APENDICE

Nos ha parecido que podría resultar especialmente interesante para el lector, complementar la exposición realizada con su aplicación y observación en algunos ejemplos concretos de operaciones de inversión, seleccionadas con la intención de mostrar prácticamente aquellas limitaciones y distorsiones que alberga la T.I.R., así como el contraste entre los resultados que ésta ofrece y los que permiten los nuevos instrumentos financieros introducidos, descriptivos de la inversión.

En todos ellos, el cálculo de la T.I.R. ha sido realizado mediante la aplicación del algoritmo descrito, programado en un microcomputador Olivetti P-652, sin limitación alguna, prácticamente, en cuanto al grado de aproximación, al número de capitales, ni al fraccionamiento temporal de los diferimientos. No obstante, por claridad interpretativa, hemos procurado la mayor simplicidad en los supuestos propuestos.

Pasamos así a desarrollar los siguientes ejercicios:

Ejemplo 1:

La operación de inversión a considerar supone una subvención inicial de 15 m., con posteriores inputs de 25 m y outputs de 30 m., según el siguiente esquema temporal,

	10	10		5	
0	1	2	3	4	5
15			25		10

Al propio tiempo, consideraremos dos posibles tasas del dinero, $i_1^0 = 8\%$ y $i_2^0 = 12\%$.

La operación de inversión responde al esquema input-output,

$$\begin{array}{ll} I; & \{(10,\ 1)\ (10,\ 2)\ (5,\ 4)\} \\ O; & \{(15,\ 0)\ (25,\ 3)\ (10,\ 5)\} \end{array} \qquad i_1^0 = 8\%; \quad i_2^0 = 12\%$$

Los parámetros son: $A = -1$; $B = 1$; $k = \ln 2 = 0{,}693147$; $\beta = 0{,}5$.

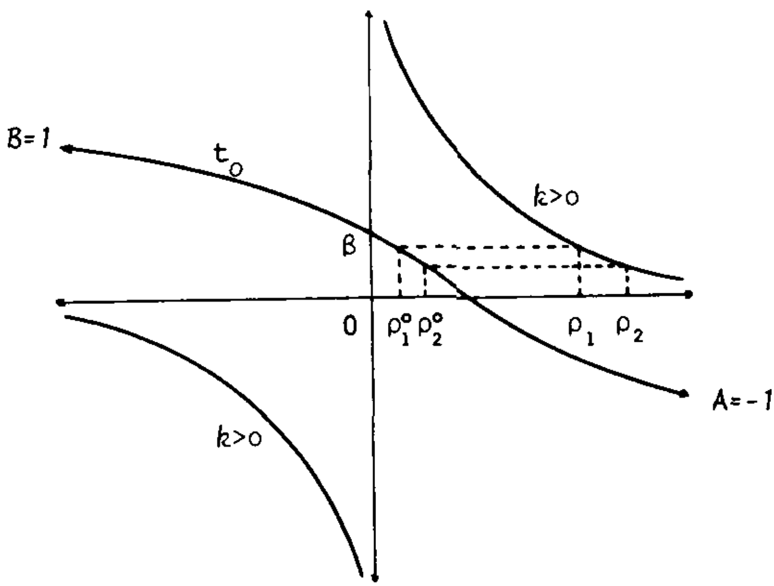
No tiene T.I.R., esto es, no existe solución real para ρ^*.

El análisis financiero, para cada una de las tasas propuestas, da los siguientes resultados:

a) $i_1^0 = 8\%$ *T.F.R.* $\rho_1 = 1{,}655556 \sim 423{,}60\%$; *P.F.M.* $t_0^1 = 0{,}418679$
$\delta_1 = 0{,}66$ *(B° efectivo por pta.)*

b) $i_2^0 = 12\%$ *T.F.R.* $\rho_2 = 1{,}829802 \sim 523{,}77\%$; *P.F.M.* $t_0^2 = 0{,}378810$
$\delta_2 = 0{,}65$ *(B° efectivo por pta.)*

La representación gráfica que le corresponde es,



Comentario: La inexistencia de T.I.R. tiene la estricta interpretación de inexistencia de ley financiera que haga equivalentes ambos conjuntos de capitales, por lo que la *operación financiera* es imposible. No así la *operación de inversión*, con una alta rentabilidad, que la T.I.R. no puede medir.

