Capitalización colectiva

Por

AGUSTIN SANS Y DE LLANOS

Se podría decir que la capitalización colectiva es un régimen de reparto con fondo matemático de garantía, aplicable a regímenes de jubilación.

El Actuario que ha tratado este sistema con más rigor ha sido Edouard Savignon, en su Tesis *Theorie Mathématique de la capitalisation collective viagère*, de la que extraemos seguidamente las ideas básicas pero con una proyección eminentemente técnica y práctica.

El fundamento del sistema es:

La reserva que la Compañía contabiliza en el Pasivo de su Balance no es el resultado de observar en la práctica el importe del excedente de ingresos (cuotas o primas) sobre gastos (rentas pagadas). Antes al contrario, tal reserva se calcula actuarialmente, lo que equivale a decir que su cuantía debe cubrir la diferencia entre el valor actual de las obligaciones del Asegurador, tanto respecto a los activos (rentas diferidas o en formación) como de los jubilados (rentas inmediatas o en disfrute), y el valor actual de las primas a pagar por los activos actualmente conocidos, es decir, sin hacer proyecciones demográficas ni hipótesis de alimentación del colectivo de los activos cotizantes.

Al inicio del sistema la primera cuota o tipo de prima también se calcula habida cuenta de la equivalencia entre los valores actuales de los compromisos asumidos por el Asegurador y de las primas a pagar por los Asegurados conocidos.

Una de las características esenciales del régimen es la de que si el grupo de activos quedase cerrado a la entrada y sólo tuviese salidas por muerte o por paso al grupo de jubilados, el tipo de prima no se altera. Ello se prueba en el Apéndice.

Así pues, en el caso de mortalidad superior a la que se puede considerar como normal, el importe de la prima a satisfacer por los activos sobrevivientes no tendrá modificación. Esta consecuencia está conectada directamente con la función que desempeña el Seguro de Vida. Gracias al sistema, las cotizaciones de los activos quedan garantizadas contra la muerte del cotizante.

Este tipo de garantía, por así decir, ni existe ni puede existir en un sistema de jubilación por reparto. En efecto: en el caso de que el reclutamiento de Asegurados jóvenes tienda a reemplazar a los activos fallecidos o jubilados, tal hecho se tiene en cuenta y se reajusta el tipo de prima periódicamente.

Tal reajuste se realiza según el principio fundamental de equivalencia entre el valor actual de los compromisos, antiguos y nuevos, con el valor actual de las primas a cobrar de los activos vivos y conocidos en la época del reajuste, aumentando este último valor actual con el importe de la reserva matemática existente.

Ya veremos cómo la cotización que resulta de la fórmula del reajuste o transformación —que es la clave del sistema— será mayor o menor que la precedente, y también la posibilidad comercial de dejarla estabilizada.

Pero ya se puede anticipar lo que sigue.

En capitalización individual clásica, la decisión unilateral del Asegurado de cesar en el pago de primas obliga al Asegurador a reducir las garantías en función del importe alcanzado por la reserva matemática.

Igual procedimiento puede extenderse a un contrato de capitalización colectiva, contando con la solidaridad de los miembros del grupo asegurado. El Asegurador, respecto a los miembros integrantes de aquél, asume unos compromisos que quedan determinados en función de las primas a pagar por los activos del grupo. Si algunos de entre ellos dejan de pagar su cotización, por causa distinta al fallecimiento o jubilación, los compromisos del Asegurador son corregidos, reajustados, en función del importe de la reserva matemática colectiva y del valor actual de las primas a satisfacer por los activos que subsisten en el colectivo. Por ello es factible mantener los compromisos del Asegurador a cambio de una ligera modificación del tipo de prima.

El sistema de capitalización colectiva pivota, pues, sobre el principio de un reajuste periódico del tipo medio de la prima. Este es una función Θ_t del tiempo y que evoluciona con las bajas de Asegurados, altas, devaluaciones monetarias, variaciones de salarios, etc. Se verá que todas estas evoluciones quedan amortiguadas, en sus efectos, por el juego de las reservas matemáticas, lo cual hace viable el sistema.

De lo anterior se desprende que la capitalización colectiva utiliza una técnica actuarial que permite enmarcarla dentro de las operaciones de Seguros sobre la Vida. En efecto: el tipo de prima y la cuantía de las reservas son funciones uno de otra y se determinan con ayuda de una Tabla de mortalidad.

La primera prima se calcula como si el grupo no hubiera de renovarse, es decir, admitiendo que los activos que fallezcan o se jubilen no hubieran de ser reemplazados. De ello deriva el que el tipo de cotización es superior al que resultaría en un sistema de reparto basado en una ley, más o menos optimista, de renovación de los activos. Pero si, prácticamente y no hipotéticamente, se producen nuevas incoporaciones durante la vida del sistema, se tienen en cuenta conforme se producen las altas y tan solo conforme se conocen los nuevos adherentes. Entonces el tipo de prima se reajusta en la forma dicha, resultando una nueva cotización ligeramente inferior.

Y ello porque la carga que suponen los servicios pasados (antigüedad en el régimen o en la empresa) de los activos de más edad, de un lado, y, de otro, las rentas a pagar a los jubilados que nunca cotizaron, gravita, al comienzo del sistema, sobre los activos existentes en ese momento. Si después se integran cabezas jóvenes en el grupo, sus predecesores desplazan sobre ellos una parte de su carga, y ésta se distribuye justamente sobre todos los cotizantes, antiguos y nuevos.

