# Aplicación de la teoría de juegos de estrategia al problema de la integración de riesgos

Por Angel VEGAS

Queremos empezar agradeciendo al eminente profesor Karl Borch sus fecundas investigaciones sobre aplicaciones de la investigación operativa al Seguro, merced a las cuales hemos encontrado el fundamento lógico de la solución del problema que vamos a estudiar.

## INTRODUCCION

La cuestión que tratamos de resolver consta de dos puntos fundamentales. El primero se refiere al estudio de la posibilidad de integrar varias *unidades de riesgo* en una sola, y el segundo, supuesta la ventaja de la integración, determinar la forma más aceptable, racional y técnicamente de imputar los beneficios que se siguen de la misma.

El punto primero será tratado de acuerdo con la teoría del Riesgo Colectivo, y el segundo mediante la aplicación del esquema lógico de los juegos de estrategia.

## 1. INTEGRACION DE RIESGOS

### 1.1. Función de pago.

Sean $\xi_t$ y $\eta_t$ las variantes que representan el montante de siniestralidad o nivel de quebranto y el beneficio de la unidad de riesgo.

Evidentemente que entre ambos procesos estocásticos existe la siguiente relación:

$$\eta_t = k_t \; - \xi_t$$

en la que $k_t$ representa el montante de ingresos.

Llamaremos *recargo de seguridad* a la diferencia

$$E(\xi_t) - k_t = m_t - k_t = \gamma$$

Por lo tanto, el beneficio podrá expresarse por

$$\eta_t = m_t - \gamma - \xi_t$$

Si las funciones generatrices de $\xi_t$ y $\eta_t$ son $\varphi_\xi(\Theta)$ y $\varphi_\eta(\Theta)$ tendremos

$$\varphi_\eta(\Theta) = e^{(mt_t+\gamma)\Theta} \cdot \varphi_\xi(-\Theta) = e^{(m_t+\gamma)\Theta+\varphi_\xi(-\Theta)}$$

donde

$$\psi_\xi(-\Theta)$$

es la función cumulativa. Como consecuencia tenemos:

$$E(\eta_t) = \gamma$$

Lo que indica que el *recargo de seguridad* coincide con el valor medio del beneficio. Cabría pensar que una política de mayoración de beneficios podría apoyarse en el incremento del recargo. Esto no tiene justificación satisfactoria. En efecto, el incremento del recargo supone un encarecimiento, con lo que una reacción normal de la demanda llevaría consigo una reducción en el número de contratos y, por ello, el efecto definitivo podría ser una disminución del beneficio.

Por otra parte, pretender el incremento del beneficio a través del recargo equivale a considerar el valor medio de la variante del beneficio como un índice de utilidad, cosa que contradice la teoría sostenida por Morgenstern y Neuman, que exige que la utilidad no pueda ser infinita.

La función de utilidad es, según sabemos,

$$U(F) = \int u(y_t)\, dF(y_t)$$

en la que $F(y_t)$ es la función de distribución del beneficio y $u(y_t)$ la función de utilidad del beneficio (por ejemplo, el dinero).

De todo esto se deduce que la utilidad se incrementará operando sobre la función de distribución, ya que $F_1$ es más útil que $F_2$ si

$$U(F_1) > U(F_2)$$

Esta pudiera ser la justificación racional del reaseguro y de la política demográfica de la empresa aseguradora, entendiendo por tal la que conduce a una composición de la cartera que lleva consigo el llamado beneficio por submortalidad.

Dejando para otra ocasión estas cuestiones, vamos a continuar con la definición y propiedades de la función de pago.

Según la teoría del Riesgo colectivo, podemos escribir:

$$P_r(\eta_t < -u) \leq e^{-\Theta_0 u} \qquad [1]$$

en la que u representa la reserva inicial de la unidad riesgo que consideramos y $\Theta_0$ cumple la condición

$$(m_t + \gamma)\, \Theta_0 - \psi_\xi(\Theta_0) = 0$$

La [1] representa, pues, la probabilidad de que la compañía o unidad de riesgo se arruine.