Ejemplo 2:

Suponemos, ahora, una inversión que se beneficia de un préstamo público de 10 m., sin interés, y reintegrable a los 7 años, con posteriores inputs de 30 m. y outputs de 40 m., según el esquema,

	15	15					10
0	1	2	3	4	5	6	7
10			15	7	9	9	

Seguiremos considerando dos posibles tasas del dinero, $i_1^0=8\%$ y $i_2^0=12\%$.

La inversión corresponde al esquema input-output,

$$\begin{array}{ll} I; & \{(15,\ 1)\ (15,\ 2)\ (10,\ 7)\} \\ O; & \{(10,\ 0)\ (15,3)\ (7,\ 4)\ (9,\ 5)\ (9,\ 6)\} \end{array} \quad i_1^0=8\%;\ i_2^0=12\%$$

Los parámetros son: $A=-1$; $B=-1$; $k=\ln 1{,}25=0{,}223144$; $\beta=0{,}565$.

El cálculo de la T.I.R. nos da el siguiente resultado,

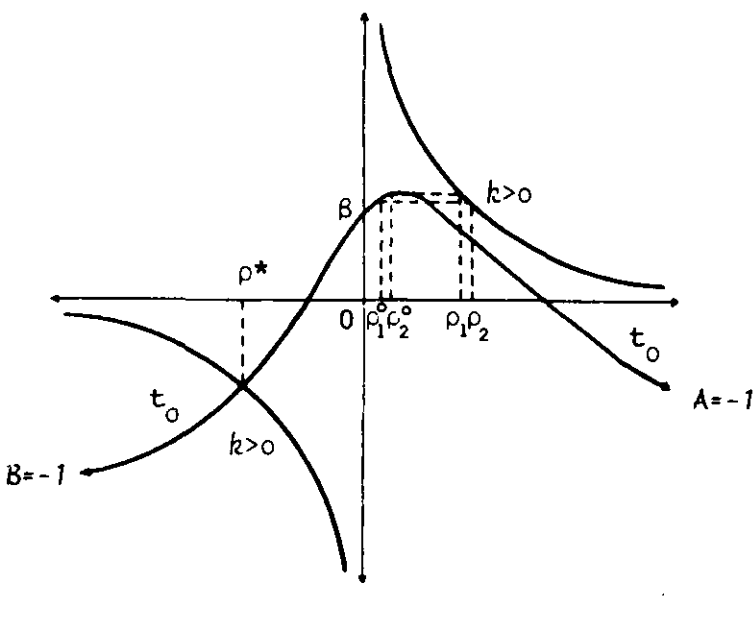
$$\rho^*=-0{,}543172\sim-41{,}91\%$$

El análisis financiero de la rentabilidad ofrece, en cambio, este resultado, para cada una de las tasas consideradas:

a) $i_1^0=8\%$ *T.F.R.* $\rho_1=0{,}363329\sim43{,}81\%$; *P.F.M.* $t_0^1=0{,}614162$
$\delta_1=0{,}18$ *(B° efectivo por pta.)*

b) $i_2^0=12\%$ *T.F.R.* $\rho_2=0{,}357398\sim42{,}96\%$; *P.F.M.* $t_0^2=0{,}624356$
$\delta_2=0{,}15$ *(B° efectivo por pta.)*

La representación gráfica correspondiente es la que sigue,



Comentario: Existe la T.I.R. y, además, con solución única. Pero esta es negativa, siendo interpretada como *rentabilidad negativa* de la inversión, cuando es evidente que tal rentabilidad es positiva, por ser $k>0$. Para explicar esta contradicción hemos de aceptar que sea $\rho^{\circ}=\rho^{*}$ (aún siendo negativo) y completar la información de la T.I.R. con la obtención del P.F.M., para tal ρ^{*}, que es $t_0(\rho^{*})=-0{,}410816$. Ahora sabemos que la operación de inversión, en dicha tasa del dinero, es *degenerada*, siendo identificable la tasa de rentabilidad como tasa de descuento y, por tanto, tanto más beneficiosa cuanto más reducida, invirtiendo así su significado. En todo caso, los supuestos en que se apoya esta explicación son inadmisibles para un correcto análisis financiero.

