# TRABAJOS DE COLABORACION

# Aplicación de la transformación de Laplace en la Matemática del Seguro de Vida

Por

EUGENIO PRIETO PEREZ

Catedrático de la Universidad Autónoma de Madrid.
Director del Gabinete Técnico del Sindicato Nacional del Seguro

## INTRODUCCION

En la Matemática del Seguro cabe distinguir al menos tres partes, a saber:

*a*) La Matemática del Seguro de Vida.
*b*) La Matemática de los Seguros Generales.
*c*) La Matemática de la Seguridad Social.

Cada una de ellas tiene su características peculiares.

Concretándonos a la Matemática del Seguro de Vida podríamos señalarle como objeto la elaboración de los modelos matemáticos que sirvan de sostén al cálculo de primas y reservas matemáticas, así como al tratamiento de las cuestiones referentes a la estabilidad y determinación del beneficio de la empresa aseguradora que realice operaciones en este ramo del Seguro Privado.

En este tipo de operaciones de Seguro, la prestación consiste en el pago de las primas (únicas o periódicas) por parte del asegurado o tomador del Seguro, vinculadas a la *supervivencia del asegurado o tomador*, durante un período de tiempo prefijado. La contraprestación del asegurador varía con la modalidad de Seguro. Estas pueden clasificarse según diversos criterios, pero el más interesante, desde nuestro punto de vista, es el que tiene su origen en la estructura de la contraprestación. Desde este ángulo podemos distinguir dos subclases, *A* y *B*, generales:

A) Se caracteriza porque la contraprestación consiste en el pago por el asegurador del capital contratado al ocurrir el suceso asegurado, dependiente de la vida del asegurado o asegurados.

B) La contraprestación ahora consiste en el pago de una renta a los asegurados o a sus beneficiarios, dependiendo los términos de ésta de la supervivencia de unos u otros de aquéllos.

En la clase *A* cabe, a su vez, una clasificación según el suceso que da lugar al pago de la contraprestación del asegurador, distinguiendo, por una parte, los seguros de capital para caso de muerte de los seguros de capital para caso de vida. Entre ambos extremos existen las formas más diversas, entre las que se cuenta la modalidad del seguro mixto, también llamado seguro para caso de muerte y vida, por el que el asegurador debe pagar el capital asegurado a la muerte del asegurado o, a lo más tarde, cuando haya alcanzado una cierta edad previamente fijada.

Por lo que respecta a las modalidades de Seguros de la clase *B*, podemos, asimismo, establecer una clasificación, distinguiendo los seguros de renta para caso de muerte y para caso de supervivencia. La modalidad más importante de seguro de renta es la renta vitalicia, en la que el asegurador, contra el pago de una determinada cantidad por el asegurado o tomador del seguro, se compromete a pagar periódicamente (el período puede ser el año, semestre, trimestre, etc.) al asegurado una renta, constante o no, mientras viva. La renta para caso de muerte reviste, generalmente, la forma de renta de supervivencia, en la que los términos de la renta se pagan a partir de la muerte del asegurado, y por razón de este hecho, a una persona determinada mientras viva. Su forma más conocida e importante es la renta de viudedad.

Naturalmente, existen modalidades que surgen por combinación de dos o más pertenecientes a las clases *A* y *B*.

En el desarrollo de la Matemática del Seguro de Vida son básicos los criterios y la lógica de valoración introducidos por la Matemática Financiera y la Teoría Estadística; hasta el extremo de que el empleo de la primera es el elemento diferenciador más importante —aunque existen otros también esenciales—, con la matemática de los seguros generales. En la matemática del seguro de vida, por cuanto supone una operación financiera a largo plazo, la dimensión financiera es fundamental, cosa que no ocurre en la matemática de los seguros generales, en que los contratos tienen una duración generalmente anual.

La equivalencia financiera entre prestación y contraprestación se establece tanto en la matemática del seguro de vida como en la conrrespondiente a los seguros generales, mediante el sistema financiero individual, esto es, la prima a pagar por cada asegurado está modelada a la categoría del riesgo cubierto, cosa que, en general, no ocurre en la matemática de la Seguridad Social, en que la prima, en general, se determina por aplicación de principios esencialmente diferentes. En el ámbito del Seguro Privado, las primas deben determinarse siguiendo los *principios de equidad y solvencia suficiente del ente asegurador para cada contrato individual.* En los distintos regímenes de Seguridad Social, y cualquiera que sea el sistema financiero actuarial que establezca el equilibrio financiero del mismo, las primas suelen ser un porcentaje del sueldo del asegurado, estando las prestaciones determinadas unas en función de la cuantía fija o variable, pero determinada por otro tipo de factores. Que esto sea así, la obligatoriedad del aseguramiento y que a la financiación de la Seguridal Social contribuyan el Estado, las Empresas, junto a los trabajadores, no ponen sino de manifiesto que todos somos beneficiarios de los resultados de la Seguridad Social, y ello *aunque no se materialicen en nosotros sus prestaciones y estemos lejos de* la necesidad que los provoca. La matemática de la Seguridad Social proporciona, pues, un conjunto de modelos de sistemas financieros, adecuados a las especiales características, objetivos y riesgos cubiertos de un cierto sistema de Seguridad Social.

