DISEÑO DE SISTEMAS BONUS-MALUS. TRANSPARENCIA DEL SISTEMA.

José A. Gil Fana, Antonio Heras Martínez y José L. Vilar Zanón.

Departamento de Economía Financiera y Contabilidad I.
Facultad de CC. Económicas y Empresariales. Universidad Complutense de Madrid. Campus de Somosaguas. 28223, Pozuelo de Alarcón, Madrid.

Abstract: In this paper we show how the linear programming methodology permits to design Bonus-Malus Systems whose premium scales optimize the asymptotic fairness and have some technical and commercial properties. In this case we focus our study in the transparency property.

Key words: Bonus-Malus System. Bayes Scale. Goal Programming. Transparency of Bonus-Malus System.

Los autores desean agradecer al Ministerio de Educación y Ciencia su apoyo y financiación por medio del proyecto de investigación SEJ2005-06744.

1.- Introducción.

Es razonable admitir que la finalidad fundamental que hemos de perseguir a la hora de diseñar un sistema bonus-malus (SBM) es que posea un elevado grado de equidad de acuerdo con alguna medida de la misma, esto es, que las primas pagadas por los asegurados se encuentren en relación con el riesgo que comportan.

Este objetivo ha de ser lógicamente compatible con determinadas restricciones comerciales, e incluso legales, para que el sistema propuesto no quede fuera del mercado y otras restricciones de tipo técnico. Pensemos en límites en los incrementos de primas entre clases consecutivas, el equilibrio financiero del sistema, o que el mismo cumpla con ciertos mínimos en relación con determinadas medidas de eficiencia como son la elasticidad, RSAL etc.

Los autores de este artículo han desarrollado una nueva metodología que posibilita el diseño de SBM que posean las características citadas (Heras y otros (2002) y (2004)).

En los últimos años en la literatura actuarial se ha dado cierta relevancia a la transparencia de los SBM, es decir, que los descuentos ofrecidos en el condicionado de las pólizas sean reales, lo que no sucede si la empresa se ve obligada a incrementar las primas para mantener el equilibrio financiero cuando las pólizas se van acumulando en las clases de mayor descuento.

En este artículo analizaremos cómo, mediante la citada metodología, es posible diseñar un SBM que además de maximizar su equidad y cumplir determinadas restricciones técnicas y comerciales, sea transparente.

2.- Sistemas bonus-malus.

Dado un grupo de riesgo, supondremos que el nivel de riesgo de cada póliza viene representado por un parámetro $\lambda>0$, el número esperado de siniestros por periodo. Supondremos que no es posible determinar el verdadero valor de este parámetro para cada póliza y que existe una variable aleatoria Λ (*la variable de estructura*) cuyas realizaciones son los valores del parámetro de riesgo para las pólizas pertenecientes al grupo. La función de distribución asociada a la variable de estructura será representada como $U(\lambda)$ y denominada función de estructura. Supondremos, además que Λ es independiente del tiempo. Las variables aleatorias N_t / $\Lambda=\lambda$, número de siniestros de una póliza en sucesivos periodos condicionados a algún valor de λ, se supone que son mutuamente independientes e idénticamente distribuidas de acuerdo a una distribución de Poisson de media λ. Por tanto, la variable aleatoria no condicionada N_t seguirá una distribución de Poisson ponderada por la función de estructura. Supondremos también que las cuantías de los siniestros individuales $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ son independientes del número de siniestros y de la variable de estructura, y mutuamente independientes e idénticamente distribuidas con media $E\{X\}<\infty$. Tomaremos esta última como unidad monetaria, de tal forma que la prima pura de una póliza con parámetro de riesgo λ será igual a λ medido en unidades de $E\{X\}$.

Finalmente, nos situaremos en el caso más sencillo en el que las variables aleatorias N_t / $\Lambda=\lambda$, N_t y X son independientes de la elección del sistema bonus-malus, esto es, no tendremos en cuenta el hambre de bonus.