Esta manera de actuar es tal que no da lugar a sorpresas, puesto que no se recurre a especulaciones sobre la ley de entradas de eventuales cotizantes. En la hipótesis más desfavorable, o sea, la de no reemplazar a los activos muertos o jubilados, el tipo de prima inicialmente calculado permanece constante. Y contrariamente, en el caso más verosímil de reclutamiento de cabezas jóvenes, el tipo de prima decrece.

Ahora bien: dimisiones o bajas masivas de activos acarrearían un crecimiento de la prima, ya que los activos que subsistan en el grupo deben soportar las cargas que ex-cotizantes dejan al ser baja. Ya se ha señalado cómo, en cambio, la muerte de un número cualquiera de activos no es nunca determinante de un aumento de la prima. Una vez más se subraya este hecho que es una característica esencial del sistema y que pone de relieve el papel desempeñado por el Asegurador.

Este, al utilizar la técnica de la capitalización colectiva, debe soportar, al igual que en todos los Seguros sobre la Vida, las consecuencias derivadas de los fallecimientos de los Asegurados.

Consideremos un activo joven que paga, en el sistema, una prima superior a la que hubiera pagado si hubiese suscrito, individualmente, una póliza de Renta Diferida. Soportará el pago de una, por así decir, sobre-prima a fin de permitir a los jubilados que nunca cotizaron el cobro de una renta y a los activos de más edad, pagar una cotización igual a la suya y, por consiguiente, inferior a la que hubiesen tenido que pagar, en capitalización individual, para constituirse sus pensiones de jubilación.

Pues bien, la desaparición de este activo, para un régimen de reparto, es una pérdida para el sistema y ello cualquiera que sea la causa de la desaparición.

En capitalización colectiva esa desaparición no tiene repercusión alguna sobre la prima si obedece a fallecimiento del cotizante. Es el Asegurador quien soporta las consecuencias, encajando un siniestro cuyo importe es igual al valor actual de las sobreprimas que el activo fallecido hubiera pagado hasta la edad de jubilación, si hubiera vivido hasta entonces.

En ciertos casos, este siniestro puede representar una suma elevada que incite al Asegurador a reasegurar el riesgo de fallecimiento de las cabezas jóvenes.

Pero, además, las consecuencias de la existencia de este seguro para caso de muerte no se limitan a la necesidad técnica de un reaseguro cuando el valor actual de las que hemos denominado sobreprimas excede del pleno de conservación. También hay que contemplar otras cuestiones técnicas propias del Seguro de Vida: extraprimas para profesiones peligrosas, exclusión del riesgo de guerra, etc.

La versión matemática de estas ideas es la seguidamente expuesta.

Sean n cabezas de edades $x_i (i=1, 2, ..., n)$, menores que w (edad de jubilación) que deben percibir a la edad w rentas, respectivamente, designadas por r_i y siendo los salarios actuales de estas n cabezas S_i.

El grupo de jubilados se supone lo integran n cabezas de edad y_i mayores que w a las que hay que servir inmediatamente rentas R_i.

En el momento 0 el tipo medio de cuota queda definido como:

$$\Theta = \frac{\Sigma r_i \cdot {}^{w-x_i/}a_{x_i} + \Sigma R_i \cdot a_{y_i}}{\Sigma S_i \cdot a_{x_i : w-x_i}} \qquad (1)$$

La reserva matemática a constituir a final de año será:

$$V = \Sigma r_i \cdot {}^{w-(x_i+1)/}a_{x_i+1} + \Sigma R_i \cdot a_{y_i+1} - \Theta \cdot \Sigma S_i \cdot a_{x_i+1 : w-(x_i+1)}$$

Pero al inicio del segundo año hay que reajustar la cotización teniendo en cuenta:

a) Las bajas de ciertos activos.

b) Ingresos de nuevos activos.

c) Variaciones en los salarios.

Entonces, el nuevo grupo de activos se compondrá de cabezas de edad x'_i, siendo S'_i los nuevos salarios y r'_i las nuevas rentas habida cuenta de los nuevos salarios. Y el grupo de jubilados tendrá cabezas de edades y'_i que cobrarán nuevas rentas R'_i.

El Asegurador para hacer frente a sus nuevos compromisos cuenta con la reserva V y el valor actual de las primas a cobrar de los activos.

En estas condiciones, la ecuación de equilibrio será:

$$V+\Theta' \cdot \Sigma S'_i \cdot \mathrm{a}_{x'_i:w-x'_i}=\Sigma R^{\circ}_{y_i} \cdot \mathrm{a}_{y_i}+\Sigma r'_i \cdot {}_{w-x'_i}/\mathrm{a}_{x'_i} \qquad (2)$$

Evidentemente, el nuevo tipo Θ' será igual, mayor o menor que Θ.

Si Θ' fuere mayor que Θ este último tipo se puede mantener con la condición de aumentar V en consecuencia. E inversamente.