Tal y como se desprende del título de nuestro trabajo, pretendemos aplicar la transformación de Laplace para la resolución de ciertos problemas de la Matemática del Seguro de Vida. Como señala Marc-Henri Amsler, "tratando de delimitar, explicar y resolver los problemas planteados por el Seguro de Vida, los actuarios han creado un método, desarrollado un lenguaje matemático capaz tanto de secundar en los razonamientos teóricos como de ayudarles a obtener los valores numéricos indispensables para el ejercicio de su profesión". Puede decirse que ya la entidad mutua aseguradora de vida "Equitable Life", fundada en 1762, que en nuestros días sigue siendo una de las más importantes de Inglaterra, planteaba sus negocios sobre una base enteramente científica. El método de cálculo de primas y reservas matemáticas debido a Dodson suponía le estructura o el modelo del Seguro de Vida. "Lo que Dodson demostró —señala Edouard Franckx— sobre la base de las estadísticas es que el "orden natural" en el Seguro de Vida era la edad alcanzada y, por consiguiente, que desde el punto de vista comercial todos los individuos de una misma edad eran *equivalentes*." De la partición determinada por la edad alcanzada se deduce inmediatamente la necesidad técnica de la formación de *reservas matemáticas*, calculadas de acuerdo con las bases científicas definidas y que serían idénticas para todos los individuos que hubiesen alcanzado la misma edad, en tanto que las ventajas comerciales sean las mismas.

El modelo de Dobson, garantizado por una experiencia de más de dos siglos, desde el punto de vista de cálculo fue *sustancialmente* completado con el decubrimiento por George Barret en 1786, divulgado a principios del siglo XIX por Griffith Davis, de los llamados símbolos de comunicación (*).Los símbolos de conmutación han permitido poner en fórmulas, en forma satisfactoria, los distintos fenómenos encontrados por la técnica del Seguro de Vida.

En lo que sigue, expondremos un nuevo enfoque para la obtención de las fórmulas fundamentales de la Matemática del Seguro de Vida, basándonos en el Cálculo Operacional. Este importante capítulo del Análisis Matemático fue introducido por O. Heaviside a finales del siglo XIX, representa

(*) Es obligado citar, asimismo, los símbolos de conmutacón debidos a Hans Nicolás Teten, más utilizados actualmente, hasta el punto de que en los tratados modernos de *Matemática del Seguro* es el único que suele exponerse (véase A. LASHERAS SANZ: *Matemática del Seguro*, Madrid, 1948).

un gran avance en la solución de ciertos problemas físicos, pese a que sus reglas se anunciaron por el genial ingeniero de una forma no completamente justificable. Su utilidad y la corriente sistematizadora de la matemática moderna justifica que por diversos caminos se trate de dar consistencia a las reglas introducidas sin o con muy débil justificación matemática, suponiendo todo ello un importante capítulo del Análisis Matemático e incluso la introducción en el desarrollo de muchas de sus partes de un nuevo lenguaje.

La introducción de operadores (*) tiene sentido, por cuanto al gozar de muchas de las propiedades de los números, con lo que en muchos casos se pueden tratar como si fueran aquéllos, simplifican o hacen posible la resolución de no pocos problemas, y ello con una metodología elemental y lógicamente fundamentada.

## LA TRANSFORMACION DE LAPLACE

Queremos señalar, en primer lugar, que, según para el ingeniero, por ejemplo, la transformación de Laplace no es más que un artificio matemático que permite reducir a cuestiones puramente algebraicas la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales, etc., para el actuario tiene un significado financiero. En efecto, es mediante una transformación de Laplace por la que sustituye una sucesión de capitales (aleatorios o no), por su valor actual cierto, y , por tanto, lo que para un ingeniero es un rodeo útil representa para el actuario el criterio que le permite valorar capitales futuros en el presente o capitales presentes en el futuro.

## DEFINICION

Dada una función $f(x)$ definida en $(o, \infty)$, llamamos su transformada de Laplace a una función $G(\theta)$ definida así:

$$G(\theta) = \int_0^\infty e^{-\theta x} f(x)\, dx \qquad [1]$$

en donde $\theta$ es un parámetro, con la *única condición de que la integral sea convergente.*

A la función $e^{-\theta x}$ suele denominársele *núcleo de la transformación,* y a las funciones $f(x)$ y $G(\theta)$ *función objeto e imagen,* respectivamente.

Son muchas las ocasiones en que las operaciones entre funciones imágenes son más sencillas que las correspondientes entre las funciones objeto.

