UN METODO DE CALCULO PARA LA PROVISION DE SINIESTROS PENDIENTES BASADO EN LOS TIEMPOS DE DEMORA

Irene Albarrán Lozano* y Santiago Leguey Galán*.

Actuaria y profesora de la Universidad Complutense de Madrid.

Profesor titular del C.E.S.S.J. "Ramón Carande".

RESUMEN.

En este artículo se propone un modelo estocástico para el análisis de la siniestralidad en una compañía de seguros. El modelo se aplica a la estimación de los I.B.N.R.. Se demuestra que reúne, como casos particulares, algunos de los métodos globales tradicionales. Obtenemos algunas cotas para las estimaciones realizadas en ciertos casos particulares. Se desarrolla un ejemplo con la mínima información necesaria para poder aplicar este método.

ABSTRACT.

This article presents an stochastic model to analyze insurance´s loss history. The model is used to estimate I.B.N.R. claims. We prove that some of the Traditional Total Methods can be adapted by our model.

---

* Miembros de G.U.Í.A. Director: Profesor Dr. D. Carlos A. Delgado.

Bounds for estimations are provided. A comprehensive example is developed.

Palabras clave: I.B.N.R., Integral de Poisson, Medidas aleatorias, Provisiones técnicas para prestaciones.

Keywords: I.B.N.R., Poisson´s integral, Random measures, Claims reservers.

1.- INTRODUCCION

Determinar, de la forma más precisa posible, la cuantía de las provisiones para prestaciones (siniestros pendientes) es uno de los principales problemas de las Compañías de Seguros, tanto de las que se dedican a seguro directo como al negocio del reaseguro. No sólo les interesa a ellas, sino también a los Órganos de Control, quienes preocupados ante el "deterioro de los resultados técnicos" proponen iniciativas para intentar reducir las pérdidas producidas en los últimos años. La Administración ha establecido, entre otras medidas, la aplicación del baremo indemnizatorio en los seguros de Automóviles y la exigencia rigurosa de garantías financieras, principalmente márgenes de solvencia y cobertura suficiente de provisiones técnicas (especialmente de la provisión para siniestros pendientes).

Valorar correctamente estas provisiones incide, obviamente, en la cuenta de resultados de la entidad (con las implicaciones fiscales que esto supone) y en la adecuada cobertura futura de los siniestros producidos.

Desde la óptica contable, el problema consiste en periodificar la siniestralidad producida en un período, para determinar a 31 de diciembre el beneficio. Sin embargo, el alcance es realmente mucho mayor. Estas provisiones técnicas, excepto la de estabilización, se consideran elementos básicos para la cobertura de la solvencia estática[1] de la entidad, sin olvidar su relación con el aspecto dinámico de la solvencia.

Una estimación incorrecta, por exceso o defecto, pone en peligro la solvencia y, en definitiva, todo el negocio asegurador, provocando, además, entre otros problemas, fluctuaciones de los resultados financieros. Estimaciones y dotaciones insuficientes suponen declarar un beneficio superior al real, generando problemas futuros, tanto a la hora de hacer frente a indemnizaciones por siniestros como al determinar las primas de forma incorrecta por haber sobrestimado la solvencia. Si la dotación es mayor a la que corresponde, afecta

[1] Campagne estableció la diferenciación de dos aspectos de la solvencia: el estático y el dinámico. Se considera solvencia estática a la capacidad técnico–financiera de la empresa para hacer frente, en un momento determinado, a sus obligaciones contraídas. El concepto de solvencia dinámica amplía el horizonte temporal.

negativamente, desde el punto de vista fiscal, porque el exceso está sujeto a gravamen. Entre otras razones existe una fuerte presión para que las estimaciones sean correctas y se adapten a la cuota de información disponible en cada momento.

La Ley de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados[2] (L.O.S.S.P.), en la exposición de motivos, justifica la supervisión y el control ejercido por la Dirección General de Seguros (D.G.S.) para comprobar que las entidades mantienen la solvencia suficiente requerida por su objeto social.