Ejemplo 3:

Sea la inversión determinada por el siguiente esquema,

	12	3			10
0	1	2	3	4	5
8			5		

o bien,

$$I;\ \{(12,\ 1)\ (3,\ 2)\ (10,\ 5)\} \qquad i_1^0=8\,\%;\ i_2^0=12\,\%$$
$$O;\ \{(8,\ 0)\ (5,\ 3)\ (5,\ 4)\}$$

Son los parámetros: $A=-1$; $B=-1$; $k=-0{,}328504$; $\beta=-0{,}7756$. La T.I.R. es $\rho^{*}=0{,}426318\sim 53{,}16\,\%$.

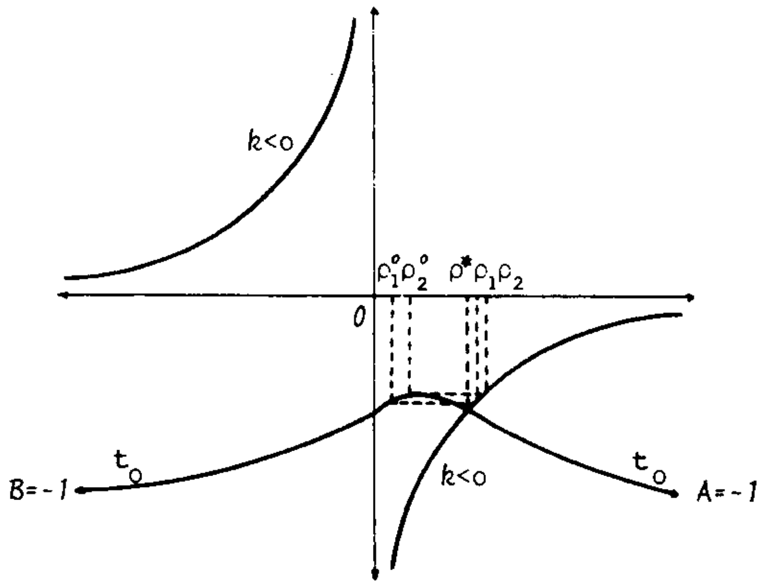
El análisis financiero da estos resultados:

a) $i_1^0=8\,\%$ *T.F.R.* $\rho_1=0{,}430514\sim 53{,}80\,\%$; *P.F.M.* $t_0^1=-0{,}763051$
$\delta_1=-0{,}27$ *(Pérdida efectiva por pta.)*

b) $i_2^0=12\,\%$ *T.F.R.* $\rho_2=0{,}432738\sim 54{,}15\,\%$; *P.F.M.* $t_0^2=-0{,}759130$
$\delta_2=-0{,}24$ *(Pérdida efectiva por pta.)*

Siendo la representación gráfica,

Comentario: La T.I.R., con solución definida, refleja una *rentabilidad positiva* para la inversión. No obstante, existen pérdidas, pues es $k<0$. El análisis financiero refleja la negatividad del P.F.M., por lo que la operación de inversión es *degenerada*, invirtiéndose el significado de la tasa financiera de rentabilidad, T.F.R., que mostrará el perjuicio de un alto



descuento. El *índice de rentabilidad* nos informa claramente de este resultado.

Ejemplo 4:

Sea la inversión de 40 m. inputs y 50 m. outputs que, además, reintegra a los 8 años la ayuda de 10 m., recibida en el inicio,

	20	20						10
0	1	2	3	4	5	6	7	8
10			20	15	10	5		

correspondiendo al esquema,

$$I; \quad \{(20,\ 1)\ (20,\ 2)\ (10,8)\}$$
$$O; \quad \{(10,\ 0)\ (20,\ 3)\ (15,\ 4)\ (10,\ 5)\ (5,\ 6)\} \qquad i^0 = 8\,\%$$

donde hemos fijado un ambiente financiero de tasa al 8 %.

