Seguro voluntario de automóviles

Un problema de Estrategia Comercial

Por

AGUSTIN SANS Y DE LLANOS

1. LA CUESTION.

Durante un ejercicio, las primas emitidas por una Entidad en S. V. A. fueron:

R. C. suplementaria	394 M (86 %)
Combinado	64 M (14 %)
Total	458 M

Esta composición de Cartera podría ser modificada en el futuro, fomentando la producción de Combinado, y ello en atención a un hecho muy particular, cual es que la Entidad en cuestión tiene en una zona asegurados 2 de cada 3 *turismos*.

2. LA INFORMACION Y SU TRATAMIENTO POR TEORIA DE JUEGOS.

Se introduce la siguiente notación:

P=Parque total de turismos en la Zona.

A=Grupo de turismos asegurados de R. C. en la Entidad.

B= " " " " " Combinado en la Entidad.

C= " " " " " R. C. en resto de Entidades.

D= " " " " " Combinado en resto de Entidades

$M=A+B$=Total de turismos asegurados en la Entidad.

$R=C+D$= " " " " por resto de Entidades.

Para la cuantificación cardinal de estos grupos se establece la siguiente notación correlativa a la anterior:

T = Número de turismos del Grupo P.
T_1 = " " " " " M.
T_2 = " " " " " R.
x = " " " " " A.
y = " " " " " B.
z = " " " " " C.
t = " " " " " D.

Las siguientes relaciones son evidentes:

$$T = T_1 + T_2$$
$$T_1 = x + y$$
$$T_2 = z + t$$

Hay que determinar la probabilidad de colisión entre dos Grupos determinados, la cual es una probabilidad compuesta por:

a) Probabilidad de que haya colisión entre vehículos (se descarta vehículo contra un objeto), y

b) Probabilidad de que, habiendo colisión, sea entre dos Grupos determinados.

La probabilidad enunciada en a) —que es, en realidad, una frecuencia—, se toma del muestreo de 1971, realizado por la ponencia actuarial del S. N. S.:

— Frecuencia de colisión de R. C.	0,25
" " " " Combinado	1,11

Independientemente, se van a utilizar los siguientes datos, tomados de la estadística de la Entidad:

Siniestro medio de R. C.	7.122 ptas.
" " " Combinado	9.701 ptas.
Prima media de R. C.	2.243 ptas.
" " " Combinado	11.674 ptas.

3. EL SOPORTE MATEMATICO.

Sean:

P_A = Prima media de un turismo del grupo A.
P_B = " " " " " " " B.
S_A = Siniestro generado por un turismo de la clase A.
S_B = " " " " " " " B.

Y según notación antes introducida resulta ser:

$x \cdot P_A$=Primas totales del grupo A sólo (R. C.)
$y \cdot P_B$= " " " " B (Combinado).
$x \cdot S_A$=Pago total por siniestros del grupo A.
$y \cdot S_B$= " " " " " " B.

Pues bien, el problema reside en maximizar la utilidad o ganancia G dada por:

$$G=(x \cdot P_A - x \cdot S_A)+(y \cdot P_B - y \cdot S_B)$$

Hay que calcular los valores de x e y para que G sea máximo. (También se puede decir que la pérdida sea mínima).

Ya se ha elegido $P_A=2.243$ y $P_B=11.674$; hay que calcular S_A y S_B.

Para ello hay que establecer la *Matriz de Pagos,* lo que exige antes formar estas dos matrices:

		A	B	C	D
Inocente	A	7.122	16.823	0	0
	B	9.701	19.402	0	0
	C	7.122	16.823	0	0
	D	9.701	19.402	0	0
			Culpable		

		A	B	C	D
Culpable	A	7.122	9.701	7.122	9.701
	B	16.823	19.402	16.823	19.402
	C	0	0	0	0
	D	0	0	0	0
			Inocente		

En base a estas dos matrices, y admitiendo la equiprobabilidad de la culpabilidad en una colisión entre los dos componentes de la misma, la *Matriz de Pagos* es:

	A	B	C	D
A	7.122	13.262	3.561	4.851
B	13.262	19.402	8.412	9.701
C	3.561	8.412	0	0
D	4.851	9.701	0	0

Esta matriz representa lo que tiene que pagar la Entidad por cada siniestro.

Teniendo presente que se consideran colisiones y no vehículos colisionados, si, por ejemplo, se observa la colisión entre el grupo A con el grupo B, automáticamente queda decartada la colisión entre el grupo B y el grupo A, pues es la misma colisión. Ello se aprecia en la matriz, viendo que es simétrica respecto a su diagonal principal. Por ello se puede reducir a la *Matriz de Siniestros medios pagados,* M_1.