Actualmente, en gran parte de las compañías parece que las provisiones técnicas son insuficientes y los métodos que utilizan para calcularla pueden no ser, en ocasiones, los adecuados. El cálculo requiere utilizar hipótesis adecuadas al fenómeno propio de cada ramo y tipo de seguro, que permitan justificar su aplicación y defender el método ante los organismos correspondientes (Órgano de Supervisión y Control, y Tribunales) si fuera necesario.

La importancia del problema ha motivado su constante estudio en las últimas décadas, sobre todo en el ámbito del seguro no-vida. Resulta de absoluta actualidad en el campo asegurador y prueba de ello son las numerosas publicaciones existentes.

[2] Ver Legislación básica [7].

Se entienden por provisiones técnicas las constituidas al cierre del ejercicio para hacer frente a obligaciones asumidas por la entidad como consecuencia de contratos de seguro y reaseguro ya formalizados. Entre estas aparecen las provisiones técnicas para prestaciones que hacen frente a las obligaciones pendientes del asegurador derivadas de siniestros ocurridos antes del cierre de ejercicio. Está integrada, actualmente, por la provisión para siniestros pendientes de liquidación o pago y la provisión para siniestros no declarados.

El concepto de siniestros pendientes agrupa siniestros pendientes de declaración - conocidos como I.B.N.R. (incurred but no reported) - y aquellos pendientes de pago o liquidación - los I.B.N.E.R. (incurred but not enough reserved) también llamados R.B.N.S. (reported but not settled) o I.B.N.F.R. (incurred but not fully reported) -.

<u>La denominación global de prestación técnica para siniestros, capitales vencidos, rentas o beneficios de los asegurados pendientes de pago, liquidación o declaración</u> se debe a su cálculo tanto en ramos de Vida como en los de No Vida. De toda esta problemática analizamos únicamente la referente a los ramos distintos del de Vida.

2.- BREVE RESEÑA DE NORMAS REFERIDAS A LAS PROVISIONES TECNICAS PARA PRESTACIONES: L.O.S.S.P., R.O.S.P. Y DIRECTIVAS.

La L.O.S.S.P[3]., art. 16, considera la obligación de constituir y mantener provisiones técnicas suficientes para el conjunto de las actividades que la empresa desarrolla. La cuantía de las mismas se determinará con arreglo a hipótesis prudentes y razonables.

El Reglamento de Ordenación del Seguro Privado (R.O.S.P.)[4], que se considera vigente puesto que aún está en elaboración el que desarrolle a la L.O.S.S.P., art. 52 y 55, define las provisiones técnicas para prestaciones y su cálculo. Faculta a la Administración para ejercer su función de control. Separa, las provisiones técnicas para prestaciones pendientes de liquidación o pago de las pendientes de declaración y responsabiliza al actuario del cálculo de estas provisiones.

Respecto a los I.B.N.R., art. 58, se calcularán separadamente por años de ocurrencia y para cada modalidad. En los ramos No Vida, esta provisión sólo contempla los siniestros pendientes de pago. Deja abierta la posibilidad de que el Ministerio de Economía y Hacienda fije procedimientos globales de cálculo como los establecidos en la derogada O.M. de 7 de junio de 1971 para el Seguro Voluntario del Automóvil.

---

[3] Legislación básica [7].

Para los siniestro pendientes de declaración, el artículo 59, indica que se determinen separadamente por modalidades, teniendo en cuenta la experiencia de la entidad. Si ésta es insuficiente, se acudirá a una proporción de la provisión de siniestros pendientes de liquidación.

El Real Decreto 1042/90, de 27 de julio, modificó el método de cálculo, imputando los siniestros al año de ocurrencia y determinando el número de siniestros pendientes de declaración del último ejercicio y su importe medio. Fijó un sistema de cálculo para obtener la provisión para prestaciones pendientes de declaración: multiplicar el número medio de siniestros producidos en los último cinco años por el importe medio del último año.