El paso de $f(x)$ a $G(\theta)$ suele denotarse así: $\mathfrak{L}\{(x)\} = G(\theta)$. El trán-

(*) Un operador es, en general, cualquier símbolo que indique la realización de una operación determinada.

to de $G(\theta)$ a $f(x)$ se realiza mediante otra transformación, que simbolizaremos por $\mathfrak{L}^{-1}\{G(\theta)\}=f(x)$, denominada transformación inversa de [1].

El conocimiento de la transformación directa y de la inversa permite el paso de un campo a otro, para operar en el más conveniente en cada momento.

## PROPIEDADES DE LA TRANSFORMACION DE LAPLACE

I) De la definición [1] se deduce que:

$$\mathfrak{L}\{\sum_1^n c_i f_i(x)\} = \sum_1^n c_i \mathfrak{L}\{f_i(x)\} = \sum_1^n c_i G_i(\theta)$$

esto es, el operador $\mathfrak{L}$ *tiene la propiedad de linealidad.*

II) Propiedad de semejanza.

Se anuncia así

$$\mathfrak{L}\{f(ax)\} = \frac{1}{a} G\left(\frac{\theta}{a}\right) \qquad a > 0$$

En efecto,

$$\mathfrak{L}\{f(ax)\} = \int_0^\infty e^{-\theta x} f(ax)\, dx = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{\frac{\theta}{a}} f(u)\, du = \frac{1}{a} G\left(\frac{\theta}{a}\right)$$

En consecuencia, también es:

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right)\right\} = G(a\theta)$$

III) Ley de traslación.

Sea la función:

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x-b) \qquad \text{para} \quad x \geqslant b \\ &= \ \ 0 \qquad\qquad\ \ \text{para} \quad x < b \end{aligned} \qquad b > 0$$

Tenemos:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\{h(x)\} &= \int_0^\infty e^{-\theta x} h(x)\, dx = \int_0^\infty e^{-\theta x} f(x-b)\, dx \\ &= \int_0^\infty e^{-\theta b} e^{-\theta u} f(u)\, du \\ &= e^{-\theta b}\mathfrak{L}\{f(x)\} \end{aligned}$$

o sea,

$$\mathfrak{L}\{f(x-b)\} = e^{-\theta b}\mathfrak{L}\{f(x)\}$$

IV. LEY DE AMORTIGUAMIENTO.

Calculemos ahora la transformada de la función $e^{-\gamma x} f(x)$ Será:

$$\mathfrak{L}\{e^{-\gamma x} f(x)\} = \int_0^\infty e^{-\theta x} e^{-\gamma x} f(x)\, dx = \int_0^\infty e^{-(\theta+\gamma)x} f(x)\, dx = G(\theta + \gamma)$$

V) Una propiedad especialmente interesante en las aplicaciones actuariales es la siguiente:

$$\mathfrak{L}\{f'(x)\} = \theta\, G(\theta) - f(0)$$

En efecto,

$$\mathfrak{L}\{f'(x)\} = \int_0^\infty e^{-\theta x} f'(x)\, dx = [e^{-\theta x} f(x)]_0^\infty +$$

$$+ \theta \int_0^\infty e^{-\theta x} f'(x)\, dx = \theta\, G(\theta) - f(0)\, c \cdot q \cdot d$$

Son condiciones *suficientes* para que esta igualdad se verifique que $f(x)$ sea una función continua en $[o, \infty)$, de orden exponencial al tender la variable independiente a infinito, y cuya derivada sea parcialmente continua en $[o, \infty)$.

En las condiciones que acabamos de indicar en cada caso, y bajo la hipótesis de que existan $f^{(n-1}(x)$ y $f^{(n}(x)$, siendo continua aquélla y parcialmente continua ésta, es válida la fórmula:

$$\mathfrak{L}\{f^{(n}(x)\} = \theta^n G(\theta) - \theta^{n-1} f(0) - \theta^{n-2} f'(0) - \ldots f^{(n-1}(0)$$

VI. PROPIEDAD DE CONVOLUCIÓN.

*Definición:*

Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ se denomina *convolución de ambas* a la función $F(x)$, definida así:

$$F(x) = \int_0^x f(x-y) g(y)\, dy$$

La operación de convolución suele representarse simbólicamente por $f(x) * g(x)$.

La convolución tiene las siguientes propiedades:

1) $f(x) * g(x) * f(x)$ (propiedad conmutativa)
2) $f_1(x) * (f_2(x) + f_3(x)) = f_1(x) * f_2(x) + f_1(x) * f_3(x)$ (propiedad distributiva)
3) $f_1(x) * (f_2(x) * f_3(x)) = (f_1(x) * f_2(x)) * f_3(x)$ (propiedad asociativa)

Calculemos $\mathfrak{L}\{f_1 * f_2\}$, función imagen ésta de gran importancia en la

Matemática Actuarial, aunque en el presente trabajo no hagamos uso de la misma. Tenemos:

$$\mathfrak{L}\{f_1 * f_2\} = \int_0^\infty e^{-\theta x} \int_0^x f_1(x-y) f_2(y)\, dx\, dy$$
$$= \int_0^\infty e^{-\theta x} \int_0^\infty f_1(x-y) f_2(y)\, dx\, dy$$

pues $f_1(x-y)=0$ para $y>x$.

