Seguros de vida con crecimiento exponencial

Por

AGUSTIN SANS Y DE LLANOS

Dentro del campo de los Seguros que el Grupo de Trabajo Vida del Comité Europeo de Seguros ha dado en calificar de "Dinámicos" figuran aquéllos que ofrecen un crecimiento lineal o exponencial de las primas y de las prestaciones; o de sólo las primas.

El tratamiento actuarial de los Seguros con crecimiento en progresión aritmética se aborda en todos los Textos; los cuales, en cambio, raras veces se ocupan de los Seguros en progresión geométrica, y, cuando lo hacen, despachan la cuestión diciendo que un Seguro creciente geométricamente a la tasa c y en base al interés técnico i es equivalente, matemáticamente, a un Seguro constante calculado al tipo de interés ficticio r definido por:

$$\frac{1+i}{1+c} = 1 + r$$

La finalidad, entonces, de la presente Nota es la de una mayor aproximación al tema.

* * *

Consideremos un Seguro sobre la vida de una cabeza de edad actual (x) que será pagadero en caso de que fallezca entre las edades $x+n$ y $x+n+m$, siendo la suma asegurada a la edad $x+t$ denotada por $f(t)$.

La prima única pura de este Seguro es:

$$U_x = \int_n^{n+m} v^t \cdot f(t) \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} \cdot dt = \frac{1}{D_x} \cdot \int_n^{n+m} f(t) \cdot D_{x+t} \cdot \mu_{x+t} \cdot dt \qquad [1]$$

Supongamos que:

$$f(t) = (1 + c)^t$$

con lo que resulta:

$$U_x = \frac{1}{D_x} \cdot \int_n^{n+m} (1+c)^t \cdot D_{x+t} \cdot \mu_{x+t} \cdot dt$$

Se observa que:

$$\frac{(1+c)^t \cdot D_{x+t}}{D_x} = (1+c)^t \cdot (1+i)^{-t} \cdot {}_tp_x$$

con lo que haciendo:

$$\frac{1+i}{1+c} = 1 + r; \qquad \text{o sea} \qquad r = \frac{i-c}{1+c}$$

se obtiene:

$$U_x = \int_n^{n+m} (1+r)^{-t} \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} \cdot dt \qquad [2]$$

Representando por D^* los símbolos de conmutación calculados en base al tipo de interés r se puede escribir que:

$$U_x = \frac{1}{D_x} \cdot \int_n^{n+m} D^*_{x+t} \cdot \mu_{x+t} \cdot dt \qquad [3]$$

siendo:

$$D^*_{x+t} = (1+r)^{-(x+t)} \cdot l_{x+t}$$

Si en lugar de un Seguro para caso de muerte se trata de una Renta Temporal con términos definidos también por:

$$f(t) = (1+c)^t$$

se tiene:

$$a^*_{x:\overline{n+m|}} = \frac{1}{D^*_x} \cdot \int_0^{n+m} D^*_{x+t} \cdot dt \qquad [4]$$

Entonces, la prima anual pura inicial de esta modalidad de Seguro para caso de muerte, pagadera como máximo $(n+m)$ años, es:

$$P = \frac{U_x}{a^*_{x:\overline{n+m|}}} = \frac{\int_n^{n+m} D^*_{x+t} \cdot \mu_{x+t} \cdot dt}{\int_0^{n+m} D^*_{x+t} \cdot dt} \qquad [5]$$

Para $n=0$ y $m=\infty$ resulta la prima anual vitalicia de un Seguro Vida Entera a la tasa de crecimiento c y con interés técnico i que representamos así:

$$P = \frac{A^*_x}{a^*_x}$$

Para $n=0$ resulta la prima anual de un Seguro Temporal de m años, es decir:

$$P = \frac{/_m A^*_x}{a^*_{x:\overline{m}|}}$$

En el caso de un Seguro Mixto la prima pura se calcula por la expresión:

$$P = \frac{/_n A^*_x + (1+c)^n \cdot {}_nE_x}{a^*_{x:\overline{n}|}}$$

Obviamente, todas estas primas anuales crecen acumulativamente a la misma tasa c que el Capital.