Siguiendo a Lemaire (1995, pág. 6), diremos que una compañía de seguros utiliza un *Sistema Bonus-Malus* (SBM) cuando se verifican las condiciones siguientes:

- Existen únicamente un número finito de clases $C_1,...,C_n$ tales que cada póliza permanece en una sola clase durante un periodo de tiempo (habitualmente un año).
- La prima correspondiente a cada póliza depende únicamente de la clase en que se encuentra.
- La clase a la que pertenece un asegurado durante un cierto periodo depende únicamente de la clase a la que pertenecía durante el periodo anterior y del número de siniestros durante dicho periodo (*Condición Markoviana*).

Por tanto, un SBM consta de tres elementos:

- La *clase inicial*, C_o a la que son asignados los nuevos asegurados.
- La *escala de tarifas*, **b** = $(b_1,\ldots,b_n)$ en la que se establecen las primas asociadas a cada clase.
-.Las *reglas de transición*, que determinan cuándo se pasa de una clase a otra, y vienen dadas por unas transformaciones T_k tales que $T_k(i)=j$ si se pasa de C_i a C_j cuando se tienen k siniestros. T_k se puede expresar matricialmente:

$$T_k = \left(t_{ij}^k\right)$$

donde

$$t_{ij}^k = 1 \text{ si } T_k(i) = j$$
$$t_{ij}^k = 0 \text{ si } T_k(i) \neq j$$

La *Probabilidad de Transición* de C_i a C_j para un asegurado de parámetro $\Lambda=\lambda$ se calcula como

$$p_{ij}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda).t_{ij}^k$$

donde

$$p_k(\lambda) = \Pr[N = k / \Lambda = \lambda]$$

Las *Matrices de Transición* condicionadas serán

$$P(\lambda) = (p_{ij}(\lambda))$$

Las hipótesis anteriores permiten modelizar el comportamiento de cada asegurado de parámetro λ en el SBM mediante una *Cadena de Markov* (con matriz de transición $P(\lambda)$).

Si suponemos, como es habitual, que la cadena es *ergódica* (es decir, que siempre es posible acceder a una clase dada a partir de cualquier otra, en un número finito de pasos) y *sin ciclos*, entonces, como es bien sabido, la teoría de las Cadenas de Markov nos asegura la existencia de una *distribución estacionaria de probabilidades* $(\Pi_1(\lambda),....,\Pi_n(\lambda))$ que representa el comportamiento a largo plazo de dicha póliza. $\Pi_k(\lambda)$ se interpreta como la probabilidad de que la póliza de parámetro λ se encuentre en la clase *k* cuando, pasado cierto tiempo, el sistema alcanza o al menos se aproxima a su estado estacionario

La distribución estacionaria no es difícil de calcular, demostrándose que coincide con el autovector por la izquierda de la matriz de transición asociado con el autovalor unidad (el *autovalor de Fröbenius*) y cuyas componentes suman la unidad.

Además de las probabilidades estacionarias condicionadas al valor de λ, es posible definir las probabilidades estacionarias no condicionadas $(\Pi_1,....,\Pi_n)$, con una interpretación similar pero referida a una póliza arbitraria. Tales probabilidades se definen como

$$\Pi_s = \int_0^\infty \Pi_s(\lambda)\, dU(\lambda)$$

y si suponemos adecuadamente discretizada la función de estructura:

$$\left.\begin{array}{cc} \lambda_1 & prob(\lambda_1) \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots} \\ \lambda_r & prob(\lambda_r) \end{array}\right\},$$

se cumplirá también

$$\Pi_s = \sum_{i=1}^{r} \Pi_s(\lambda_i).prob(\lambda_i)$$

Hemos de disponer de otras probabilidades:

$\Pi_s^k(\lambda_i)$: Probabilidad de que una póliza de parámetro λ_i se encuentre en la clase s a los k años de antigüedad de la póliza.

El correspondiente vector de probabilidades es

$\Pi^k(\lambda_i) = (\Pi_1^k(\lambda_i), \ldots, \Pi_n^k(\lambda_i))$.