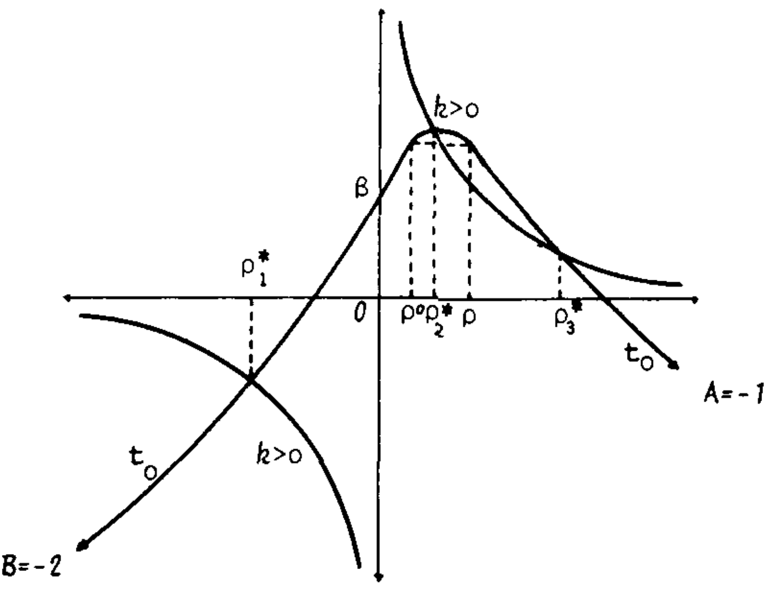
Son los parámetros: $A = -1$; $B = -2$; $k = 0{,}182322$; $\beta = 0{,}53$. La T.I.R. tiene tres soluciones reales,

$$\rho_1^* = -0{,}334315 \sim -28{,}42\,\%$$
$$\rho_2^* = 0{,}244617 \sim 27{,}71\,\%$$
$$\rho_3^* = 0{,}847338 \sim 133{,}34\,\%$$

El análisis financiero obtiene este resultado:

$i^0 = 8\,\%$ *T.F.R.* $\rho = 0{,}278339 \sim 32{,}09\,\%$; *P.F.M.* $t_0 = 0{,}655036$
$\delta = 0{,}1319$ *(B^o efectivo por pta.)*

La representación gráfica es,



Comentario: La T.I.R., sin solución determinada, muestra alternativas que van, desde una pérdida del 28,42 %, a una ganancia del 133,34 %. Lo cierto es que ninguno de tales valores es medida de rentabilidad, salvo para hipótesis muy difíciles de admitir. Las soluciones positivas informan de las posibles leyes financieras que permitirían una operación financiera donde *prestación* y *contraprestación* se correspondiesen con *inputs* y *outputs* de la inversión.

Existe un beneficio, o rentabilidad positiva, indudable en la operación de inversión, pues es $k > 0$. la T.F.R. y el P.F.M. la describen, en el ambiente financiero considerado, y el índice de rentabilidad sintetiza tal información en un parámetro único.

Ejemplo 5:

Consideremos, ahora, la operación inversora,

10	5	5		
0	1	2	3	4
			10	10

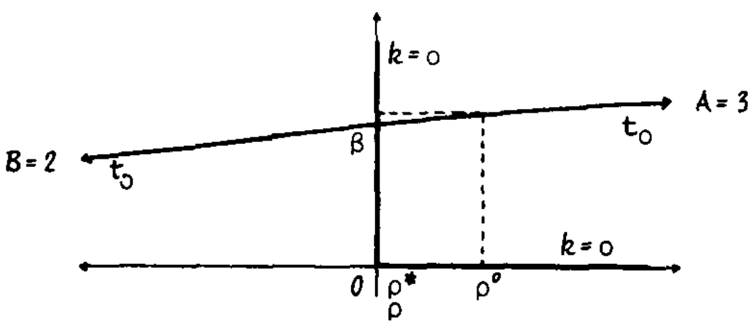
o bien,

$$I;\quad \{(10,\ 0)\ (5,\ 1)\ (5,\ 2)\} \qquad i^0 = 8\,\%$$
$$O;\quad \{(10,\ 3)\ (10,\ 4)\}$$