El montante de los pagos de los asegurados es $m_t + \gamma$, por lo que la relación

$$m_t + \gamma = \frac{\psi_\xi(\Theta_0)}{\Theta_0}$$

va a recibir el nombre de *función de pago.*

Es evidente que el recargo $\gamma$ será función de las dos variables fundamentales de la unidad de riesgo, de aquellas que pueden tomarse para definir su estructura, es decir, u reserva o nivel económico y $\alpha$ nivel de la probabilidad de ruina. En efecto, si hacemos

$$P_r(\eta_t < -u) \leqq e^{-\Theta_0 u} = \alpha < 1$$

tendremos

$$\Theta_0 = \frac{|\log \alpha|}{u}$$

y, por lo tanto,

$$\gamma = \frac{\psi_\xi\left(\frac{|\log \alpha|}{u}\right)}{\frac{|\log \alpha|}{u}} - m_t$$

Esta relación justifica el porqué se denomina *recargo de seguridad*, ya que su misión no es otra que garantizar la pervivencia de la compañía aseguradora teniendo en cuenta su situación económica.

### 1.2. Propiedades de la función de pago.

El desarrollo de la función cumulativa es, según se sabe,

$$\psi(\Theta) = k_1 \Theta + k_2 \frac{\Theta^2}{2!} + k_3 \frac{\Theta_3}{3!} + \ldots$$

en la que $k_r$ es el momento cumulativo de orden r y, por lo tanto,

$$k_1 = m; \qquad k_2 = \sigma^2$$

luego

$$\frac{\psi(\Theta)}{\Theta} = m + \sigma^2 \frac{\Theta}{2} + k_3 \frac{\Theta^2}{3!} + \ldots$$

De aquí deducimos que el recargo de seguridad puede expresarse de la forma

$$\gamma = \sigma^2 \frac{\Theta_0}{2} + k_3 \frac{\Theta_0^2}{3!} + \ldots = \sigma^2 \frac{|\log \alpha|}{2u} + k_3 \frac{|\log \alpha|^2}{3!u^2} + \ldots$$

Por definición $\frac{|\log \alpha|}{u}$ ha de ser normalmente muy pequeña, ya que $\alpha$ es el nivel de probabilidad de ruina y u la reserva de origen que mide el nivel económico de la entidad aseguradora, como ya sabemos. Así, si, por ejemplo,

$$\alpha = 0{,}05 \quad \text{y} \quad u = 1.000.000 \quad \text{es} \quad \Theta_0 = 0{,}000003$$

La función de pago será, en términos generales, creciente respecto a $\Theta$.

En efecto, su derivada tendrá la forma

$$D\left(\frac{\psi(\Theta)}{\Theta}\right) = \frac{\sigma^2}{2} + k_3 \frac{\Theta}{3} + 0(\Theta)$$

que se mantendrá positiva siempre que se verifique la relación

$$\Theta < \frac{3}{2} \frac{\sigma^2}{|k_3|}$$

En virtud de las consideraciones anteriores, aun en el caso de que el proceso del montante de quebranto definiese una distribución fuertemente asimétrica ($k_3$ es el coeficiente de asimetría), $\Theta_0$ cumpliría normalmente la anterior relación.

De todo esto se deduce que la función de pago es decreciente respecto de la reserva u.

### 1.3. Función de integración.

Llamaremos *función de integración* a la función de pago que corresponde a un conjunto de T unidades de riesgo, consideradas integradas en una nueva unidad.

Suponemos que las reservas son $u_1$, $u_2$, ..., $u_T$ y que el nivel de probabilidad de ruina $\alpha$ es el mismo para todas. Las variantes de quebranto son, evidentemente, estocásticamente independientes, por lo que la función de integración será

$$\nu(T) = \frac{\psi_T(\Theta_T)}{\Theta_T}$$

en la que $\Theta_T$ es igual a $\dfrac{|\log \alpha|}{\sum_{r \in T} u_r}$

Por la independencia estocástica

$$\psi_T(\Theta_T) = \sum_{r \in T} \psi_r(\Theta_T)$$

luego

$$\nu(T) = \frac{\sum_{r \in T} \psi_r(\Theta_T)}{\Theta_T}$$

Como consecuencia de esta definición aparecen las siguientes propiedades:

I. $\nu(\emptyset) = 0$

II. $\nu(T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_S) \leqq \sum_{t=1}^{s} \nu(T_r)\,;\ T_j \cap T_j = \emptyset$

La primera propiedad es evidente, ya que no tiene sentido hablar de pago distinto de 0 en el caso en que no exista ninguna unidad de riesgo.