Ciertamente, si $\Pi^0(\lambda_i) = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, es claro que,

$$\Pi^k(\lambda_i) = \Pi^0(\lambda_i).P^k(\lambda_i).$$

Asimismo, las correspondientes probabilidades descondicionadas,

$$\Pi_s^k = \sum_{i=1}^{r} \Pi_s^k(\lambda_i).prob(\lambda_i) \left(= \int_0^\infty \Pi_s^k(\lambda).dU(\lambda) \right)$$

Se suelen distinguir tres problemas en la construcción de un SBM:

- La elección del número de clases y de las reglas de transición.
- La elección de la clase inicial.
- El cálculo de la prima correspondiente a cada clase.

El primer problema de los citados más arriba, continúa abierto: no es posible todavía encontrar el número de clases y las reglas de transición óptimas en general, aunque sí es posible concluir que ciertas reglas son mejores que otras en base a ciertas medidas de eficiencia.

La elección de una clase inicial óptima no puede basarse en la distribución estacionaria, ya que esta última no depende de dicha clase inicial (lo que sí depende de la clase inicial es, obviamente, la velocidad de convergencia a la distribución estacionaria).

Por tanto, cuando hablamos de diseño "óptimo" de un SBM nos referiremos al tercer problema anteriormente mencionado, el de encontrar unas primas "óptimas".

Pero todavía nos resta por aclarar en qué sentido, es decir, respecto a qué función objetivo, deben ser óptimas las primas.

La consecución de tarifas equitativas constituye la razón de ser de cualquier SBM, parece intuitivamente claro que la optimalidad de las primas deberá definirse respecto a este criterio. En otras palabras, el objetivo del diseño debe ser maximizar la *equidad* del sistema resultante.

El diseño de un SBM en el caso asintótico ha sido ampliamente tratado en la literatura actuarial. Norberg (1976) retoma una idea de Pesonen (1963) establece como prima asociada a una clase de bonus-malus la esperanza matemática de la siniestralidad anual de una póliza "infinitamente vieja" perteneciente a esa clase, demostrando que la escala asi establecida (conocida como **escala de Bayes**) minimiza el **error cuadrático de tarificación esperado.**

En definitiva, para unas reglas de transición dadas, se trata de obtener los valores de $b_1, b_2, \ldots, b_n$ que maximizan la equidad del sistema haciendo mínima la siguiente función:

$$Q_{Ba}\left(b_1,\ldots,b_n\right)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n}\left(\lambda_i-b_j\right)^2\Pi_j\left(\lambda_i\right)prob\left(\lambda_i\right) \qquad (2.1)$$

que son

$$b_s=\frac{\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\,\Pi_s(\lambda_i)\,prob(\lambda_i)}{\Pi_s} \qquad s=1,\ldots n \qquad (2.2)$$

Heras, Vilar y Gil (2002) proponen una nueva medida para la evaluación de la equidad de un SBM que sirve de fundamento a un nuevo criterio asintótico para la determinación de las primas. Bajo el mismo la equidad del sistema se maximiza para aquellas primas que minimizan la función

$$Q_{Ma}\left(b_1,\dots,b_n\right)=\sum_{i=1}^{r}\left|\sum_{j=1}^{n}\Pi_{j}\left(\lambda_i\right).b_j-\lambda_i\right|prob(\lambda_i) \qquad (2.3)$$

Minimizar esta función es equivalente a resolver el siguiente programa lineal

$$\text{Min } \sum_{i} prob(\lambda_i).(y_i^{+}+y_i^{-})$$

$$\left.\begin{array}{c} b_1.\Pi_1(\lambda_1)+\dots+b_n.\Pi_n(\lambda_1)+y_1^{-}-y_1^{+}=\lambda_1 \\ \dots\dots \\ b_1.\Pi_1(\lambda_r)+\dots+b_n.\Pi_n(\lambda_r)+y_r^{-}-y_r^{+}=\lambda_r \end{array}\right\} \qquad (2.4)$$

+ Restricciones comerciales y técnicas.

De esta forma mediante la resolución de un programa lineal es posible obtener unas primas que maximizan la equidad del sistema que cumplen determinadas propiedades deseables en el diseño del SBM. Véase Heras, y otros (2004)

3.- Transparencia de un SBM.

