distribución gaussiana la uniformidad genética de la población respecto al carácter en cuestión.

La cuestión—tratada en la Memoria 1 y más difusamente en la 2—del alcance gnoseológico de la influencia de los esquemas teóricos, es actualmente de gran importancia, dado que dichos esquemas se multiplican a menudo sin preocuparse de las necesarias comprobaciones. Hay que insistir sobre la necesidad de realizar dichas comprobaciones, y esto no sólo respecto a las previsiones a las que conduce el esquema, sino también por lo que se refiere a las hipótesis aisladas que contiene el esquema.

Las pretendidas contradicciones de la èstadística.—Otra cuestión examinada en la Memoria 1 es la que se refiere a las pretendidas contradicciones existentes entre las conclusiones a las que, sobre los mismos fenómenos, llegarían varios estadísticos, a veces todos ellos expertos.

Estas contradicciones son generalmente sólo aparentes. A menudo dependen del hecho que, en realidad, las conclusiones divergentes no se refieren precisamente a un mismo fenómeno. Así, comparando la mortalidad de dos poblaciones, estadísticos diferentes pueden llegar a conclusiones distintas según comparen los coeficientes brutos de mortalidad o, en cambio, eliminen la influencia de la edad, o bien también la del sexo o del estado civil o, en cambio, la de la profesión o de la riqueza, y así suceslvamente. En realidad, las conclusiones de los diversos autores se refieren a fenómenos diferentes; las de uno a la mortalidad global; las del otro a la mortalidad global a igual composición de la población por edad; las de un tercero a igual composición de la población por edad y por sexo; las de un cuarto a igual composición de la población por edad y profesión, y así sucesivamente. Hay que reconocer, por otra parte, que los múltiples factores que influyen en los fenómenos estadísticos y la necesidad de disponer para cada uno de ellos de una cantidad suficiente de observaciones, hace que sea difícil elimi-

---

normal Dispersion in the Lexis Theory», en «Econometrika», enero 1942). Evidentemente, la autora, que habla de «New Explanation», ignoraba que yo traté el argumento treinta y cuatro años antes.

nar todos los factores que no interesan para sacar a la luz aquellos que interesan; además, tampoco todos los investigadores están en condiciones, dado el material diferente de que disponen, de hacerlo para los mismos factores y en la misma medida, de forma que tales aparentes contradicciones son, en realidad, más frecuentes en Estadística que en otros campos.

Otras aparentes contradicciones se derivan del hecho de que los efectos momentáneos de un factor pueden ser diferentes—e incluso, a veces, opuestos—que sus efectos permanentes, como sucede con las condiciones económicas sobre la natalidad; y, de manera parecida, pueden ser diferentes los efectos del mismo factor en razón de que su intensidad quede dentro de ciertos límites o, en cambio, los sobrepase, como sucede, por ejemplo, en el caso del uso del tabaco o del alcohol y para el consumo de la carne; y además puede suceder también que los efectos indirectos sean contrarios a los directos y que a largo plazo dominen sobre aquéllos, como sucede en el caso de la influencia de un ambiente favorable sobre la mortalidad, en tanto que el mismo prolonga la vida de las personas que lo disfruten, pero, por otra parte, atenuando la acción de la selección natural, hacen que las generaciones futuras resulten menos fuertes. Ahora bien, algunos autores consideran, en sus investigaciones, unos efectos y otros autores consideran otros efectos y, cuando no resulte bien clara la diversidad de objeto, sus conclusiones divergentes pueden parecer, contrariamente a la realidad, irreconciliables.

Los peligros de la Estadística.—Estas aparentes contradicciones y la reconocida facilidad en cometerlas en los fenómenos especialmente complejos que la Estadística trata; la posibilidad de alcanzar, cuando se quieran extender los resultados más allá de los datos observados, sólo conclusiones con carácter de probabilidad y nunca seguras; la necesidad que habría de proceder a comprobaciones no siempre factibles o satisfactorias de las varias premisas, además que de las previsiones de los esquemas teóricos; las hipótesis inevitables y que a veces no corresponden con la realidad, a las que quedan subordinados los textos de significación de los datos estadísticos y la eliminación de los errores accidentales, circundan de peligros las aplicaciones de la Estadística, contra los que hay que estar en guardia, pero que no deben detener aquel que quiera hacer progresar la ciencia. La Estadística es, en realidad, una disciplina de vanguardia; como tal, es lógico que presente riesgos particulares; pero no debemos desconocer que, por otra parte, no podríamos llegar con otros medios donde ella llega, ver o entrever lo que ella ve y entrevé, recoger los frutos, aunque a veces no maduros todavía, que ella recoge; nada podría, en otras palabras, sustituírla. Nietzsche decía que vivir peligrosamente es una condición esencial para alcanzar el mayor rendimiento y las mayores satisfacciones: en ningún campo, quizás, se puede aplicar mejor que en el de la Estadística, dicha máxima.