La segunda se desprende del hecho de ser creciente con $\Theta$ la función de pago. En efecto,

$$\nu(T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_S) =$$

$$= \frac{\sum_{r \in T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_S} \psi(\Theta T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_S)}{\Theta T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_S} =$$

$$= \frac{\sum_{r \in T_1} \psi_r(\Theta T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_S)}{\Theta T_1 \cup T_2 \cup T_3 \ldots T_S} + \cdots +$$

(*) *Wissenschaftl. Veröffentl.*, V.

$$+ \frac{\sum\limits_{r \in T_S} \psi_r(\Theta T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_S)}{\Theta T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_S} \leqq$$

$$\leqq \frac{\sum\limits_{r \in T_1} \psi_r(\Theta T_1)}{\Theta T_1} + \ldots + \frac{\sum\limits_{r \in T_S} \psi_r(\Theta r_S)}{\Theta T_S} =$$

$$= \nu(T_1) + \ldots + \nu(T_S)$$

Luego

$$\nu\left(\bigcup_{r=1}^{r=S} T_r\right) \leqq \sum_{r=1}^{S} \nu(T_r)$$

Es claro que

$$\Theta T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_S < \Theta T_1$$

ya que

$$\Theta T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_S = \frac{|\log \alpha|}{\sum\limits_{r \in T_1 \vee \ldots \vee T_S} u_r} < \frac{|\log \alpha|}{\sum\limits_{r \in T_1} u_r}$$

De todo esto se deduce que la integración siempre supone una ventaja para el grupo en total. Se trata ahora de ver cómo debe repartirse esa ventaja.

## II. ASIGNACION DEL BENEFICIO

Hemos visto que según las propiedades de la *función de integración* es siempre ventajosa la integración para el conjunto de unidades integradas, es decir,

$$\sum_{i \in T} \nu(i) > \nu(T)$$

En la que $\nu(i)$ es la función de pago de la entidad.

La cuestión que ahora se presenta es la distribución del beneficio

$$\sum \nu(i) - \nu(T) = B$$

Como hemos indicado anteriormente, vamos a servirnos del esquema lógico de los juegos de estrategia en virtud de que la *función de integración* cumple las condiciones de función característica de juego y, por tanto, podremos considerar un juego *n* personal con dicha función característica y pretender una solución del problema con la ayuda de la teoría de esta clase de juegos.

Recordaremos que la función característica de juego V(T) es el valor del juego correspondiente del conjunto T considerado como un solo jugador, es decir, integrando una "coalición". Sabido es que esto indica que los jugadores coaligados pueden elegir de común acuerdo la estrategia que han de adoptar para que el resultado individual del juego, es decir, la imputación o asignación, sea la más ventajosa de acuerdo con el interés de la comunidad integrada en la "coalición".

El problema de la obtención de solución del juego consiste, pues, en determinar los métodos posibles de imputar las ganancias individuales al terminar la partida. Podemos afirmar que la solución nos da un "esquema de finalidad" definido por relaciones de orden en las asignaciones, constituyendo una "preferencia eficaz".

La teoría de juegos de Neuman y Morgenstern, considera la solución del juego como el conjunto de asignaciones que entre sí no son "dominantes", es decir, que no es preferida la una a la otra, y en cambio cualquier otra asignación que no pertenezca a la solución es preferida por cualquiera de las que pertenecen a ella. Se ha podido demostrar que en los juegos hasta de cuatro jugadores existe solución.

Los más recientes estudios sobre los juegos de estrategia a través de la teoría de "grafos" han evidenciado que un juego finito, *n* personal es un grafo "progresivamente finito" el cual posee siempre "núcleo", o sea un conjunto de puntos que entre sí no son adyacentes, es decir, que no son correspondientes en la aplicación que supone el grafo y, por el contrario, cualquier punto exterior siempre tiene por correspondiente uno interior al núcleo. De acuerdo con la definición de solución de juego se ve claramente que ésta coincide con la del núcleo del correspondiente grafo. Esto nos permite referirnos consistentemente a la teoría de juegos para obtener consecuencias lógicas.