Los parámetros son: $A=3$; $B=2$; $k=0$; $\beta=2{,}75$. La T.I.R. es $\rho^*=0$. El análisis financiero nos da lo siguiente:

$i^0=8\,\%$ $\quad$ *T.F.R.* $\rho=0$; *P.F.M.* $t_0=2{,}766548$; $\delta=-0{,}213$ *(Pérdida/pta.)*

La representación gráfica es,



Comentario: Por ser $k=0$, no existe una *rentabilidad bruta*, con la consecuencia inmediata de T.I.R. y T.F.R. nulas. No obstante, el P.F.M. es positivo y siendo negativa la *tasa de rentabilidad neta*,

$$\rho_r = \rho - \rho^\circ = -0{,}07696$$

se sigue el perjuicio de la operación, reflejado en el *índice*, el cual no fue acusado por la T.I.R.

Ejemplo 6:

Sea la operación de inversión,

10				10
0	1	2	3	4
	8	8	4	

o bien,

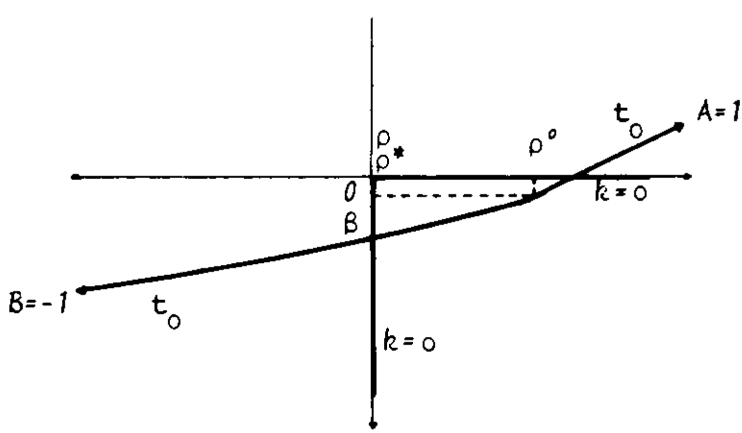
$$I;\quad \{(10,\ 0)\ (10,\ 4)\} \qquad i^0 = 8\,\%$$
$$O;\quad \{(8,\ 1)\ (8,\ 2)\ (4,\ 3)\}$$

Los parámetros son: $A=1$; $B=-1$; $k=0$; $\beta=-0{,}2$. La T.I.R., como en el ejercicio anterior, es $\rho^*=0$.

Del análisis financiero se deduce:

$i^0=8\,\%$ *T.F.R.* $\rho=0$; *P.F.M.* $t_0=-0{,}68082$; $\delta=0{,}005$ *(B° por pta.)*

La representación gráfica es,



Comentario: También es $k=0$, no existe rentabilidad bruta y son nulas la T.I.R. y la T.F.R. El P.F.M. es negativo, lo que supone que la inversión es *degenerada*. Entonces, la tasa de rentabilidad neta negativa,

$$\rho_r = -0{,}076961 \sim -8\,\%$$

supone un beneficio (ahorro del descuento), que el índice de rentabilidad valora, y que tampoco es acusado por la T.I.R.

Ejemplo 7:

Ahora se trata de dos inversiones, cuya preferencia pretendemos establecer, con los siguientes datos:

Inversión A

6		4			
0	1	2	3	4	5
	5				15

Inversión B

4			6			
0	1	2	3	4	5	6
				12		8

I; {(6, 0) (4, 2)}
O; {(5, 1) (15, 5)}

I; {(4, 0) (6, 3)}
O; {(12, 4) (8, 6)}

en donde el análisis financiero considerará sucesivamente las tasas del dinero del 8%, 12% y 16%.

Obtenemos los resultados que exponemos, para cada una de tales inversiones:

Inversión A

Parámetros:

$A_1 = 1$
$B_1 = 3$
$k_1 = 0{,}693147$
$\beta_1 = 3{,}2$
$\rho_1^* = 0{,}238887 \sim 26{,}98\,\%$

Inversión B

Parámetros:

$A_2 = 4$
$B_2 = 3$
$k_2 = 0{,}693147$
$\beta_2 = 3$
$\rho_2^* = 0{,}220572 \sim 24{,}68\,\%$

mostrando la T.I.R. una preferencia por la Inversión A.