En algunas ocasiones, debido a la disminución de los ingresos por primas que se produce al situarse gran parte de los asegurados en las clases de mayor descuento, el sistema cae en déficit financiero por lo que se han de incrementar las primas para conseguir el equilibrio financiero. Esto supone que los descuentos e incrementos en las primas establecidos en el condicionado de la póliza no se mantienen efectivamente en la realidad.

Imaginemos que un asegurado tiene derecho a un descuento en la prima del año siguiente de un 20% por no haber tenido siniestros pero que la empresa, para mantener el equilibrio financiero, ha de incrementar las primas de todas las clases un 7%. El descuento efectivo no es el prometido.

Parece razonable pensar que un SBM debe ser diseñado de forma que esta “falta de transparencia” no se produzca.

Este es un concepto que se discute recientemente en la literatura actuarial y para el que se proponen algunas soluciones (véase Baione, Levantesi y Menzietti (2002), Verico (2002) y Lemaire (2004).

Consideremos un conjunto de pólizas para las que se pone en funcionamiento un sistema SBM. Supondremos que van a permanecer en el sistema durante un número m de años.

Cabría preguntarse se existen unas primas que producen equilibrio financiero durante todos los años. Esto implicaría que el sistema

$$\left.\begin{array}{c} b_1.\Pi_1^0 + \ldots + b_n.\Pi_n^0 = E(\lambda) \\ \ldots\ldots. \\ b_1.\Pi_1^m + \ldots + b_n.\Pi_n^m = E(\lambda) \end{array}\right\} \qquad (3.1)$$

posee solución.

Ciertamente la tiene: $b_i = E(\lambda) \quad i = 1,\ldots,n$ esto es, no hay un SBM.

Si se imponen restricciones adicionales (simplemente que sean crecientes con la clase), en general, no tendremos solución.

Recurriendo a la metodología propuesta por Heras y otros ((2002) y (2004)), algunas posibles soluciones al problema son:

1.- Tratar el mismo como uno de programación por metas. El objetivo es conseguir unas primas que se acerquen lo más posible al equilibrio financiero en cada uno de los años. Habrá que resolver el siguiente programa

$$\text{Min} \sum_i (y_i^+ + y_i^-)$$

$$\left.\begin{array}{c} b_1.\Pi_1^0 + \ldots + b_n.\Pi_n^0 + y_1^- - y_1^+ = E(\lambda) \\ \ldots\ldots. \\ b_1.\Pi_1^m + \ldots + b_n.\Pi_n^m + y_n^- - y_n^+ = E(\lambda) \end{array}\right\} \qquad (3.2)$$

+ Restricciones comerciales y técnicas

Pero nos parece un objetivo muy pobre a la hora de diseñar un SBM que lógicamente ha de perseguir su equidad.

2.- Siendo más razonable que el objetivo sea conseguir la mayor equidad del SBM, es posible considerar su transparencia como una restricción más.
Así consideraremos el objetivo tradicional de equidad asintótica,

$$\text{Min} \sum_i prob(\lambda_i).(y_i^+ + y_i^-)$$

$$\left.\begin{array}{c} b_1.\Pi_1(\lambda_1) + ... + b_n.\Pi_n(\lambda_1) + y_1^- - y_1^+ = \lambda_1 \\ .... \\ b_1.\Pi_1(\lambda_r) + ... + b_n.\Pi_n(\lambda_r) + y_r^- - y_r^+ = \lambda_r \end{array}\right\} \quad (3.3)$$

+ restricciones comerciales y técnicas

y añadiremos una restricción razonable: conseguir el equilibrio financiero global.

$$(b_1.\Pi_1^0 + ... + b_n.\Pi_n^0 - E(\lambda)).(1+i)^{-1/2} + ... + (b_1.\Pi_1^m + ... + b_n.\Pi_n^m - E(\lambda)).(1+i)^{-m-1/2} = 0 \quad (3.4)$$

Esta última restricción plantea el equilibrio financiero para el conjunto de las pólizas y m años en términos de valor actual.

Las primas así obtenidas no tendrán que modificarse.