Permutando en la última expresión el orden de integración, resulta:

$$\mathfrak{L}\{f_1 * f_2\} = \int_0^\infty f_2(y) \int_0^\infty e^{-\theta x} f_1(x-y)\, dx\, dy$$
$$= \int_0^\infty f_2(y)\, e^{-\theta y}\, G_1(\theta)\, dy$$
$$= G_1(\theta) \int_0^\infty e^{-\theta y} f_2(y)\, dy$$
$$= G_1(\theta) \cdot G_2(\theta)$$

siendo

$$G_1(\theta) = \mathfrak{L}\{f_1(x)\} \qquad \text{y} \qquad G_2(\theta) = \mathfrak{L}\{f_2(x)\}$$

Naturalmente, las condiciones analíticas en las que la propiedad $\mathfrak{L}\{f_1 * f_2\} = G_1(\theta) \cdot G_2(\theta)$ es válida, son las requeridas para la convergencia de las integrales y las exigidas para que sea posible la permutación en el orden de integración.

Para $f_1(x)=1$ se verifica:

$$\mathfrak{L}\{1 * f_2(x)\} = \mathfrak{L}\left\{\int_0^x f_2(y)\, dy\right\} = \frac{1}{\theta} G(\theta) = \frac{G(\theta)}{\theta}$$

conocida coma *propiedad o ley de integración.*

Si fuera $f_1(x)=f_2(x)=f(x)$ aparecería:

$$\mathfrak{L}\{f(x) * f(x)\} = [G(\theta)]^2$$

## VII. Derivación e integración de transformadas.

Resulta de gran utilidad el conocimiento de cuál sea la operación que en el campo original corresponde a la derivación e integración de la función transformada.

### DERIVACION

$$G'(\theta) = \frac{d}{d\theta}\left[\int_0^\infty e^{-\theta x} f(x)\, dx\right]$$
$$= \int_0^\infty (-x)\, e^{-\theta x} f(x)\, dx = \mathfrak{L}\{-x f(x)\}$$

En general, se verifica:

$$G^{(n}(\theta) = \mathfrak{L}\{(-x)^n f(x)\}$$

INTEGRACION

$$\int_0^\infty G(y)\,dy = \int_\theta^\infty \int_0^\infty e^{-yx} f(x)\,dy\,dx = \int_0^\infty f(x) \int_\theta^\infty e^{-yx}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^\infty f(x) \frac{e^{-\theta x}}{x}\,dx = \mathfrak{L}\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}$$

LA TRANSFORMACION INVERSA DE LAPLACE

Las propiedades expuestas evidencian, como habíamos señalado anteriormente, cómo operaciones *no elementales* en el campo original corresponden en el transformado otras más sencillas. Resultará entonces útil el paso al campo imagen para realizar estas operaciones, para volver de nuevo al campo primitivo y dar soluciones al problema planteado.

El problema a resolver ahora es el de cómo pasar del conocimiento de la función imagen $G(\theta)$ al conocimiento de la función $f(x)$. Denotaremos la operación así: $f(x)=\mathfrak{L}^{-1}\{G(\theta)\}$.

La cuestión planteada puede resolverse, en general, mediante el empleo de la denominada integral inversa de Laplace; sin embargo, su empleo resulta en casi todos los casos excesivamente complicado. Parece lógico, pues, que intentemas resolver el problema mediante el empleo de las leyes operacionales, sobre todo para las funciones más corrientes.

Al objeto de no alargar excesivamente esta sintética exposición de la teoría de la Transformada de Laplace, expondremos solamente la forma de obtener la función objeto $f(x)$ correspondiente a una función imagen $G(\theta)$, cuando ésta es el cociente.

$$G(\theta) = \frac{P(\theta)}{Q(\theta)}$$

de dos polinomios, $P(\theta)$ y $Q(\theta)$ siendo $P$ de grado menor que $Q$.

Denotando con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, las raíces del polinomio $Q$, con índices de multiplicidad:

$$K_1, K_2, \ldots, K_m$$

tendremos:

$$[2]\quad Q(\theta) = \sum_{r=1}^{m} \left[\frac{Ar_1}{\theta - \alpha_r} + \frac{Ar_2}{(\theta - \alpha_r)^2} + \ldots + \frac{A_{rk_r}}{(1 - \alpha_r)^{k_r}}\right]$$

en donde los $A_{ri}$ $(i=1, 2, \ldots, kr)$ pueden determinarse, por ejemplo, por el método de los coeficientes indeterminados.