Si los salarios suben, el Asegurador, comercialmente, puede fácilmente mantener un tipo de cotización constante. Sean:

Θ_n = El tipo de prima correspondiente al ejercicio n.

l_x = El número de activos de edad x durante el ejercicio n.

r_x = El conjunto de rentas diferidas (o en formación) a pagar a los activos cuando alcancen la edad w, suponiéndose que el salario medio es igual a la unidad en el transcurso del ejercicio n considerado, y que todos los activos reciben el mismo salario.

r_y = El conjunto de las rentas inmediatas (o en disfrute) pagadas a los jubilados de edad y ($y \leqslant w$).

En el ejercicio $(n+1)$ las rentas r_x y r_y serán ${}_1p_x \cdot r_x$ y ${}_1p_y \cdot r_y$. Además habrán muerto activos en número dado por:

$$\sum^{w-2} q_x \cdot l_x$$

y, finalmente, l_{w-1} activos se jubilarán o morirán.

Estos hechos, según lo visto, no alteran el tipo Θ_n y el valor actual de las primas a cobrar será:

$$\Theta_n \cdot \Sigma\, {}_1p_x \cdot l_x \cdot \mathrm{a}_{x+1:w-(x+1)}$$

Si los activos definidos por el número:

$$N=\left(\sum^{w-2} l_x q_x\right)+l_{w-1}$$

se reemplazan por N nuevos activos, todos de edad 30, y si el salario medio pasa de 1 a $(1+z)$ el nuevo tipo de prima será:

$$\Theta_{n+1} = \frac{\Theta_n \cdot \Sigma_1 p_x \cdot l_x \cdot a_{x+1:w-(x+1)} + \Sigma_1 p_x \cdot z \cdot r_x \cdot {}_{w-(x+1)}/a_{x+1} + z \cdot \Sigma_1 p_y \cdot r_y \cdot a_{y+1} + N \cdot (1+z) \cdot \phi_{30} \cdot {}_{w-30}/a_{30}}{(1+z) \cdot \left(\Sigma_1 p_x \cdot l_x \cdot a_{x+1:w-(x+1)} + N \cdot a_{30:w-30} \right.} \tag{3}$$

Esta expresión de Θ_{n+1} se condensa en esta obra:

$$\Theta_{n+1} = \frac{(A \cdot \Theta_n + B) + C \cdot z}{D \cdot (1+z)} \tag{4}$$

en la cual es:

$$A = \Sigma_1 p_x \cdot l_x \cdot a_{x+1:w-(x+1)} = \Sigma l_{x+1} \cdot a_{x+1:w-(x+1)}$$

$$B = N \cdot \phi_{30} \cdot {}_{w-30}/a_{30}$$

$$C = \Sigma_1 p_x \cdot r_x \cdot {}_{w-(x+1)}/a_{x+1} + \Sigma_1 p_y \cdot r_y \cdot a_{y+1} + B$$

$$D = A + N \cdot a_{x:w-x}$$

Puede observarse que:

$\Theta_n \cdot A =$ valor actual de las primas exigibles si las modificaciones relativas a salarios y nuevos adherentes no hubiesen existido ($N=0$; $z=0$).

$\Sigma_1 p_x \cdot z \cdot r_x \cdot {}_{w-(x+1)}/a_{x+1} =$ valor actual del incremento de las rentas (proporcional al alza de los salarios) de los activos sobrevivientes.

$z \cdot \Sigma_1 p_y \cdot r_y \cdot a_{y+1} =$ valor actual del incremento de rentas (proporcional al alza salarial) de los jubilados sobrevivientes.

$N \cdot (1+z) \cdot \phi_{30} \cdot {}_{w-30}/a_{30} =$ valor actual de las nuevas rentas para los N nuevos adherentes, y que son proporcionales a $(1+z)$, nuevo salario medio. Con ϕ_{30} se designa al tipo de renta en función del salario unitario correspondiente a la antigüedad $(w-30)$.

En el denominador de (3) figura el valor actual de los nuevos salarios $(1+z)$ correspondientes a los activos sobrevivientes y a los N nuevos activos.

La fórmula (4) revela que Θ_{n+1} es una función homográfica creciente con z y cuyas variaciones quedan representadas por una hipérbola que admite una asíntota horizontal de ordenada C/D.

Será, pues, $\Theta_{n+1} < \dfrac{C}{D}$ siendo este límite el valor del tipo de prima si la Póliza hubiese tomado efecto en el transcurso del ejercicio $(n+1)$.

Una generalización de las fórmulas (1) y (2) correspondientes al tipo de prima y a la reserva es la siguiente.

Según la composición del grupo estudiado, en un instante t cualquiera se define una función $S(x, t)$ relativa a la distribución de salarios y rentas, y tal que:

$S(x, t) \cdot dx$ sea la suma de los salarios anuales, en el instante t, de los activos de edades comprendidas entre x y $x+dx$.

$R \cdot S(x, t) \cdot dx$ sea la suma de las rentas anuales de los jubilados de edades comprendidas entre x y $x+dx$ (se supone a R independiente de x).

En el instante $t=0$ el tipo de cotización Θ_0 viene dado por la ecuación:

$$\Theta_0 \int_{x_0}^{w} S(x,0) \quad a_{x:\overline{w-x}|}\, dx = R \cdot \left(\int_{x_0}^{w} S(x, 0) \cdot {}_{w-x/}a_x \cdot dx + \int_{w}^{\infty} S(x, 0) \cdot a_x \cdot dx \right) \tag{4}$$

Suponiendo que el salario no variará con el tiempo, esta ecuación expresa la igualdad, en el origen, entre valores actuales de las primas y las rentas vitalicias inmediatas o diferidas previsibles en el instante 0.