Con mayor realismo podemos suponer que el grupo inicial de pólizas irá reduciéndose de acuerdo a una especie de tabla de mortalidad tal que a partir de un año de antigüedad m se cumplirá ${}_m p = 0$. (${}_s p$ es la probabilidad de que una póliza supere s años en el sistema).

La restricción de equilibrio financiero quedará ahora:

$$\begin{array}{l}(b_1.\Pi_1^0 + ... + b_n.\Pi_n^0 - E(\lambda)).(1+i)^{-1/2} + {}_1 p.(b_1.\Pi_1^0 + ... + b_n.\Pi_n^0 - E(\lambda)).(1+i)^{-1/2} + ... \\ .... + {}_m p.(b_1.\Pi_1^m + ... + b_n.\Pi_n^m - E(\lambda)).(1+i)^{-m-1/2} = 0\end{array}$$

(3.5)

4.- Ejemplos.

Desarrollaremos a continuación varios ejemplos numéricos en los que analizaremos las posibilidades de la metodología de la programación por metas para el diseño de SBM incluyendo una posible solución al problema de su transparencia.

En estos ejemplos consideremos una cartera de autos y un SBM con las siguientes características:

** La función de estructura discreta

λ_i	0.033	0.066	0.099	0.132	0.165	0.198	0.231	0.264	0.297	0.330
$p(\lambda_i)$	0.28770	0.21179	0.23174	0.06609	0.08872	0.02623	0.03636	0.01126	0.01592	0.00510

λ_i	0.363	0.396	0.429	0.462	0.495	0.528	0.561	0.594	0.627	0.660
$p(\lambda_i)$	0.00732	0.00240	0.00348	0.00116	0.00171	0.00058	0.00085	0.00029	0.00043	0.00078

procede de la aplicación del método de discretización de Vilar (2000) a la función de estructura continua correspondiente a una **distribución inversa gaussiana** de parámetro λ

$$u(\lambda) = \frac{g}{\sqrt{2\pi h \lambda^{3/2}}} e^{-\frac{1}{2h\lambda}(\lambda - g)^2} \quad g, h > 0$$

con *g=0.101081* y *h=0.062981*, tomada de Lemaire (1995, págs 35 a 37).

* * Las reglas de transición del SBM son las siguientes:

	Clase después de siniestros				
Clase	0	1	2	3	≥4
10	**9**	**10**	**10**	**10**	**10**
9	**8**	**10**	**10**	**10**	**10**
8	**7**	**10**	**10**	**10**	**10**
7	**6**	**9**	**10**	**10**	**10**

6	**5**	**8**	**10**	**10**	**10**
5	**4**	**7**	**9**	**10**	**10**
4	**3**	**6**	**8**	**9**	**10**
3	**2**	**5**	**7**	**9**	**10**
2	**1**	**4**	**6**	**7**	**9**
1	**1**	**3**	**5**	**6**	**8**

Ejemplo 1.- Supongamos en primer lugar que la clase de entrada es la 5. Las probabilidades descondicionadas para distintos años son

	Π_1^i	Π_2^i	Π_3^i	Π_4^i	Π_5^i	Π_6^i	Π_7^i	Π_8^i	Π_9^i	Π_{10}^i
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0.90661	0	0	0.08633	0	0.006520	0.00053
2	0	0	0.82634	0	0	0.14924	0	0.010506	0.011262	0.002637
3	0	0.75665	0	0	0.19531	0	0.01290	0.026652	0.001977	0.006494
4	0.69556	0	0	0.22910	0	0.014274	0.04369	0.001514	0.008811	0.007040
10	0.71676	0.11649	0.061260	0.020832	0.044212	0.004858	0.01166	0.012148	0.005018	0.006750
14	0.76434	0.06563	0.085967	0.019576	0.021288	0.015368	0.007203	0.007963	0.006870	0.005807
19	0.77214	0.06579	0.076817	0.026255	00.01889	0.011679	0.009608	0.006420	0.006472	0.005922
∞	0.77307	0.06779	0.076825	0.023807	0.020154	0.010829	0.008746	0.006737	0.006134	0.005894