Aplicando a [2] el operador $\mathfrak{L}^{-1}$, resulta:

$$f(x) = \sum_{r=1}^{m} \left( \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{A r_1}{\theta - \alpha_r} \right\} + \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{A r_2}{(\theta - \alpha_r)^2} \right\} + \ldots + \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{A_r k_r}{(\theta - \alpha_r)^{kr}} \right\} \right)$$

Ahora bien, como:

$$\mathfrak{L} \{ x^n \} = \int_0^{\infty} e^{-\theta x} x^n \, dx = \frac{1}{\theta^{n+1}} \int_0^{\infty} e^{-y} y^n \, dy = \frac{\Gamma(n+1)}{\theta^{n+1}}$$

Siendo

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} e^{-y} y^n \, dy$$

Luego, cuando $n$ sea un número natural

$$\mathfrak{L} \{ x^n \} = \frac{n!}{\theta^{n+1}}$$

En consecuencia, será:

$$\mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\theta^n} \right\} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

Por otra parte, la ley de amortiguamiento nos permite escribir:

$$\mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(\theta - a)^n} \right\} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{ax}$$

Ocurre, pues, que:

$$f(x) = \sum_{r=1}^{m} e^{\alpha_r x} \left[ A_{r1} + \frac{A_{r2}}{1!} x + \ldots + \frac{A_r k_r}{(k_r - 1)!} x^{k_r - 1} \right]$$

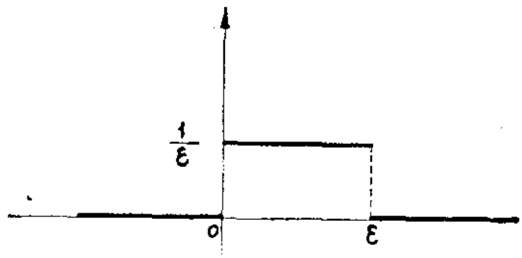
La operación de paso de la función imagen a la objeto, y viceversa, se facilita por la existencia de tablas de funciones con sus transformadas directas e inversas. Así que la mayor parte de los problemas de esta naturaleza se resuelven con facilidad haciendo uso de tales tablas, bien directamente o mediante una combinación inteligente de las leyes operacionales. Tan sólo en algunos casos se exige poner en juego algún artificio matemático para su obtención.

## FUNCIONES DE DIRAC

Consideremos la función $F(x)$, definida así

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad x < 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} & \text{para} \quad 0 \leqslant x \leqslant \varepsilon \\ 0 & \text{para} \quad x > \varepsilon \end{cases}$$

cuya representación gráfica es:




Se verifica:

$$\int_0^\varepsilon F(x)\,dx = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon dx = 1$$

En lo que sigue utilizaremos los operadores $D$ y $D^{-1}$ para indicar las operaciones de derivación e integración, respectivamente.

Ambos operadores son lineales y, entre ellos, se da la relación siguiente:

$$D[D^{-1}] \equiv 1$$

por tanto, escribiremos:

$$D^{-1}F(x)=1 \qquad \text{y} \qquad D[D^{-1}F(x)]=F(x)$$

Las funciones $F(x)$ y $D^{-1}F(x)$ cuando $\varepsilon \to 0$, se denominan funciones de Dirac. Obsérvese que para $\varepsilon \to 0$, la función $F(x)$ se hace infinita y que ambas son continuas para todo valor de $x$, menos en el origen, donde las dos son discontinuas.

Se llaman funciones de DIRAC generalizadas a las siguientes:

$$F(x;a)=\begin{cases} 0 & \text{Para} \quad x<a \\ \dfrac{1}{\varepsilon} & \text{para} \quad a\leqslant x\leqslant a+\varepsilon \qquad a>0 \\ 0 & \text{para} \quad x>a+\varepsilon \end{cases}$$

$$D^{-1}F(x,a)=1$$

Estudiemos el significado de la operación siguiente:

$$\zeta(x)=C(x)[D^{-1}(x)-D^{-1}F(x,a)] \qquad [3]$$

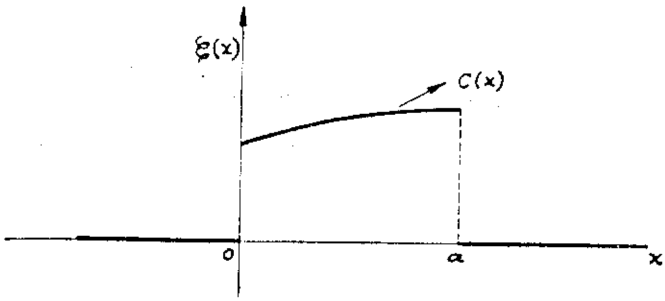
siendo $C(x)$ una función continua definida en un cierto dominio, incluyendo al intervalo $(o, a)$.

La [3], evidentemente, permite aislar la porción de la función continua $C(x)$ correspondientes al intervalo $(o, a)$, es decir:

$$\zeta(x)\equiv C(x)$$

en el intervalo $(o, a)$, y se anula fuera de este intervalo.