En el momento t, el tipo θ_0 será θ_t y el Asegurador habrá constituido una reserva V_t, con lo que la ecuación de equilibrio será:

$$\begin{aligned} V_t + \theta_t \int_{x_0}^{w} S(x, t)\, a_{x:\overline{w-x}|}\, dx &= \\ = R \cdot \left(\int_{x_0}^{w} S(x, t) \cdot {}_{w-x/}a_x \cdot dx + \int_{w}^{\infty} S(x, t) \cdot a_x \cdot dx \right) \end{aligned} \tag{5}$$

El grupo puede ser cerrado o abierto y $S(x, t)$ adoptará diversas formas.

Desarrollos Numéricos. Grupo de composición real y Salarios constantes

Se ha partido de un colectivo real de activos (sin considerar, pues, jubilados) de cabezas de edades comprendidas entre los 15 y los 64 años.

Tal colectivo fue objeto, previamente, de un ajuste logarítmico-normal llegándose a un efectivo de 10.000 cabezas.

Se supone que los salarios son constantes e iguales a la unidad y que la renta vitalicia de jubilación a servir desde los 65 años es de cuantía igual al salario unidad.

El correspondiente Cuadro numérico figura a continuación.

Se ha utilizado la Tabla P.F. 60/64 al interés del 4,5%.

No se han incluido recargos de gestión ni interna ni externa.

La cuota media pura θ correspondiente al momento 0, en régimen de Capitalización Colectiva, ha resultado ser:

$$\theta = 17{,}14\,\%$$

Si la pensión fuese del 15% del salario, la cuota sería:

$$0{,}15 \times 17{,}14\,\% = 2{,}571\,\%$$

La última columna del Cuadro proporciona para cada edad considerada la prima anual pura en régimen de Capitalización individual, pudiendo observarse que la primera media ponderada por el número de cabezas a cada edad es de:

$$\frac{\sum_{x} l_x \cdot P_{x:h}}{\sum_{x} l_x} = 23{,}42\,\%$$

Además, se comprueba lo dicho en este Informe en el sentido de que los jóvenes preferirían constituirse su propia jubilación en régimen de capi individual porque pagarían prima menor que la cuota promedia de la capi colectiva.

En efecto, ésta ha resultado ser de 17,14% por lo que las cabezas de edad inferior a 37 años pagarían menos individualmente. En cambio desde la edad de 37 años, se paga menos por capi colectiva; ESTO PRUEBA QUE LA CUOTA COLECTIVA SOLO DEBE VENDERSE EN REGIMEN DE ADHESION OBLIGATORIA Y NO FACULTATIVA.

Es de señalar que la cuota en capi colectiva se ha calculado acumulativamente, a fin de conocer su crecimiento con lo que el valor de la misma para cada edad del colectivo considerado equivale, en realidad, a haber calculado la cuota en capi colectiva para tantos colectivos como edades contempladas.

No se ha juzgado de positivo interés calcular las cuotas sucesivas, habida cuenta del importe de la reserva matemática, y de hipótesis de altas y variaciones salariales, por cuanto ello se aborda en el Desarrollo Numérico posteriormente expuesto y el cual es de más amplio horizonte.

Grupo de composición real y Salario constante
Unidad

x	l_x	R. D.	R. T.	Cuota en Capi colectiva %	Prima en Capi individual %
15	5	1,047097	20,2577	5,17	5,17
16	11	1,094628	20,1317	5,35	5,43
17	20	1,144365	20,0011	5,55	5,72
18	35	1,196432	19,8657	5,79	6,02
19	56	1,250943	19,7252	6,03	6,34
20	83	1,308000	19,5793	6,28	6,68
21	117	1,367705	19,4274	6,55	7,04
22	156	1,430170	19,2689	6,83	7,42
23	199	1,495520	19,1038	7,12	7,83
24	245	1,563925	18,9318	7,41	8,26
25	291	1,635509	18,7526	7,72	8,72
26	335	1,710443	18,5659	8,03	9,21
27	388	1,788883	18,3716	8,37	9,74
28	400	1,871013	18,1691	8,68	10,30
29	441	1,957022	17,9583	9,02	10,90
30	488	2,047083	17,7387	9,38	11,54
31	489	2,141408	17,5100	9,74	12,23
32	487	2,240180	17,2716	10,09	12,97
33	474	2,343636	17,0230	10,43	13,77
34	451	2,452025	16,7640	10,77	14,63
35	441	2,565585	16,4941	11,12	15,55
36	430	2,684587	16,2128	11,23	16,56
37	410	2,809336	15,9197	11,30	17,65
38	380	2,940161	15,6144	11,65	18,83
39	355	3,077356	15,2964	12,01	20,12
40	328	3,221328	14,9653	12,35	21,53
41	299	3,372428	14,6203	12,68	23,07
42	270	3,531108	14,2612	13,00	24,76
43	245	3,697798	13,8872	13,32	26,63
44	216	3,872997	13,4978	13,62	28,69
45	196	4,057259	13,0924	13,91	30,99
46	174	4,251160	12,6703	14,19	33,55
47	154	4,455334	12,2308	14,46	36,43
48	136	4,670494	11,1860	14,72	41,75
49	120	4,897432	11,2966	14,96	43,35
50	107	5,136986	10,8003	15,20	47,56
51	89	5,390128	10,2832	15,41	52,42
52	79	5,657932	9,7444	15,61	58,06
53	66	5,941577	9,1828	15,79	64,70
54	58	6,242396	8,5971	15,97	72,61