Construyamos una escala de primas en la que la prima de la clase de entrada coincide con la esperanza de la siniestralidad incrementándose las de las clases sucesivas un 15% y disminuyendo las de las anteriores un 5%. Esto es:

i	B
1	0.08227
2	0.08660
3	0.09115
4	0.09595
5	0.10100
6	0.11615
7	0.13358
8	0.15361
9	0.17666
10	0.20316

Se puede comprobar fácilmente que en el año inicial se cumple la condición de equilibrio financiero, pero en los años sucesivos si no se modifican las primas existirá un déficit D de acuerdo a la siguiente tabla.

i	D_i	k_i
0	0	1
1	-0.0012	1.012
2	-0.0042	1.043
3	-0.0082	1.089
4	-0.0110	1.123
5	-0.0115	1.129
6	-0.0124	1.141
7	-0.0131	1.149
8	-0.0133	1.151
9	-0.0136	1.156
10	-0.0138	1.158
11	-0.0139	1.160
12	-0.0140	1.162
13	-0.0141	1.163
14	-0.0142	1.163
15	-0.0142	1.164
16	-0.0143	1.165
17	-0.0143	1.165
18	-0.0143	1.165
19	-0.0143	1.165

En ella:

$$D_i = b_1.\Pi_1^i + ... + b_n.\Pi_n^i - E(\lambda) \qquad (4.1)$$

y para conseguir equilibrio financiero habrá que multiplicar las primas iniciales por un coeficiente k_i. Notemos por ejemplo que en el quinto año, para conseguir mantener el equilibrio financiero, la prima de cada una de las clases ha tenido que elevarse más de un 12%. El sistema propuesto no es transparente.

Ejemplo 2.- Consideremos ahora la escala de Bayes calculada de acuerdo con (2.2):

i	EB
1	0.0824
2	0.1222
3	0.1278
4	0.1734
5	0.1887
6	0.2324
7	0.2620
8	0.3039
9	0.3391
10	0.3789

Sabemos que la escala de Bayes no depende de la clase de entrada y que posee la propiedad de equilibrio financiero una vez alcanzado el estado estacionario.

Sin embargo la clase de entrada si determina la necesidad o no de incrementar la prima base.

En la siguiente figura podemos observar la evolución de las diferencias (4.1) cuando la escala de primas es la de Bayes y la clase de entrada es la 1, 2 ,3 , 4, 6 y 8. La gráfica inferior corresponde a la citada diferencia cuando la clase de entrada es la 1 y por encima se encuentran sucesivamente las correspondientes a las siguientes clases de entrada, siendo la mas elevada la de la clase 8.

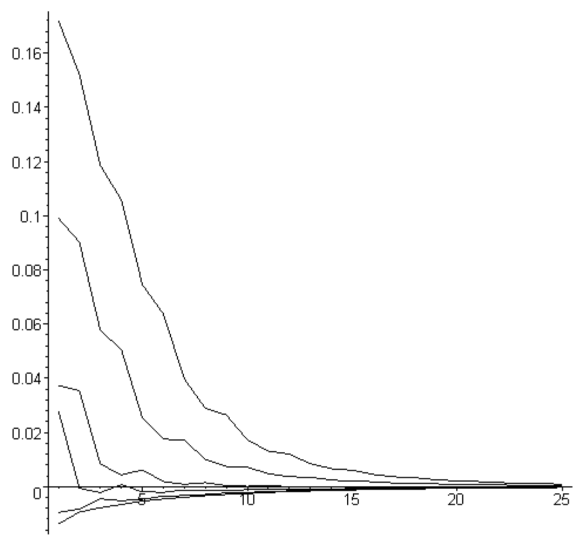


Figura 1

Notemos que cuando la clase de entrada es la 1 o la 2 (gráfica por debajo del eje de abcisas), la escala de Bayes produce un déficit y hasta que no nos acercamos al estado estacionario no se tiene equilibrio financiero. Las primas son claramente insuficientes hasta que se alcanza el estado estacionario. La escala de Bayes no resulta adecuada desde la perspectiva de la transparencia del sistema.