Gráficamente sería:




Es claro que $\zeta(x)$ puede derivarse e integrarse con el mismo *título* que $C(x)$ en $(o, a)$. Tenemos:

$$D\,\zeta(x) = C(0)\,F(x) + DC(x)\,[D^{-1}\,F(x) - D^{-1}\,F(x, a)] - C(a)\,F(x, a)$$

correspondiendo el primer y tercer término a los saltos de altura $C(o)$ en $x=o$ y $-C(a)$ en $x=a$. El segundo término es idéntico a la derivada en el intervalo $(o, a)$, siendo nulo fuera de este intervalo.

## APLICACION DE LA TRANSFORMACION DE LAPLACE A LA DETERMINACION DE LAS PRIMAS EN EL SEGURO DE VIDA

Consideremos un asegurado $\mathfrak{N}$ que tiene concertado un seguro de la modalidad $M$ de seguro sobre la vida.

El correspondiente contrato obliga a $\mathfrak{N}$ al pago de las primas anuales a cambio por parte del asegurador de la contraprestación correspondiente al seguro contratado de la modalidad $M$. Ocurrida la muerte de $\mathfrak{N}$ o llegado el contrato a su vencimiento se rescindirá éste.

Denotaremos, como es clásico, por $tPx$ la probabilidad de que una persona viva, de edad $x$, alcance la edad $x+t$. Denominando $\mu_x$ al tanto instantáneo de mortalidad a la edad $x$, podemos escribir:

$$t\,Px = e^{-\int_x^{x+t} \mu_z\,dz} \qquad [4]$$

Derivando en [4], respecto a $t$, resulta:

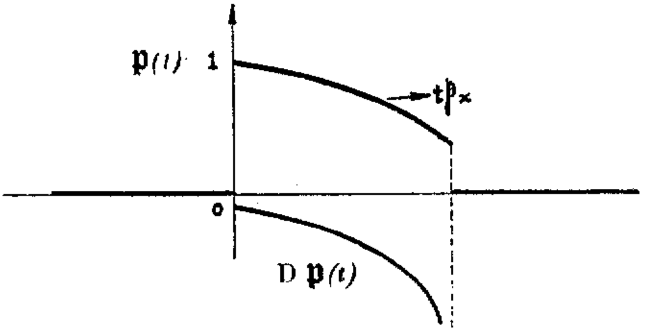
$$\frac{d}{dt}\,\{tPx\} = e^{-\int_x^{x+t} \mu_z\,dz} \left[ \frac{d}{dt} \left\{ -\int_x^{x+t} \mu_z\,dz \right\} \right] = -\,e^{-\int_x^{x+t} \mu_z\,dz} \cdot \mu_{x+t} = -\,\mu_{x+t} \cdot tPx$$

El signo de $\frac{d}{dt}\,\{tPx\}$ es negativo, por ser positivos $tPx$ y $\mu_{x+t}$.

Nos será útil la función:

$$\mathfrak{p}(t) = t\,Px\,\{D^{-1}\,F(t) - D^{-1}\,F(t; n)\}$$

La representación de $\mathfrak{p}(t)$ es:




Las variaciones de $\mathfrak{p}(t)$ en $(o, n)$ vendrán medidas por:

$$D\,\mathfrak{p}(t) = F(t) + \frac{d}{dt}\,\{\,tPx\,[D^{-1}F(t) - D^{-1}F(t,n)] - n\,P\,x F(t,n)\}$$

En el intervalo $(o, n)$, al ser:

$$D\,\mathfrak{p}(t) = \frac{d}{dt}\,\{tPx\} = -\,\mu_{x+t}\cdot tPx$$

$-D\,\mathfrak{p}(t)$ representará la densidad de probabilidad para un asegurado de edad $x$, de fallecimiento a la edad $x+t$.

*Definición:*

Con $U_0(t)$ y $U_1(t)$ representaremos la función de densidad de la prestación de $\mathfrak{R}$ y su correspondiente contraprestación del asegurador.

Como $U_0(t)$ y $U_1(t)$ están vinculadas a las probabilidadees $P_0(t)$ y $P_1(t)$, respectivamente. En este caso, nos interesan las esperanzas matemáticas:

$$E[U_0(t)] = U_0(t)\,P_0(t) \quad \text{y} \quad E[U_1(t)] = U_1(t)\cdot P_1(t)$$

Asimismo, denotaremos por $V(t)$ a:

$$V(t) = U_0(t)\,P_0(t) - U_1(t)\,P_1(t)$$

El principio de equivalencia actuarial que supone la igualdad entre los valores actuales de la prestación y contraprestación totales hace posible la determinación de la prima a pagar por el segurado. El postulado implica que $V(t)$ sea una función económicamente neutra. El significado de este término es el siguiente:

El valor actualizado de $V(t)$, al tanto instáneo de de descuento $\delta = l(+i)$ es:

$$u(\delta) = \int_0^{\infty} e^{-\delta t}\,V(t)\,dt \qquad [5]$$

Pero $u(\delta)$, definida por [5], es la transformada de Laplace de $V(t)$, siendo $\delta$ el tanto instantáneo de descuento constante equivalente a la tasa técnica $i$. Decir que $V(t)$ es económicamente neutra implica $u(\delta)=o$.