	A	B	C	D
A	7.122	13.262	3.561	4.851
B	—	19.402	8.412	9.701
C	—	—	0	0
D	—	—	—	0

Las dos matrices previas para hallar la Matriz de Frecuencias de Colisión son:

	Colisionado			
Colisionador	A	B	C	D
A	0,25	0,25	0,25	0,25
B	1,11	1,11	1,11	1,11
C	0,25	0,25	0,25	0,25
D	1,11	1,11	1,11	1,11

	Colisionador			
Colisionado	A	B	C	D
A	0,25	1,11	0,25	1,11
B	0,25	1,11	0,25	1,11
C	0,25	1,11	0,25	1,11
D	0,25	1,11	0,25	1,11

Esto se interpreta en el sentido de que la frecuencia de colisión entre las clases A y C es de 0,25, cualquiera que sea la clase colisionada y que la frecuencia de colisión de las clases B y D es de 1,11.

La agrupación de las dos matrices, siguiendo el criterio de equiprobabilidad de ser "colisionador" o "colisionado" da la matriz única:

	A	B	C	D
A	0,25	0,68	0,25	0,68
B	0,68	1,11	0,68	1,11
C	0,25	0,68	0,25	0,68
D	0,68	1,11	0,68	1,11

Esta matriz también es simétrica respecto a la diagonal principal, por lo que, procediendo como se hizo para la *Matriz de Pagos*, M_1, se obtiene ahora la *Matriz de frecuencias de colisión*, M_2:

	A	B	C	D
A	0,25	0,68	0,25	0,68
B	—	1,11	0,68	1,11
C	—	—	0,25	0,68
D	—	—	—	1,11

Procede ahora determinar la matriz que determina la probabilidad de colisión entre dos grupos o clases determinados. Su valor es:

	A	B	C	D
A	$\frac{2 \cdot x^2}{T \cdot (T-1)}$	$\frac{2 \cdot x \cdot y}{T \cdot (T-1)}$	$\frac{2 \cdot x \cdot z}{T \cdot (T-1)}$	$\frac{2 \cdot x \cdot t}{T \cdot (T-1)}$
B	$\frac{2 \cdot x \cdot y}{T \cdot (T-1)}$	$\frac{2 \cdot y^2}{T \cdot (T-1)}$	$\frac{2 \cdot y \cdot z}{T \cdot (T-1)}$	$\frac{2 \cdot y \cdot t}{T \cdot (T-1)}$
C	$\frac{2 \cdot x \cdot z}{T \cdot (T-1)}$	$\frac{2 \cdot y \cdot z}{T \cdot (T-1)}$	$\frac{2 \cdot z^2}{T \cdot (T-1)}$	$\frac{2 \cdot z \cdot t}{T \cdot (T-1)}$
D	$\frac{2 \cdot x \cdot t}{T \cdot (T-1)}$	$\frac{2 \cdot y \cdot t}{T \cdot (T-1)}$	$\frac{2 \cdot z \cdot t}{T \cdot (T-1)}$	$\frac{2 \cdot t^2}{T \cdot (T-1)}$

Eliminando, como en casos precedentes los términos simétricos, se obtiene la *Matriz probabilística de colisión entre grupos*, M_3:

	A	B	C	D
A	$\frac{2 \cdot x^2}{T \cdot (T-1)}$	$\frac{2 \cdot x \cdot y}{T \cdot (T-1)}$	$\frac{2 \cdot x \cdot z}{T \cdot (T-1)}$	$\frac{2 \cdot x \cdot t}{T \cdot (T-1)}$
B	—	$\frac{2 \cdot y^2}{T \cdot (T-1)}$	$\frac{2 \cdot y \cdot z}{T \cdot (T-1)}$	$\frac{2 \cdot y \cdot t}{T \cdot (T-1)}$
C	—	—	$\frac{2 \cdot z^2}{T \cdot (T-1)}$	$\frac{2 \cdot z \cdot t}{T \cdot (T-1)}$
D	—	—	—	$\frac{2 \cdot t^2}{T \cdot (T-1)}$

7

Multiplicando las matrices M_2 y M_3 resulta una nueva matriz que determina la frecuencia probable de que haya colisión entre dos grupos determinados.