* * *

Este tipo de Seguros dinámicos otorgan al asegurado, además del derecho al Rescate o la Reducción de Capital y Liberación de primas, el de fijar la cuantía de la prima en la de la última vencida y pagada.

Esta fijación de la prima para el futuro tiene como consecuencia que la tasa de crecimiento c pasa a ser $h<c$ en cualquier año t.

Sea, como ejemplo, un Seguro Vida Entera a primas vitalicias de las que la inicial es:

$$P_x = \frac{A^*_x}{a^*_x} = \frac{1 - d^* \cdot a^*_x}{a^*_x} = \frac{1}{a^*_x} - d^*; \qquad \text{para} \qquad d^* = r \cdot (1+r)^{-1} \qquad [7]$$

Al término de t años corridos y de t primas pagadas, se tiene que:

— El Capital asciende ya a $(1+c)^{t-1}$
— La última prima pagada fue $(1+c)^{t-1} \cdot P_x$
— La reserva matemática vale:

$${}_tV_x = (1+c)^{t-1}\,[A^*_{x+t} - P \cdot a^*_{x+t}]$$

Y teniendo presente que es:

$$A^*_x = 1 - d^* \cdot a^*_x$$

el valor de la reserva viene dado por:

$${}_tV_x = (1+c)^{t-1}\left[1 - \frac{a^*_{x+t}}{a^*_x}\right] \qquad [8]$$

Al quedar constante la prima se obtiene un Seguro de Capital creciente a la tasa reducida h y cuya reserva es:

$$(1+c)^{t-1} \cdot \left[(1+h) \cdot A^{(h)}{}_{x+t} - P_x \cdot \mathrm{a}^{(i)}{}_{x+t}\right] \qquad [9]$$

expresión en la cual es:

$A^{(h)}{}_{x+t}$ = prima única de Vida Entera creciente a la tasa h e interés i.

$\mathrm{a}^{(i)}{}_{x+t}$ = prima única de renta vitalicia al interés i y de términos constantes e iguales a la unidad.

La relación existente entre h e i es:

$$(1+h) = (1+i) \cdot (1+r)^{-1}$$

Ahora bien; se tiene que:

$$(1+h) \cdot A^{(h)}{}_{x+t} = (1+h)\left[1 - h \cdot (1+h)^{-1} \cdot \mathrm{a}^{(h)}{}_{x+t}\right] =$$

$$= 1 - r \cdot (1+r)^{-1} \cdot \mathrm{a}^{(r)}{}_{x+t} = A^{(r)}{}_{x+t} \qquad [10]$$

Sustituyendo la [10] en la [9] e igualando, después la [8] y la [9] se tiene sucesivamente:

$$(1+c)^{t-1}\left[A^{(r)}{}_{x+t} - P_x \cdot \mathrm{a}^{(i)}{}_{x+t}\right] = (1+c)^{t-1}\left[1 - \frac{\mathrm{a}^*{}_{x+t}}{\mathrm{a}^*{}_x}\right] \qquad [11]$$

$$A^{(r)}{}_{x+t} - P_x \cdot \mathrm{a}^{(i)}{}_{x+t} = 1 - \frac{\mathrm{a}^*{}_{x+t}}{\mathrm{a}^*{}_x} \qquad [12]$$

Y teniendo en cuenta la [10], la [12] se convierte en:

$$1 - r \cdot (1+r)^{-1} \cdot \mathrm{a}^{(r)}{}_{x+t} - P_x \cdot \mathrm{a}^{(i)}{}_{x+t} = 1 - \frac{\mathrm{a}^*{}_{x+t}}{\mathrm{a}^*{}_x} \qquad [13]$$