A continuación aplicamos la transformación de Laplace al cálculo de la prima en distantas modalidades de seguros sobre la vida.

a) Seguro vida entera a primas periódicas.

En este caso es:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{p}(t) &= tPx \cdot D^{-1} F(t) \\ D\,\mathfrak{p}(t) &= F(t) + \frac{d}{dt}\{tPx\}\, D^{-1} F(t) \end{aligned}\right\} \qquad [6]$$

Las funciones $U_0(t)$ y $U_1(t)$ son:

$U_0(t)=P=$prima periódica constante.

$U_1(t)=1$ para $t>o$

Según esto, será:

$$V(t) = P\,\mathfrak{p}(t) + D\,\mathfrak{p}(t) - F(t)$$

Aplicando la transformación de Laplace a $V(t)$ tenemos:

$$u(\delta) = \mathfrak{L}\{P\,\mathfrak{p}(t)\} + \mathfrak{L}\left\{\frac{d}{dt}[tPx]\,D^{-1} F(t)\right\}$$

Ahora bien, de [6] deducimos:

$$\frac{d}{dt}\{tPx\}\,D^{-1} F(t) = D\,\mathfrak{p}(t) - F(t)$$

en consecuencia, podemos escribir:

$$u(\delta) = \mathfrak{L}\{P\,\mathfrak{p}(t)\} + \mathfrak{L}\{D\,\mathfrak{p}(t)\} - \mathfrak{L}\{F(t)\}$$

El principio de equivalencia actuarial asegura que $u(\delta)=0$, por tanto:

$$\mathfrak{L}\{P\,\mathfrak{p}(t)\} = -\,\mathfrak{L}\{D\,\mathfrak{p}(t)\} + \mathfrak{L}\{F(t)\}$$

pero, siendo

$$\mathfrak{L}\{P\ \mathfrak{p}(t)\} = P\,\mathfrak{L}\{\mathfrak{p}(t)\} = P\int_0^\infty e^{-\delta t}\,tPx\,D^{-1} F(t)\,dt = P\int_0^\infty e^{-\delta t}\,tPx\,dt = P\,\bar{a}_x$$

$$\mathfrak{L}\{D\,\mathfrak{p}(t)\} = \int_0^\infty e^{-\delta t}\,\frac{d}{dt}\,\mathfrak{p}(t) = -\,\delta\,\bar{a}_x$$

$$\mathfrak{L}\{F(t)\} = 1$$

resulta

$$P \bar{a}_x = 1 - \delta \bar{a}_x$$

o sea,

$$P = \frac{1 - \delta \bar{a}_x}{\bar{a}_x} = \frac{1}{\bar{a}_x} - \delta$$

Existen tablas de $\bar{a}_x$ cuya significación actuarial es la de valor actual de una renta vitalicia continua constante, sobre una cabeza de edad $x$.

b) Capital diferido de vida.

Para este seguro tenemos:

$$\begin{array}{lll} U_0(t) = P & \text{para} & 0 \leqslant t < n \\ U_1(t) = 0 & \text{para} & 0 \leqslant t < n \\ U_1(t) = 1 & \text{para} & t = n \end{array}$$

Tanto $U_0(t)$ como $U_1(t)$ están vinculalas a la probabilidad de supervivencia. Podemos plantear:

$$V(t) = P\, \mathfrak{p}(t) - {}_n p_x\, D^{-1} F(t, n)$$

Aplicando la transformación de Laplace, resulta:

$$u(\delta) = \int_0^\infty e^{-\delta t} [P\, \mathfrak{p}(t) - {}_n p_x\, D^{-1} F(t; n)]\, dt =$$

$$= P \int_0^n e^{-\delta t}\, \mathfrak{p}(t)\, dt - {}_n p_x \int_0^n e^{-\delta t} D^{-1} F(t; n)\, dt =$$

$$= P\, \bar{a}_{x\,\overline{n|}} - n\, p_x\, e^{-\delta n} = P\, \bar{a}_{x\,\overline{n|}} - n\, \bar{E}_x$$

en donde,

$${}_n\bar{E}_x = {}_n p_x\, e^{-\delta n} \qquad \text{y} \qquad \bar{a}_{x\,\overline{n|}} = \int_0^n e^{-\delta t}\, {}_t p_x$$

$$P = \frac{{}_n\bar{E}_x}{\bar{a}_{x\,\overline{n|}}}$$

c) Seguro temporal para caso de muerte.