Al fijar un único método de cálculo, con carácter exclusivo, puede, como se analizará más adelante, que su utilización no resulte la más adecuada.

La Directiva 91/674/C.E.E., de 19 de diciembre, relativa a las cuentas anuales y consolidadas, considera que el importe de las provisiones técnicas debe ser suficiente, en cualquier momento, para garantizar que la empresa puede hacer frente a todos los compromisos derivados de sus contratos de seguros.

[4] Idem.

La Directiva 92/49/C.E.E., de 18 de junio relativa al Seguro Directo distinto del de Vida, respecto a provisiones técnicas remite a la Directiva de Cuentas que determina en el artículo 16 su constitución individualizada para cada siniestro pudiendo utilizar métodos estadísticos, siempre que la provisión constituida sea suficiente. Para el caso de los I.B.N.R., considera la experiencia previa de la entidad referida al número e importe de este tipo de siniestros.

Aunque la Directiva de Cuentas permite a las entidades utilizar métodos estadísticos, la normativa española no ha desarrollado aún suficientemente los métodos de cálculo, ampliamente utilizados en países con reconocida tradición y experiencia actuarial.

3.- UN MODELO PARA EL PROCESO DE LA SINIESTRALIDAD.

Estimar la cuantía de estas provisiones (valor medio de la siniestralidad futura) de forma precisa es complicado debido, sobre todo, al elevado grado de aleatoriedad que envuelve al fenómeno de la siniestralidad. Es recomendable, en primer lugar, analizar los datos pasados e intentar ajustarlos a un modelo. La obtención de modelos que expliquen adecuadamente el comportamiento de los siniestros de una empresa de seguros, es de evidente utilidad como instrumento de apoyo a la toma de decisiones.

Para estudiar el fenómeno aleatorio de la siniestralidad ha de conocerse, por un lado, cuándo se produce el siniestro (o, alternativamente, cuántos siniestros se producirán en un determinado período de tiempo) y, por otro, cuál será su cuantía. Esto implica disponer de la mayor cantidad posible de información a cerca de la siniestralidad año a año (tanto de la propia entidad como del sector) considerando los factores que la afectan. Cada entidad tiene sus propias características: composición y evolución de la cartera, tarifas, ramos en los que opera, sistemas de información, administración y gestión de siniestros, etc. Éstas y otras circunstancias, como cuestiones legales, aspectos climáticos, ubicación geográfica, deberían ser tenidos en cuenta dependiendo de la actividad que desarrolle la entidad y la influencia de estas variables en la siniestralidad o en la distancia temporal entre la ocurrencia, notificación y liquidación de los siniestros.

Para estimar el valor medio de los siniestros futuros, teniendo en cuenta la información sobre los pagados y pendientes, las compañías habitualmente tratan de forma individual aquellos siniestros atípicos por su número, cuantía, periodicidad, etc. Y con los restantes (después de agruparlos en clases homogéneas de riesgos por ramos y tipos) realizan las estimaciones empleando, en general, alguno de los métodos globales. Puede no considerarse necesario separar los siniestros que distorsionan el comportamiento global si se diseña un sistema adecuado. Generalmente se emplean clases homogéneas con el fin de reducir la varianza intragrupo y, por consiguiente, mejorar la precisión de las estimaciones medias.

Como habitualmente se utiliza algún método basado en el *triángulo de siniestros* intentan estimar, primeramente, la cuantía de la siniestralidad total del presente año y, utilizando esta cifra, proyectarla en años sucesivos para poder estimar las correspondientes provisiones. Esto supone despreciar parte de la información, además de añadir implícitamente la hipótesis de que el comportamiento de la siniestralidad permanece invariante a lo largo del tiempo.