Las propiedades *fundamentales de la función característica* de juego son las siguientes:

I. $\nu(\emptyset) = 0$

II. $\nu(\cup\ T_j) > \sum \nu(i) \qquad T_i \bigcap_{i \neq j} T_j = \emptyset$

Se demuestra que una función de conjunto que cumple esas condiciones define un juego.

En el caso en que la suma de los pagos a realizar por los jugadores sea distinto de 0, tendremos

$$\nu(T_n) \neq 0$$

en la que $T_n$ representa el conjunto total de jugadores. Evidentemente, en el caso de juegos de "suma 0", tendremos

$$\nu(T_n) = 0$$

Las imputaciones o asignaciones a cada uno de los jugadores han de cumplir evidentemente las siguientes condiciones:

$$x_i \geqq \nu(i)$$

$$\sum_{1}^{n} x_i = \nu(T_n)$$

ya que es claro que lo que corresponda al jugador *i* como consecuencia de la coalición, no puede ser inferior a lo que le correspondiera jugando por su cuenta exclusivamente.

La asignación correspondiente al jugador *i* estará, por lo tanto, en el intervalo

$$\nu(T_n) - \sum_{r \neq i} \nu(r) \geq x_i \geq \nu(i)$$

La determinación de un valor concreto para $x_i$ exige consideraciones de carácter marginal o complementario, ya que, como hemos dicho, la solución del juego es un "esquema de finalidad" que recoge el conjunto de formas de distribuir las consecuencias del juego; la designación de una forma concreta de asignaciones trasciende de la finalidad de la teoría de juegos.

Nosotros pretendemos a continuación una solución concreta a nuestro problema.

La propiedad fundamental de la *función de integración* es, según sabemos, la siguiente:

$$\nu(\cup T_i \leq \sum \nu(T_j)$$

$$T_i \cap T_j = \varnothing$$

ya que

$$\nu(\cup T_i = \frac{\sum\limits_{r \in \cup T_i} \psi_r(\Theta_{T_i})}{\Theta \cup_{T_i}}$$

$$\nu(T_i) = \frac{\sum \psi_S(\Theta_T)}{\Theta \cup_{T_i}}$$

en los que, como sabemos,

$$\Theta_{T_i} = \frac{|\log \alpha|}{\sum u_{T_i}}$$

$$\Theta_{T_i} = \frac{|\log \alpha|}{u_{T_i}}$$

Siendo $u_{T_i}$ la suma de las reservas de las $T_i$ unidades integradas y $\alpha$ el nivel de probabilidad de ruina.

Por otra parte es evidente que

$$\nu(\varnothing) = 0$$

Conviene reparar en que la *función de integración* se refiere a pagos y, en cambio, la función característica de juego es, según hemos recordado, la que corresponde a la ganancia obtenida por el grupo T. Por ello el sentido de la desigualdad en la relación fundamental es el contrario.

Si llamamos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ a las asignaciones que correspondan a las entidades integradas de acuerdo con lo dicho anteriormente, tendremos:

$$\sum P_i = \nu(T_n) = \frac{\sum_{r=1}^{n} \psi_r(\Theta_{T_n})}{\Theta_{T_n}}$$

y, por otra parte,

$$P_i \leqq \frac{\psi_i(\Theta_i)}{\Theta_i}$$

luego

$$\frac{\sum_{1}^{n} \psi_r(\Theta_{T_n})}{\Theta_{T_n}} - \sum_{r \neq i} \frac{\psi_r(\Theta_r)}{\Theta_r} \leqq P_i \leqq \frac{\psi_i(\Theta_i)}{\Theta_i}$$

Para la obtención de los valores concretos de $P_i$ procederemos de la siguiente forma:

Supongamos una ordenación de las *n* unidades de riesgo $i_1, i_2, \ldots, i_n$ que responde a una política de integración sucesiva, es decir, *la unidad* $i_1$ *consigue incorporar a la* $i_2$, $i_1$ e $i_2$ conjuntamente, incorporan a $i_3$ y así sucesivamente. Las asignaciones que corresponden a estas integraciones sucesivas se hacen con el siguiente criterio:

$$P_{i_1} = \frac{\psi_{i_1}(\Theta_{i_1})}{\Theta_{i_1}}$$

$$P_{i_1} = \frac{\sum\limits_{1}^{2} \psi_{i_r}(\Theta_{i_1,\, i_2})}{\Theta_{i_1,\, i_2}} - \frac{\psi_{i_1}(\Theta_{i_1})}{\Theta_{i_1}}$$