Nos interesa solamente lo que ocurra en el intervalo $(o, n)$; por consiguiente definiremos:

$$\mathfrak{p}(t) = {}_t p_x \cdot [D^{-1} F(t) - D^{-1} F(t; n)]$$

$$D\, \mathfrak{p}(t) = F(t) + \frac{d}{dt} \{{}_t p_x\} [D^{-1} F(t) - D^{-1} F(t; n)] - {}_n p_x\, F(t; n)$$

Si el seguro es a primas constantes, será:

$$U_0(t)=P$$

vinculando a la supervivencia del asegurado, recogida por $\mathfrak{p}(t)$. La esperanza matemática $E[U_0(t)]=P\,\mathfrak{p}(t)$.

El valor actual de la prestación viene dado por:

$$\mathfrak{L}\{P\,\mathfrak{p}(t)\} = P\int_0^\infty e^{-\delta t}\,\mathfrak{p}(t)\,dt = P\int_0^\infty e^{-\delta t}\,{}_tp_x\,[D^{-1}F(t) - D^{-1}F(t;n)]\,dt =$$

$$= P\int_0^n e^{-\delta t}\,{}_tp_x\,dt = P\,\bar{a}_{x\,\overline{n|}}$$

denotando, como anteriormente con $\bar{a}_{x\,\overline{n|}}$, el valor actual de una renta *continua, unitaria, vitalicia temporal por n años.*

La función de densidad de la contraprestación del asegurador en esta modalidad es:

$$U_1(t)=1 \qquad \text{para} \qquad o<t<n$$

y, por tanto, su esperanza matemática

$$P_1(t)=\mu_{x+t}\cdot{}_tP_x\cdot[D^{-1}F(t)-D^{-1}F(t,n)]$$

En consecuencia, el valor actual de la contraprestación al tanto instantáneo de descuento $\delta$ vendrá dado por:

$$\mathfrak{L}\{P_1(t)\} = \int_0^\infty e^{-\delta t}\,P_1(t)\,dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\delta t}\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,[D^{-1}F(t) - D^{-1}F(t;n)]\,dt$$

$$= \int_0^n e^{-\delta t}\,{}_tp_x\,\mu_{x+t} = \bar{A}^1_{x\,\overline{n|}}$$

Ahora bien, como:

$$\mathfrak{L}\{D\,\mathfrak{p}(t)\} = \mathfrak{L}\{F(t)\} - \mathfrak{L}\{P_1(t)\} - \mathfrak{L}\{{}_nP_x\,F(t,n)\} = 1 - \bar{A}^1_{x\,\overline{n|}} - {}_n\bar{E}_x$$

Por otro lado, al ser:

$$\mathfrak{L}\{D\,\mathfrak{p}(t)\} = \delta\,\mathfrak{L}\{\mathfrak{p}(t)\} = \delta\,\bar{a}_{x\,\overline{n|}}$$

tenemos:

$$1 - \bar{A}^1_{x\,\overline{n|}} - {}_n\bar{E}_x = \delta\,\bar{a}_{x\,\overline{n|}}$$

Según esto, podemos plantear:

$$P \cdot \bar{a}_{x\,\overline{n}|} = 1 - \delta\, \bar{a}_{x\,\overline{n}|} - {}_n\bar{E}_x$$

o sea

$$P = \frac{1}{\bar{a}_{x\,\overline{n}|}} - \delta - \frac{{}_n\bar{E}_x}{\bar{a}_{x\,\overline{n}|}}$$

d) SEGURO MIXTO A PRIMA PERIÓDICA.

Por definición, es la suma de un seguro temporal y un diferido de vida. La prima vendrá dada por:

$$P\, \bar{a}_{x\,\overline{n}|} = 1 - \delta\, \bar{a}_{x\,\overline{n}|}$$

de donde

$$P = \frac{1}{\bar{a}_{x\,\overline{n}|}} - \delta$$

Nos hemos limitado al análisis de las primas puras, evitando el inconveniente que suponen los recargos comerciales y de seguridad, asimismo al tratamiento de la cuestión en el campo continuo; sin embargo, es evidente que cuanto acabamos de exponer marca la pauta respecto a cómo deberían ser tratadas estas cuestiones cuando empleamos la transformada de Laplace en cualquier modalidad de Seguro sobre la Vida.

## BIBLIOGRAFIA

J. L. LÓPEZ RUIZ: *La transformación de Laplace.*

M. DENIS-PAPIN y A. KAUFMANN: *Cours de Calcul operationnel appliqué.*

F. E. NIXON: *Transformation de Laplace.*

G. DOETSCH: *La solución de problemas de contorno y de valores iniciales en ecuaciones diferenciales mediante la transformación de Laplace y otras transformaciones funcionales.*

A. LASHERAS SANZ: *Matemática del Seguro.*

MARC-HENRI AMSLER: *De l'usage du calcul operatonnel en assurance sur la vie.*

## RESUMEN

El autor muestra el sentido que en *Matemática del Seguro* tiene el empleo de la transformación de Laplace, y prueba cómo en base a ella pueden obtenerse las fórmulas fundamentales de la Matemática del Seguro de Vida.