x	l_x	R. D.	R. T.	Cuota en Capi colectiva %	Prima en Capi individual %
55	50	6,561906	7,9860	16,13	82,17
56	42	6,901804	7,3478	16,28	93,93
57	37	7,264025	6,6810	16,42	108,73
58	31	7,650775	5,9834	16,54	127,87
59	27	8,064577	5,2530	16,66	153,52
60	23	8,508327	4,4870	16,77	189,62
61	20	8,985353	3,6825	16,87	244,00
62	17	9,499556	2,8360	16,96	334,96
63	15	10,055406	1,9434	17,05	517,41
64	14	10,658187	1,0000	17,14	1.065,82

NOTAS:
R. D. = Valor actual a la edad x de la renta diferida $65-x/a_x$
R. T. = Valor de la renta temporal $a_{x:65-x}$

Grupo de composición real y salario variable

Se parte del mismo grupo de activos que en el caso anterior, pero se abandona ya la hipótesis de salarios constantes introduciéndose la de salario variable a partir del comienzo del segundo año, según un coeficiente z al cual posteriormente se le darán valores.

Al momento inicial se admite de acuerdo con la realidad más o menos intuida que el salario depende de la edad y ello según la relación:

$$S_x = (1{,}02)^{x-15}$$

Así, a la edad de 15 años —que es la primera considerada—, el salario es la unidad y crece progresivamente con la edad, o lo que es igual, con la antigüedad en la empresa, según un coeficiente que se ha valorado en el 2%. El crecimiento z antes aludido será el que resulta en la práctica de la aplicación de los Convenios Colectivos.

Por otro lado la Renta de jubilación será el 15% del salario correspondiente a la edad 64.

Se puede apreciar, a través del Cuadro anexo, que el valor de la cuota media en Capitalización Colectiva resulta ser de:

$$\theta_1 = 4{,}79\ \% \text{ de los salarios}$$

Y también puede apreciarse por dicho Cuadro que se cumplen las observaciones hechas en el ejemplo anterior de que los jóvenes pagan por los viejos, por así decirlo, por lo que es ocioso repetirlas aquí.

La suma de Salarios es de:

$$\Sigma\, l_x \cdot S_x = 15.147{,}23$$

con lo cual, aplicando a este total de salarios la cuota θ_1 resulta una cotización global de 725,55 ptas.

La Reserva Matemática al final del ejercicio primero se halla mediante la fórmula:

$$V_1 = R\left[\sum_{x=15}^{63} {}_1p_x \cdot 1_x \cdot {}^{65-(x+1)/}a_{x+1} + \sum_{y=64}^{\infty} {}_1p_y \cdot 1_y \cdot a_{y+1}\right] - \theta_1 \sum_{x=15}^{63} {}_1p_x \cdot l_x \cdot (1{,}02)^{64-x} \cdot a_{x+1:65-(x+1)}$$

siendo $R = 0{,}15 \times (1{,}02)^{64-15}$.

Se obtiene que:

$$V_1 = 11.641{,}7 + 61{,}716 - 0{,}0479 \times 231{,}87 = 596{,}67$$

Es de resaltar que esta Reserva tan sólo representa el 82,24% de la cuota global cobrada.

Al comienzo del segundo año al Colectivo se incorporarán nuevos Asegurados, según un número definido por N anteriormente.

En nuestro caso, realizados los cálculos correspondientes se ha obtenido:

$$N = 31{,}492 \text{ Cabezas}$$

Ahora bien, en lugar de admitir que son todas de edad 30, se ha preferido, por una mejor adaptación a la realidad, suponer que la edad media de estas 31,492 es de 25 años, distribuyéndolos adecuadamente entre las edades de 15 y 40 años.

De esta forma ha resultado una nueva configuración del grupo que se aprecia seguidamente:

x	l_x	N_x	$l_x + N_x$	l_y
15		0,732	0,732	
16	4,998	0,879	5,877	
17	10,995	1,025	12,020	
18	19,990	1,172	21,162	
19	34,981	1,318	36,299	

x	l_x	N_x	l_x+N_x	l_y
20	55,967	1,465	57,432	
21	82,949	1,611	84,560	
22	116,925	1,758	118,683	
23	155,896	1,904	157,800	
24	198,860	2,051	200,911	
25	244,819	2,197	247,016	
26	290,773	2,051	292,824	
27	334,724	1,904	336,628	
28	387,662	1,758	389,420	
29	399,631	1,611	401,242	
30	440,570	1,465	442,035	
31	487,497	1,318	488,815	
32	488,473	1,172	489,645	
33	486,450	1,025	487,475	
34	473,437	0,879	474,316	
35	450,434	0,732	451,166	
36	440,416	0,586	441,002	
37	429,396	0,439	429,835	
38	409,387	0,293	409,680	
39	379,395	0,147	379,542	
40	354,396		354,396	
41	327,402		327,402	
42	298,415		298,415	
43	269,431		269,431	
44	244,443		244,443	
45	215,469		215,469	
46	195,478		195,478	
47	173,497		173,497	
48	153,516		153,516	
49	135,535		135,535	
50	119,552		119,552	
51	106,564		106,564	
52	88,603		88,603	
53	78,614		78,614	
54	65,646		65,646	
55	57,659		57,659	
56	49,677		49,677	
57	41,701		41,701	
58	36,710		36,710	
59	30,733		30,733	
60	26,743		26,743	
61	22,759		22,759	
62	19,769		19,769	
63	16,783		16,783	
64	14,788		14,788	
65				13,782
	9.968,508	31,492	10.000,000	13,782