Cuando la clase de entrada es la 4, 6 u 8 (gráficas por encima del eje de abcisas) no es necesario incrementar las primas, pero hasta que se alcanza el estado estacionario la prima media pagada por los asegurados es superior a la siniestralidad esperada. La escala de Bayes puede no ser adecuada no en cuanto a su falta de transparencia sino en cuanto que puede considerarse una escala de primas "abusiva".

Ejemplo 3.- A continuación ejemplificaremos dos posibles soluciones al problema de la transparencia de un SBM fundamentadas en la metodología propuesta por Heras y otros ((2002) y (2004).

Formularemos el objetivo de equidad asintótica (programa lineal (3.3)) con las siguientes restricciones técnicas y comerciales: las primas son crecientes (propiedad de monotonía), el incremento entre dos primas consecutivas se encuentra entre el 5% y el 60%, la prima de la clase 10 es a lo sumo cinco veces la de la primera.

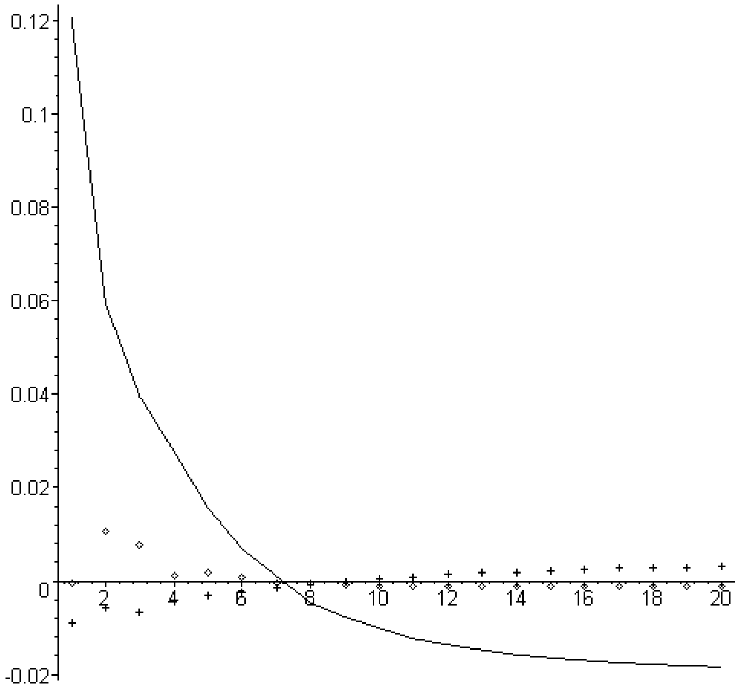
Se añade además una restricción de equilibrio financiero global de acuerdo a (3.4) para un horizonte de 20 años y un tipo de valoración i=0.03.

Las escalas de primas obtenidas cuando las clases de entrada son la 2, 4 y 8 se presentan en la siguiente tabla:

	2	4	8
b_1	0.08752	0.08671	0.07448
b_2	0.09189	0.09105	0.07821
b_3	0.09649	0.09560	0.08212
b_4	0.15439	0.10038	0.08622
b_5	0.24702	0.16061	0.09053
b_6	0.36002	0.25698	0.09506
b_7	0.37803	0.37453	0.13855
b_8	0.39693	0.39326	0.22168

b_9	0.41677	0.41292	0.35469
b_{10}	0.43761	0.43357	0.37243

En la siguiente figura se representa la evolución de las diferencias (4.1)



Clase 2 (+) clase 4 (o) clase 8 (---)
Figura 2

Se observa que la restricción de equilibrio global propuesta tiene como consecuencia déficit y superávit en los distintos años.