Cada vez con más frecuencia se emplea este tipo de métodos en detrimento de otros como el del coste medio. Esto es debido a que la utilización de la media aritmética puede trasladar situaciones atípicas y excepcionales del pasado al futuro. Además, no tiene en cuenta toda la información pertinente (por ejemplo, posibles cambios en la composición de la cartera). Supone, por tanto, una subestimación del número de siniestros producidos en los últimos años porque una parte de éstos no se ha registrado aún. En ciertos ramos, donde existe una gran heterogeneidad en la cuantía de los siniestros, la estimación conjunta de los mismos a través del coste medio está sujeta a una gran variabilidad.

Adicionalmente hay que considerar que el problema de la estimación de las provisiones para prestaciones pendientes se repite anualmente.

Lo anteriormente expuesto justifica y refuerza la necesidad de disponer de un sistema de cálculo, sobre todo para el caso de los I.B.N.R.. El sistema requerido deberá, como anteriormente se expuso, ajustarse y adaptarse, lo mejor posible, a las características del propio negocio de cada entidad sin comprometer su solvencia en ningún momento. Convendría que fuese lo suficientemente flexible para incluir variables como la inflación, consideraciones sobre el tiempo que transcurre entre el registro y el pago de los siniestros y otros factores que afectan tanto al número como a la cuantía de éstos.

Las cuestiones esenciales que se tratan de estudiar tienen su respuesta en términos estocásticos a partir de las leyes de probabilidad que rigen los procesos:

N(t) = Nº de siniestros ocurridos en el intervalo (0,t], obviamente N(b)-N(a) es una variable aleatoria que describe el nº de siniestros ocurridos en un intervalo cualquiera (a,b].

Z(u)= Cuantía del siniestro que ocurre con una característica u, u puede ser el instante de ocurrencia, el tipo de siniestro acaecido, combinaciones de ambas, etc. Por el momento sólo señalaremos que se trata de un proceso no negativo.

El proceso N(t) es no negativo, finito en cada intervalo finito, no decreciente puesto que se van acumulando los siniestros a lo largo del tiempo, además sus trayectorias son escalonadas, - con saltos de amplitud uno si se considera que no se presenta más de un suceso en el mismo instante -, y continuas por la derecha. Se trata por tanto de un caso particular de una amplia clase de procesos denominados procesos puntuales.

Por otra parte es una hipótesis habitual suponer que se trata de un proceso de incrementos independientes. Concluyendo que el modelo estocástico de partida para N(t) se escogerá entre los procesos puntuales de incrementos independientes. Entre éstos se encuentran el de Poisson y sus distintas concreciones.

Los procesos puntuales tienen una estrecha relación con **las medidas numerables aleatorias** en la recta real, cuya consideración permitirá incluir en el modelo las variables que se consideren relevantes. Una medida aleatoria es un proceso estocástico N(A), representando el número de siniestros en un conjunto - medible - arbitrario A, que toma valores enteros positivos y tal que $N(A \cup B)=N(A)+N(B)$ siempre que A y B sean disjuntos.

Si A = (a,b], la relación entre la medida en la recta y el proceso objeto de nuestro interés, viene dada por N((a,b]) = N(b)-N(a).

N((t, t + dt)) = dN(t) representa el número de sucesos en un intervalo de amplitud infinitesimal alrededor de t.

Una medida aleatoria de Poisson con medida media λ(•) – *donde λ(•) es una medida sobre la recta real* -, es una medida aleatoria en la cual las variables N(A) y N(B) son independientes con tal de que A y B sean disjuntos, y N(A) es una variable aleatoria que sigue una distribución de Poisson de parámetro λ(A).

Un proceso no homogéneo de Poisson con intensidad λ(t) es, también, una medida de Poisson con medida media sobre la recta λ(dx).

El uso de medidas aleatorias permite una consideración directa de otras variables involucradas en el proceso de la siniestralidad, con tal de que estas variables sean medibles.