Entonces, la cuota del segundo año, habida cuenta del movimiento demográfico del grupo y de que se admite un crecimiento salarial del $z\%$ queda definida por:

$$\theta_2=\frac{\theta_1 \cdot \sum_{x=15}^{63} {}_1p_x \cdot l_x \cdot (1{,}02)^{64-x} \cdot a_{x+1:65-(x+1)} + z\left[\sum_{x=15}^{63} {}_1p_x \cdot l_x \cdot 0{,}15 \cdot (1{,}02)^{64-15} \cdot {}_{65-(x+1)}/a_{x+1} + \sum_{y=64}^{\infty} {}_1p_y \cdot l_y \cdot 0{,}15 \cdot (1{,}02)^{64-15} \cdot a_{y+1}\right] + (1+z)\cdot\left[\sum_{x=15}^{39} 0{,}15 \cdot (1{,}02)^{64-15} \cdot N_x \cdot {}_{65-x}/a_x\right]}{(1+z)\left[\sum_{x=15}^{63} {}_1p_x \cdot l_x \cdot (1{,}02)^{64-x} \cdot a_{x+1:65-(x+1)} + \sum_{x=15}^{39} N_x \cdot (1{,}02)^{64-x} \cdot a_{x:65-x}\right]}$$

Y llamando:

$$A=\sum_{x=15}^{63} {}_1p_x \cdot l_x \cdot (1{,}02)^{64-x} \cdot a_{x+1:65-(x+1)}$$

$$B=\sum_{x=15}^{39} 0{,}15 \cdot (1{,}02)^{64-15} \cdot N_x \cdot {}_{65-x}/a_{x+1}$$

$$C=\sum_{x=15}^{63} {}_1p_x \cdot l_x \cdot 0{,}15 \cdot (1{,}02)^{64-15} \cdot {}_{65-(x+1)}/a_{x+1} + \sum_{y=64}^{\infty} {}_1p_y \cdot 1_y \cdot 0{,}15 \cdot (1{,}02)^{64-15} \cdot a_{y+1} + B$$

$$D=\sum_{x=15}^{63} {}_1p_x \cdot l_x \cdot (1{,}02)^{64-x} \cdot a_{x+1:65-(x+1)} + \sum_{x=15}^{39} N_x \cdot (1{,}02)^{64-x} \cdot a_{x:65-x}$$

Se llega a la expresión:

$$\theta_2=\frac{(\theta_1 \cdot A+B)+z \cdot C}{(1+z) \cdot D}$$

Resultando, tras los oportunos cálculos, que no se reproducen en aras a la brevedad:

$$
\begin{aligned}
A &= 243.084{,}529 \\
B &= 21{,}618 \\
C &= 11.725{,}034 \\
D &= 243.803{,}225
\end{aligned}
$$

es decir:

$$\theta_2 = \frac{(\theta_1 \times 243.084{,}529 + 21{,}618) + 11.725{,}034 \cdot z}{(1+z) \cdot 243.803{,}225}$$

O lo que es igual:

$$\theta_2 = \frac{11.665{,}367 + 11.725{,}034 \cdot z}{(1+z) \cdot 243.803{,}225}$$

Obteniéndose el siguiente Cuadro:

z	θ_2 %
0	4,78
0,10	4,79
0,13	4,79
0,20	4,79
0,30	4,79
0,50	4,79
1,00	4,80
∞	4,81

El valor de la segunda cuota θ_2 para $z=0$ se puede obtener restando del compromiso probable del Asegurador el importe de la Reserva Matemática y dividiendo por el compromiso probable de la colectividad, o sea:

$$\theta_2 = \frac{\left(\sum_{x=15}^{63} {}_1p_x \cdot l_x \cdot 0{,}15 \cdot (1{,}02)^{64-15} \cdot {}_{65-(x+1)/}a_{x+1} + \sum_{y=64}^{\infty} {}_1p_y \cdot l_y \cdot 0{,}15 \cdot (1{,}02)^{64-15} \cdot a_{y+1} + \sum_{x=15}^{39} 0{,}15 \cdot (1{,}02)^{64-15} \cdot N_x \cdot {}_{65-x/}a_x \right) - V_1}{\sum_{x=15}^{63} {}_1p_x \cdot l_x \cdot (1{,}02)^{64-x} \cdot a_{a+1:65-(x+1)} + \sum_{x=15}^{39} N_x \cdot (1{,}02)^{65-x} \cdot a_{x:65-x}}$$

Es decir:

$$\theta_2 = \frac{11.725,034 - 59,667}{243.803,225} = \frac{11.665,367}{243.803,225} = 4,78\,\%$$

Hasta ahora se ha operado a Prima Pura. Si se incluyen unos recargos de gestión interna y externa cifrados, por ejemplo, en un 20 % (ya que se destinaría un 5 % a gestión externa y un 15 % a administración) se obtiene una cuota comercial de $\theta_1'' = 1,20 \times \theta_1 = 5,75\,\%$.