Introduciendo ahora la aproximación:

$$\frac{\mathrm{a}^{(r)}{}_{x+t}}{\mathrm{a}^{(r)}_{\overline{t|}}} \simeq \frac{\mathrm{a}^{(i)}{}_{x+t}}{\mathrm{a}^{(i)}{}_{x+t}} \qquad \therefore \qquad \mathrm{a}^{(r)}{}_{x+t} \simeq \mathrm{a}^{(r)}_{\overline{t|}} \cdot \frac{\mathrm{a}^{(i)}{}_{x+t}}{\mathrm{a}_t^{(i)}} \qquad [14]$$

la [13] pasa a ser:

$$P_x \cdot \mathrm{a}^{(i)}{}_{x+t} + r \cdot (1+r)^{-1} \cdot \mathrm{a}^{(r)}_{\overline{t|}} \cdot \frac{\mathrm{a}^*{}_{x+t}}{\mathrm{a}^*{}_x} = \frac{\mathrm{a}^*{}_{x+t}}{\mathrm{a}^*{}_x}$$

De donde sucesivamente:

$$r \cdot (1+r)^{-1} \cdot a_{\overline{t|}}^{(r)} \cdot \frac{a^{(i)}_{x+t}}{a_{\overline{t|}}^{(i)}} = \frac{a^*_{x+t}}{a^*_x} - P_x \cdot a^{(i)}_{x+t}$$

$$r \cdot (1+r)^{-1} \cdot (1+r) \cdot \frac{1-(1+r)^{-t}}{r} \cdot \frac{a^{(i)}_{x+t}}{a_{\overline{t|}}^{(i)}} = \frac{a^*_{x+t}}{a^*_x} - P_x \cdot a^{(i)}_{x+t}$$

$$[1-(1+r)^{-t}] \cdot \frac{a^{(i)}_{x+t}}{a_{\overline{t|}}^{(i)}} = \frac{a^*_{x+t}}{a^*_x} - P_x \cdot a^{(i)}_{x+t}$$

$$[1-(1+h)^t \cdot (1+i)^{-t}] \cdot \frac{a^{(i)}_{x+t}}{a_{\overline{t|}}^{(i)}} = \frac{a^*_{x+t}}{a^*_x} - P_x \cdot a^{(i)}_{x+t}$$

Y en definitiva:

$$(1+h)^t = (1+i)^t \left[1 - \frac{a_{\overline{t|}}^{(i)}}{a^{(i)}_{x+t}} \cdot \frac{a^*_{x+t}}{a^*_x} + P \cdot a_{\overline{t|}}^{(i)} \right] \qquad [15]$$

En un Seguro Vida Entera creciente a la tasa acumulativa $c=5$ por 100 y con interés técnico del 3,5 por 100 para una edad inicial $x=40$ los valores de la tasa reducida h al cabo de t primas pagadas, calculados en moderna Tabla son:

t	h
5	2,481 %
10	2,941 %
15	3,305 %
20	3,580 %
25	3,785 %

* * *

La reserva matemática al final del año K correspondiente a la nueva situación del seguro, originada por la "congelación" de la prima, se determina como sigue.

Si la tasa de crecimiento c fue reducida a h en el año t, el Capital era:

$$(1+c)^{t-1}$$

Entonces, al calcular la reserva el Capital ya es:

$$(1+c)^{t-1}\cdot(1+h)^{K-t}$$

Por tanto, aquella reserva vale:

$$V_k=(1+c)^{t-1}\left[(1+h)^{k-t}\cdot(1+h)\cdot A^{(h)}{}_{x+t}-P_x\cdot \mathrm{a}^{(i)}{}_{x+t}\right]$$

la cual, teniendo en cuenta la [10] y la [14] pasa a ser:

$$V_k \quad (1+c)^{t-1}\left[(1+h)^{k-t}\left(1-[1-(1+r)^{-t}]\cdot\frac{\mathrm{a}^{(i)}{}_{x+t}}{\mathrm{a}_t{}^{(i)}}\right)-P_x\cdot \mathrm{a}^{(i)}{}_{x+t}\right] \qquad [16]$$

En función de esta reserva se calcularán los nuevos valores de rescate.