Del análisis financiero obtenemos:

Inversión A

$i^0 = 8\,\%$;

T.F.R. $\rho_1 = 0{,}222497 \sim 24{,}92\,\%$
P.F.M. $t_0^1 = 3{,}115316$
Indice $\delta_1 = 0{,}4534$

Inversión B

$i^0 = 8\,\%$;

T.F.R. $\rho_2 = 0{,}227433 \sim 25{,}54\,\%$
P.F.M. $t_0^2 = 3{,}047698$
Indice $\delta_2 = 0{,}4586$

$i^0 = 12\%$;
T.F.R. $\rho_1 = 0{,}225694 \sim 25{,}32\%$
P.F.M. $t_0^1 = 3{,}071176$
Indice $\delta_1 = 0{,}3451$

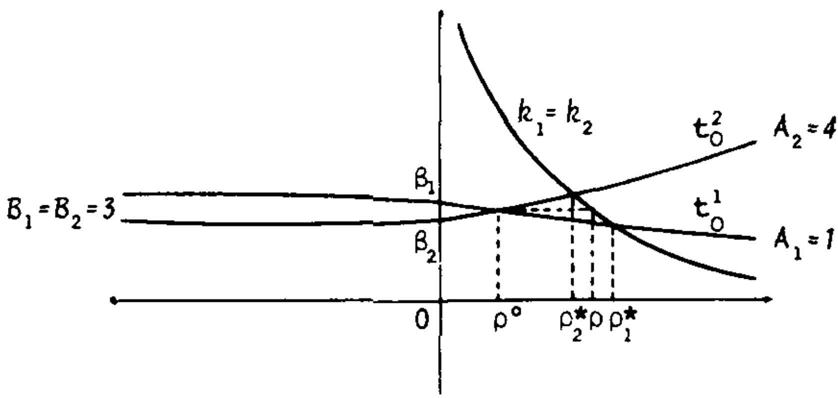
$i^0 = 12\%$;
T.F.R. $\rho_2 = 0{,}225696 \sim 25{,}32\%$
P.F.M. $t_0^2 = 3{,}071146$
Indice $\delta_2 = 0{,}3451$

$i^0 = 16\%$;
T.F.R. $\rho_1 = 0{,}229043 \sim 25{,}74\%$
P.F.M. $t_0^1 = 3{,}026280$
Indice $\delta_1 = 0{,}2440$

$i^0 = 16\%$;
T.F.R. $\rho_2 = 0{,}224015 \sim 25{,}11\%$
P.F.M. $t_0^2 = 3{,}094198$
Indice $\delta_2 = 0{,}2339$

deduciéndose la preferencia por la Inversión B, para $i^0 = 8\%$, la indiferencia entre ambas inversiones, para $i^0 = 12\%$, y finalmente, la preferencia por la Inversión A, para $i^0 = 16\%$.

La correspondiente representación gráfica es,



donde sólo hemos querido representar la T.F.R. para $i^0 = 12\%$, al objeto de simplificar la figura.

Comentario: Ambas inversiones ofrecen la peculiaridad de tener la misma constante característica *k*. Ello es debido a que precisan la misma cuantía suma de *inputs* y reciben también la misma cuantía suma de *outputs*. Por ello, todas las intersecciones críticas se encuentran en la misma hipérbola equilátera. Así, podemos observar que la selección a través de la T.I.R., se pronuncia categóricamente por la Inversión A. Pero ello —como ya hemos estudiado— supone situarse a la vez en dos diferentes ambientes financieros; el primero, definido por la tasa del 26,98%, es reconocido para el cálculo de la rentabilidad de la Inversión A; el segundo, determinado por el 24,68%, para el de la Inversión B.