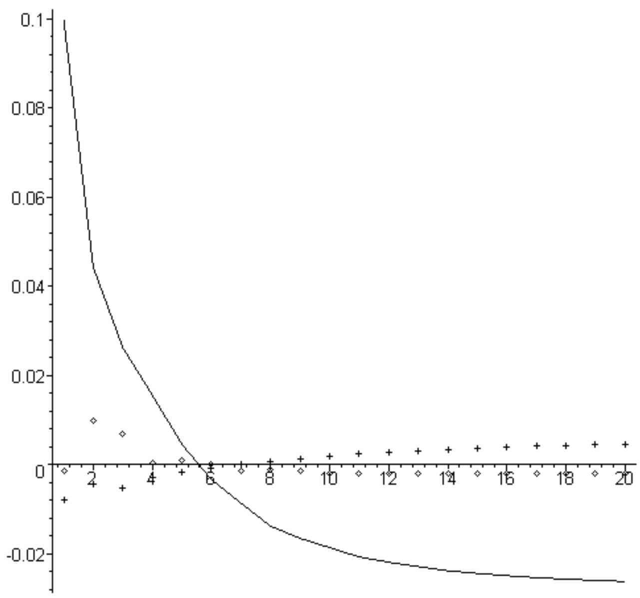
Un segundo planteamiento, que consideramos más realista, supone las pólizas irán saliendo del sistemas por diversas causas de acuerdo con unas determinadas probabilidades. Supongamos las siguientes:

i	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$_i$**p**	1	0.98	0.95	0.92	0.90	0.88	0.85	0.82	0.79	0.76	0.71
i		**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	
$_i$**p**		0.66	0.60	0.52	0.45	0.36	0.28	0.19	0.07	0	

Con el mismo objetivo y restricciones técnicas y comerciales pero ahora con la restricción de equilibrio financiero global (3.5), las escalas de primas son ahora

	2	4	8
b_1	0.08879	0.08606	0.06748
b_2	0.09323	0.09037	0.07086
b_3	0.09789	0.09488	0.07440
b_4	0.15663	0.09963	0.07812
b_5	0.25061	0.15941	0.08203
b_6	0.36525	0.25506	0.08613
b_7	0.38352	0.37174	0.12553
b_8	0.40269	0.39032	0.20086
b_9	0.42283	0.40984	0.32137
b_{10}	0.44397	0.43033	0.33744

Y las graficas de las diferencias (4.1)



Clase 2 (+) clase 4 (o) clase 8 (---)
Figura 3

6. Bibliografía.

- Baione, Levantesi y Menzietti (2002).- "The development of a optimal bonus-malus system in a competitive market".- *ASTIN Bulletin* vol 32 nº 1. 159-170.
- Gil, Gª Pineda, Heras y Vilar (2005).- "Criterios asintóticos para el cálculo de primas en sistemas bonus-malus". *Anales del Instituto de Actuarios Españoles* 2003.
- Heras, A., Vilar, J.L. y Gil, J.A (2002). Asymptotic Fairness of Bonus-Malus Systems and Optimal Scales of Premiums. *The Geneva Papers of Risk and Insurance Theory* 27, 61-82.
- Heras, A., Gil, J.A, Garcia-Pineda, P. y Vilar, J.L. (2004). An Application of Linear Programming to Bonus Malus System Design. ASTIN Bulletin vol. 34 (2) 435-456.
- Kemeny, J.G. y Snell, J.L. (1976). *Finite Markov Chains*. Springer-Verlag.
- Klugman, S.A.; Panjer, H.H. y Willmot, G.E. (1998). *Loss Models. From Data to Decisions*. Wiley series in Probability and Statistics.
- Lemaire, J. (1985). *Automobile Insurance. Actuarial Models*. Kluwer-Nijhoff Publishing.
- Lemaire, J. (1995). *Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance*. Kluwer Academic Publishers.
- Lemaire, J. (2004). *Bonus-Malus Systems. Encyclopedia of Actuarial Science*. Wiley.
- Norberg, R. (1976). A Credibility Theory for Automobile Bonus Systems. *Scandinavian Actuarial Journal*, 92-107.
- Pesonen, M. (1963). A Numerical Method of Finding a Suitable Bonus Scale. *ASTIN Bulletin* 2, 102-108.
- Verico, P. (2002). Bonus-Malus Systems: "Lack of Transparency" and Adequacy Measure. *ASTIN Bulletin* 32 (2), 315-318.
- Vilar, J.L. (2000). Arithmetization of Distributions and Linear Goal Programming. Insurance: Mathematics and Economics 27, 113-122.