En la fórmula general de la segunda cuota en función del crecimiento salarial z al tener en cuenta aquel recargo global del 20 % se obtiene el nuevo Cuadro:

z	θ_2'' %
0	5,74
0,10	5,75
0,13	5,75
0,20	5,75
0,30	5,75
0,50	5,75
1,00	5,76
∞	5,77

Se renuncia a calcular la cuota del tercer año y sucesivos, porque la marcha a seguir ya está claramente indicada.

Una conclusión clara es la de que en el sistema de Capitalización Colectiva, la cuota queda inalterada si sólo se tuvieran en cuenta las salidas por fallecimiento; y prácticamente estable respecto al impacto del crecimiento salarial z.

Son los movimientos salariales y demográficos en virtud de nuevas incorporaciones los que pueden influir decisivamente en la variación de la cuota, y es por esto por lo que se hace necesaria la revisión periódica.

Conviene subrayar que la reserva de escasa cuantía obtenida al final del primer año es la determinante de que, incluso cuando $z = \infty$ (pérdida total del valor adquisitivo de la moneda, o lo que es igual un alza salarial infinita por destrucción de la moneda) la cuota tenga un aumento cifrado en el 6 %. En efecto, la reserva constituida quedaría anulada y el sistema, por así decirlo, se replantearía de nuevo. Así, haciendo $V_1 = 0$ la cuota resultante $\theta_2 = 4,81\,\%$ coincide con el valor que toma cuando $z = \infty$.

Madrid, 14 de octubre de 1975

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
x	l_x	$(1{,}02)^{x-15}$	${}_{65-x}E_x \cdot a_{65}$	$a_{x:\overline{65-x}}$	$0{,}15 \cdot (1{,}02)^{64-15} \times (1) \times (3)$	$(1) \times (2) \times (4)$	$\Sigma(5)$	$\Sigma(6)$	(7):(8) %	(5):(6) %
15	5	1,000000	1,047097	20,2577	2,0723	101,2885	2,0723	101,2885	2,05	2,05
16	11	1,020000	1,094628	20,1317	4,7660	225,8777	6,8383	327,1662	2,09	2,11
17	20	1,040400	1,144365	20,0011	9,0593	416,1829	15,8976	743,3491	2,14	2,18
18	35	1,061208	1,196432	19,8657	16,5751	737,8574	32,4727	1.481,2065	2,19	2,25
19	56	1,082432	1,250943	19,7252	27,7284	1.195,6665	60,2011	2.676,8730	2,25	2,32
20	83	1,104080	1,308000	19,5793	42,9720	1.794,2204	103,1731	4.471,0934	2,31	2,40
21	117	1,126162	1,367705	19,4274	63,3400	2.559,7727	166,5131	7.030,8661	2,37	2,47
22	156	1,148685	1,430170	19,2689	88,3104	3.452,8878	254,8271	10.483,7539	2,43	2,56
23	199	1,171659	1,495520	19,1038	117,7999	4.454,2447	372,6270	14.937,9986	2,49	2,64
24	245	1,195092	1,563925	18,9318	151,6637	5.543,1845	524,2907	20.481,1831	2,56	2,74
25	291	1,218994	1,635509	18,7526	188,3846	6.652,0582	712,6753	27.133,2413	2,63	2,83
26	335	1,243374	1,710443	18,5659	226,8052	7.733,2597	939,4805	34.866,5010	2,69	2,93
27	388	1,268241	1,788883	18,3716	274,7345	9.040,2510	1.214,2150	43.906,7520	2,77	3,04
28	400	1,293606	1,871013	18,1691	296,2350	9.401,4627	1.510,4500	53.308,2147	2,83	3,15
29	441	1,319478	1,957022	17,9583	341,6126	10.449,7514	1.852,0626	63.757,9661	2,90	3,27
30	488	1,345868	2,047083	17,7387	395,4165	11.650,4869	2.247,4791	75.408,4530	2,98	3,39
31	489	1,372785	2,141408	17,5100	414,4840	11.754,3205	2.661,9631	87.162,7735	3,05	3,53
32	487	1,400241	2,240180	17,2716	431,8286	11.777,8039	3.093,7917	98.940,5774	3,13	3,67
33	474	1,428246	2,343636	17,0230	439,7117	11.524,3769	3.533,5034	110.464,9543	3,20	3,82
34	451	1,456811	2,452025	16,7640	437,7246	11.014,3128	3.971,2280	121.479,2671	3,27	3,97
35	441	1,485947	2,565585	16,4941	447,8417	10.808,6269	4.419,0697	132.287,8940	3,34	4,14
36	430	1,515666	2,684587	16,2128	456,9256	10.566,4716	4.875,9953	142.854,3656	3,41	4,32
37	410	1,545979	2,809336	15,9197	455,9184	10.090,7240	5.331,9137	152.945,0896	3,49	4,52
38	380	1,576899	2,940161	15,6144	442,2362	9.356,4861	5.774,1499	162.301,5757	3,56	4,73
39	355	1,608437	3,077356	15,2964	432,4199	8.734,1699	6.206,5698	171.035,7456	3,63	4,95