El análisis financiero de la rentabilidad de tales inversiones nos muestra la indiferencia entre ellas, para una tasa del dinero del 12%, acusada tanto por la T.F.R. como por el índice, debido a la coincidencia de los respectivos P.F.M. de las inversiones. Para tasas del dinero superiores al 12% predominará la rentabilidad de la Inversión A, y la de la Inversión B será mayor para tasas inferiores. Dicha relatividad en la preferencia financiera no es acusada por la T.I.R., cuando es usada como criterio de decisión.

Ejemplo 8:

Contrastemos, ahora, las siguientes inversiones:

Inversión A

2	2	1		5	
0	1	2	3	4	5
			10		15

$I;\ \{(2,\ 0)\ (2,\ 1)\ (1,\ 2)\ (5,\ 4)\}$

$O;\ \{(10,\ 3)\ (15,\ 5)\}$

Inversión B

5		5		
0	1	2	3	4
	2		8	19,1478

$I;\ \{(5,\ 0)\ (5,\ 2)\}$

$O;\ \{(2,\ 1)\ (8,3)\ (19,1478;\ 4)\}$

que vamos a considerar en un ambiente financiero de tasa al 12%.

Expongamos los resultados correspondientes a tales inversiones:

Inversión A

Parámetros:

$A_1 = 3$
$B_1 = 1$
$k_1 = 0,916291$
$\beta_1 = 1,8$
$\rho_1^* = 0,419637 \sim 52,14\%$

Inversión B

Parámetros:

$A_2 = 1$
$B_2 = 2$
$k_2 = 1,069794$
$\beta_2 = 2,52$
$\rho_2^* = 0,419637 \sim 52,14\%$

observándose que la T.I.R. coincide en ambas inversiones.

Del análisis financiero obtenemos:

Inversión A

$i^0 = 12\%$:

T.F.R. $\rho_1 = 0,480314 \sim 61,66\%$
P.F.M. $t_0^1 = 1,907692$
Indice $\delta_1 = 0,7001$

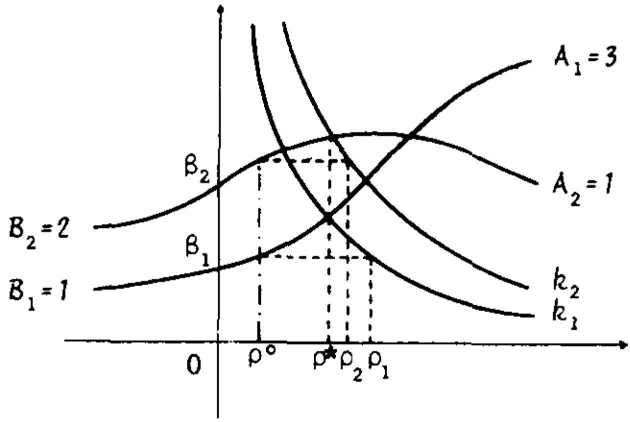
Inversión B

$i^0 = 12\%$:

T.F.R. $\rho_2 = 0,421778 \sim 52,47\%$
P.F.M. $t_0^2 = 2,536391$
Indice $\delta_2 = 0,7823$

del que se deduce una mayor tasa de rentabilidad para la Inversión A; no obstante, el índice de rentabilidad es superior en la Inversión B, consecuencia de su mayor P.F.M., otorgando preferencia a esta última inversión.

Es la representación gráfica,



en donde pueden apreciarse las características señaladas de ambas inversiones.

Comentario: Por coincidir las T.I.R. de ambas inversiones resultan indiferentes, según este criterio de selección. Tal indiferencia resultaría confirmada, *en un ambiente financiero* del 52,14 %, tanto por las T.F.R., como por los índices respectivos de rentabilidad, que también serían iguales en dichas inversiones.

Ahora bien, tal indiferencia no se mantiene en otros ambientes financieros, definidos por distintas tasas del dinero. Así, para el 12 %, la T.F.R., de la Inversión A supera a la correspondiente a la Inversión B. No obstante, según venimos defendiendo, la descripción debe considerar, conjuntamente con la T.F.R., el P.F.M., resultando éste superior en la Inversión B. El *índice de rentabilidad* sintetiza ambas influencias, otorgando preferencia a esta última, cuyo resultado *efectivo* por unidad monetaria es mayor.