$$P_{i_2} = \frac{\sum\limits_{r=1}^{s} \psi_{i_r}(\Theta_{i_1,\, i_2,\, \ldots,\, i_n})}{\Theta_{i_1,\, i_2,\, \ldots,\, i_n}} - \frac{\sum\limits_{r=1}^{s-1} \psi_{i_r}(\Theta_{i_1,\, i_2,\, \ldots,\, is-1})}{\Theta_{i_1,\, i_2,\, \ldots,\, is-1}}$$

$$P_{i_n} = \frac{\sum\limits_{r=1}^{n} \psi_{i_r}(\Theta_{i_1,\, i_2,\, \ldots,\, i_n})}{\Theta_{i_1,\, i_2,\, \ldots,\, i_n}} - \frac{\sum\limits_{r=1}^{n-1} \psi_{i_r}(\Theta_{i_1,\, i_2,\, \ldots,\, i_{n-1}})}{\Theta_{i_1,\, i_2,\, \ldots,\, i_{n-1}}}$$

En las que

$$\Theta_{i_1,\, \ldots,\, is} = \frac{|\log \alpha|}{u_{i1} + u_{i_2} + \ldots + u_{is}}$$

Es evidente que las $P_{i_r}$ cumplen las condiciones

$$\sum_{r=1}^{n} P_{i_r} = \frac{\sum \psi_{i_n}(\Theta_{i1,\, \ldots,\, i_n})}{\Theta_{i1,\, \ldots,\, i_n}}$$

$$P_{i_r} > \frac{\psi_{i_1}(\Theta_{i_1})}{\Theta_{i_1}} \qquad r \neq 1$$

$$P_{i_1} = \frac{\psi_{i_1}(\Theta_{i_1})}{\Theta_{i_1}}$$

Todas estas asignaciones dependen del orden elegido, el cual supone que la unidad $i_1$, que inicia el proceso de integración, no se beneficia en nada, ya que su asignación coincide con el valor de su función de pago. Para que se pueda hablar de una verdadera solución, los conjuntos de posibles asignaciones no deben estar relacionados por correspondientes preferencias; por ello, parece lógico que consideremos un proceso de integración sucesiva de carácter aleatorio, suponiendo las $\underline{|n}$ ordenaciones posibles como igualmente probables. Sobre esta base definimos la variable aleatoria que toma los valores $P_{r_1}$, $P_{r_2}$, ..., $P_{r_t}$; ..., $P_{r_n}$ con las probabilidades

$$\frac{1}{n}, \frac{\underline{|n-2}}{\underline{|n}}, \ldots, \frac{(n-t)!\,(t-1)!}{\underline{|n}}, \ldots, \frac{1}{n}$$

$P_{r_t}$ representa la asignación que corresponde a una ordenación en que la entidad *r* ocupa el lugar *t*. Su valor será, por tanto,

$$P_{r_t} = \frac{\sum\limits_{s \in T} \psi_s(\Theta_T)}{\Theta_T} - \frac{\sum\limits_{s \in T} \psi_s(\Theta_{T-r})}{\Theta_{T-1}}$$

Tomamos como asignación definitiva el valor medio

$$E_t(P_r) = \pi_r = \sum \frac{(n-t)!\,(t-1)!}{n!} P_{r_t}$$

Es fácil ver que la suma de las probabilidades es igual a la unidad; en efecto,

$$\sum_{t=1}^{n} \binom{n-1}{t-1} \frac{(n-t)!\,(t-1)!}{n!} = 1$$

Las asignaciones serán, pues, $\pi_1$, $\pi_2$, ..., $\pi_n$, que evidentemente cumplen las condiciones exigidas.

## BIBLIOGRAFIA

BORCH, KARL: *Aplicación de la teoria de juegos a algunos problemas del seguro de automóviles*. Coloquios Juan-Despins, 1962.

NEUMAN AND MORGENSTERN: *Theory of games and Economic Behaviour*. Princetown, 1944.

CRAMER, HARALD: *Collective Risk Theory*. Skandia Insurance Company, 1955.

SHAPLEY: "A value for *n*-person games". *A mathematical studies*, número 28.