Esta *matriz* M$_4$ *de frecuencias probables de colisión entre grupos* es:

	A	B	C	D
A	$\frac{0{,}5 \cdot x^2}{T \cdot (T-1)}$	$\frac{1{,}36 \cdot x \cdot y}{T \cdot (T-1)}$	$\frac{0{,}5 \cdot x \cdot z}{T \cdot (T-1)}$	$\frac{1{,}36 \cdot x \cdot t}{T \cdot (T-1)}$
B	—	$\frac{2{,}22 \cdot y^2}{T \cdot (T-1)}$	$\frac{1{,}36 \cdot y \cdot z}{T \cdot (T-1)}$	$\frac{2{,}22 \cdot y \cdot t}{T \cdot (T-1)}$
C	—	—	$\frac{0{,}5 \cdot z^2}{T \cdot (T-1)}$	$\frac{1{,}36 \cdot z \cdot t}{T \cdot (T-1)}$
D	—	—	—	$\frac{2{,}22 \cdot t^2}{T \cdot (T-1)}$

Finalmente, el producto de la matriz M_4 por la M_1 proporciona una matriz que determina la siniestralidad media probable a pagar por colisión entre grupos cuyo valor es:

	A	B	C	D
A	$\frac{3561 \cdot x^2}{T \cdot (T-1)}$	$\frac{18036{,}32 \cdot x \cdot y}{T \cdot (T-1)}$	$\frac{1780{,}5 \cdot x \cdot z}{T \cdot (T-1)}$	$\frac{6597{,}36 \cdot x \cdot t}{T \cdot (T-1)}$
B	—	$\frac{43072{,}44 \cdot y^2}{T \cdot (T-1)}$	$\frac{11440{,}32 \cdot y \cdot z}{T \cdot (T-1)}$	$\frac{21536{,}22 \cdot y \cdot t}{T \cdot (T-1)}$
C	—	—	0	0
D	—	—	—	0

La siniestralidad media probable a pagar por vehículo asegurado resulta de sumar los términos de esta matriz, es decir:

$$S_m = \frac{1}{T(T-1)} (3561 \cdot x^2 + 18036{,}32 \cdot x \cdot y + 1780{,}5 \cdot x \cdot z + 6607{,}36 \cdot x \cdot t +$$

$$+ 43072{,}44 \cdot y^2 + 11440{,}32 \cdot y \cdot z + 21536{,}22 \cdot y \cdot t)$$

Por consiguiente, la siniestralidad total probable a pagar por la Entidad será:

$$S_T = T_1 \cdot S_m \qquad (T_1 = \text{número de turismos asegurados})$$

o bien, puesta de otra forma:

$$S_T = x \cdot S_A + y \cdot S_B$$

4. LA FUNCION "GANANCIA" A MAXIMIZAR.

Será la que resulta de restar Primas y Siniestros, siendo de resaltar que se opera con primas comerciales y no puras, o sea:

$$G = P_T - S_T$$

y como las primas totales eran $P_T = x \cdot P_A + y \cdot P_B$, siendo x la proporción en número absoluto de autos R. C. y la de Combinado, la función ganancia a maximizar viene dada por:

$$G = x \cdot P_A + y \cdot P_B - \frac{x+y}{T \cdot (T-1)} \cdot (3561 \cdot x^2 + 18036{,}32 \cdot x \cdot y + 1780{,}5 \cdot x \cdot z +$$

$$6597{,}36 \cdot x \cdot t + 43072{,}44 \cdot y^2 + 11440{,}32 \cdot y \cdot z + 21536{,}22 \cdot y \cdot t)$$

Se ha estudiado el máximo de esta función en la hipótesis de que el resto de las Entidades aseguradoras tienen la composición de Cartera siguiente:

En R. C.	84 %	Además $T = 136.998$ turismos en la Zona, con lo que se tiene que (admitiendo que la Entidad tiene 2/3 de T) $T_1 = 2/3\, T = 91.332$ y $T_2 = 45.666$).
En Comb.	16 %	

$$z = 0{,}84 \cdot T_2$$
$$t = 0{,}16 \cdot T_2$$

Es decir:

$z = 38.359$ turismos en R. C. asegurados por resto de Entidades.

$t = \ 7.307$ turismos en Combinado ídem, íd., íd.

siendo, además:

$$T \cdot (T-1) = 136.998 \times 136.997 = 18.768.315.006$$

$P_A = \ 2.243$ = Prima media de R. C.

$P_B = 11.674$ = Prima media de Combinado.

5. EL RESULTADO.

R. C.		Combinado		Primas	Siniestros	Función G
x %	Autos	*y* %	Autos			
0	0	100	91.332	1.066,28 M	2.013,38 M	−917,17 M
10	9.933	90	82.199	980,07 M	1.727,21 M	−747,14 M
•	•	•	•	•	•	•
70	63.932	30	27.400	463,26 M	497,67 M	− 34,41 M
80	73.065	20	18.266	377,12 M	373,99 M	+ 3,13 M
85	77.632	15	13.700	334,06 M	320,88 M	+ 13,18 M
90	82.199	10	9.133	290,95 M	273,47 M	+ 17,48 M
95	86.765	5	4.567	247,93 M	232,04 M	+ 15,89 M
100	91.332	0	0	204,85 M	196,32 M	+ 8,53 M

Se aprecia que el máximo de G corresponde a la proporción:

$x = 90\ \%$ en R. C.

$y = 10\ \%$ en Combinado.