40	328	1,640606	3,221328	14,9653	418,2234	8.053,1088	6.624,7932	179.088,8544	3,70	5,19
41	299	1,673418	3,372428	14,6203	399,1291	7.315,2961	7.023,9223	186.404,1505	3,77	5,46
42	270	1,706886	3,531108	14,2612	377,3760	6.572,4055	7.401,2983	192.976,5560	3,83	5,74
43	245	1,741024	3,697798	13,8872	358,5988	5.923,5974	7.759,8971	198.900,1534	3,90	6,05
44	216	1,775844	3,872997	13,4978	331,1315	5.177,5172	8.091,0286	204.077,6706	3,96	6,40
45	196	1,811361	4,057259	13,0924	314,7664	4.648,1522	8.405,7950	208.725,8228	4,03	6,77
46	174	1,847588	4,251160	12,6703	292,7900	4.073,2520	8.698,5850	212.799,0748	4,08	7,19
47	154	1,884540	4,455334	12,2308	271,5817	3.549,6125	8.970,1667	216.348,6873	4,14	7,65
48	136	1,922231	4,670494	11,1860	251,4208	2.924,2823	9.221,5875	219.272,9696	4,20	8,60
49	120	1,960676	4,897432	11,2966	232,6211	2.657,8767	9.454,2086	221.930,8463	4,26	8,75
50	107	1,999889	5,136986	10,8003	217,5663	2.311,1359	9.671,7749	224.241,9822	4,31	9,41
51	89	2,039887	5,390128	10,2832	189,8841	1.866,9143	9.861,6590	226.108,8965	4,36	10,17
52	79	2,080685	5,657932	9,7444	176,9230	1.601,7271	10.038,5820	227.710,6236	4,41	11,05
53	66	2,122298	5,941577	9,1828	155,2191	1.286,2500	10.193,8011	228.996,8736	4,45	12,07
54	58	2,164744	6,242396	8,5971	143,3108	1.079,4101	10.337,1119	230.076,2837	4,49	13,28
55	50	2,208039	6,561906	7,9860	129,8672	881,6700	10.466,9791	230.957,9537	4,53	14,73
56	42	2,252200	6,901804	7,3478	114,7391	695,0460	10.581,7182	231.652,9997	4,56	16,51
57	37	2,297244	7,264025	6,6810	106,3845	567,8718	10.688,1077	232.220,8715	4,60	18,73
58	31	2,343189	7,650775	5,9834	93,8786	434,6273	10.781,9863	232.655,4988	4,63	21,60
59	27	2,390053	8,064577	5,2530	86,1876	338,9836	10.868,1739	232.994,4824	4,66	25,43
60	23	2,437854	8,508327	4,4870	77,4589	251,5890	10.945,6328	233.246,0714	4,69	30,79
61	20	2,486611	8,985353	3,6825	71,1320	183,1389	11.016,7648	233.429,2103	4,72	38,84
62	17	2,536343	9,499556	2,8360	63,9222	122,2822	11.080,6870	233.551,4925	4,74	52,28
63	15	2,587070	10,055406	1,9434	59,7022	75,4157	11.140,3892	233.626,9082	4,77	79,16
64	14	2,638811	10,658187	1,0000	59,0624	36,9434	11.199,4516	233.663,8516	4,79	159,87

APENDICE

CAPITALIZACION COLECTIVA

Los activos fallecidos o jubilados, no repuestos, no alteran el tipo de prima.

Sean w = edad de jubilación; R la cuantía de la renta de jubilación; y

$(x_1;\ x_2;\ x_3;\ ...;\ x_n)$ el grupo de activos.
$(y_1;\ y_2;\ y_3;\ ...;\ y_m)$ el grupo de jubilados.

La primera cuota θ_1 vale:

$$\theta_1 \cdot \sum_{x_1}^{x_n} \mathrm{a}_{x:w-x} = R \cdot \sum_{x_1}^{x_n} {}_{w-x}/\mathrm{a}_x + R \cdot \sum_{y_1}^{y_m} \mathrm{a}_y$$

Antes de $t=1$ fallece x_1 y no se repone ni antes ni después de $t=1$. Además, al calcular la reserva en $t=1$, resulta que x_n ha pasado de activo a jubilado.

La reserva V_1 valdrá:

$$V_1 = R \cdot \sum_{x_2}^{(x_{n-1})} {}_{w-x-1}/\mathrm{a}_{x+1} + R \cdot \sum_{y_1}^{y_m} \mathrm{a}_{y+1} + R \cdot \mathrm{a}_{y_n+1} - \theta_1 \cdot \sum_{x_2}^{x_{n-1}} \mathrm{a}_{x+1:w-x-1}$$

Por consiguiente la segunda cuota θ_2 vendrá dada por:

$$\theta_2 \cdot \sum_{x_2}^{x_{n-1}} \mathrm{a}_{x+1:w-x-1} = R \cdot \sum_{x_2}^{x_{n-1}} {}_{w-x-1}/\mathrm{a}_{x+1} + R \cdot \sum_{y_1}^{y_m} \mathrm{a}_{y+1} + R \cdot \mathrm{a}_{x_n+1} - V_1$$

De donde resulta ser:

$$\theta_2 = \frac{\theta_1 \sum_{x_2}^{x_{n-1}} \mathrm{a}_{x+1:w-(x+1)}}{\sum_{x_2}^{x_{n-1}} \mathrm{a}_{x+1:w-(x+1)}} = \theta_1$$