Definamos una medida aleatoria sobre el espacio [0,∞) x ß, donde el primer intervalo considera la evolución natural del proceso sobre el tiempo, y ß es un conjunto que recoge todas las características adicionales que deseemos considerar, ν(A) es la medida de un conjunto A en ß. Las variables determinadas por conjuntos disjuntos son independientes, y N((t, s] x A) sigue una distribución de Poisson con intensidad ν(A)

$$E[N((t, s] \times A)] =(t - s)\nu(A)$$

Puede generalizarse a una medida en la cual el proceso de Poisson es no homogéneo en el tiempo, considerando la intensidad como $\lambda(dx) \times \nu(A)$

$$E[N((t,s) \times A] = \nu(A) \int_s^t \lambda(dx)$$

N(t,u), el proceso asociado es un proceso de Poisson sobre $[0,\infty) \times ß$, la integral

$$I((s,t),A) = \int_s^t \int_A N(ds,du) \qquad (1)$$

caracteriza el nº de sucesos ocurridos en (s,t] con característica A.

$$I(Z,(s,t),A) = \int_s^t \int_A Z(s,u) N(ds,du) \qquad (2)$$

caracteriza las cuantías de los sucesos ocurridos en (s,t] con característica A.

El objetivo se traduce en la evaluación de las expresiones (1) y (2) para cada elección del conjunto de características (marcas) A.

Proposición

Supongamos que ν(A) es una medida de probabilidad ν(A) = P(U∈ A), entonces si a su vez

a) $E[I((s,t),A)] = P(U \in A)\int_s^t \lambda(x)dx$

b) La cuantía de cada siniestro es independiente del número de siniestros que se producen.

c) Las realizaciones del proceso Z(t,u) son continuas en u, continuas por la izquierda en t y acotadas.

Entonces sale:

$$\mathrm{I}(Z,(s,t),A) = \sum_{n=1}^{I((s,t),A)} Z(s_n,u_n)$$

donde s_n y u_n son los instantes de ocurrencia y las marcas del n-ésimo siniestro.

Además

$$E[I(Z,(s,t),A)] = \int_s^t \int_A E[Z(s,u)]\lambda(ds)dP(U) \qquad (3)$$

4. CALCULO DE LA PROVISION.

Aplicaremos estos resultados a la construcción de un método de estimación de las provisiones para siniestros pendientes en el caso más sencillo en el que únicamente se incluye como marca el tiempo transcurrido desde la ocurrencia de un siniestro hasta su registro.

Sea la variable independiente U el tiempo que se tarda en registrar (liquidar) un siniestro desde la fecha de su ocurrencia. U es una variable aleatoria con distribución de probabilidad P(u).

Z(s, u) es la cuantía del siniestro ocurrido en s y que se registra en s+u.

N(t, u) es el número de siniestros que han ocurrido en (0,t] y tales que ha transcurrido un tiempo u hasta su recepción. Se considera que sigue una distribución de Poisson con intensidad $\lambda(s)$ x dP(u).

Supuesto que se verifican las condiciones b) y c) sobre el proceso Z(s,u). La condición a) se satisface bajo la hipótesis de que la cuantía de los siniestros es independiente del tiempo de demora hasta su recepción.

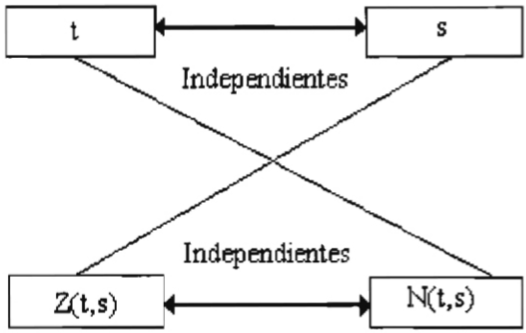

GRAFICO I

Si marcamos los años como 0, 1, 2, ..., los siniestros ocurridos durante el primer año y que se registran en años posteriores se expresa como

$$I(1,+) = I(Z,(0,1),(1,\infty)) = \int_0^1 \int_{1-s}^{\infty} Z(s,u) N(ds,du)$$

cuya esperanza tomará la expresión

$$E[I(1,+)] = \int_0^1 \int_{1-s}^{\infty} E[Z(s,u)] \lambda(ds) dP(u) \qquad (4)$$

Para estimar la esperanza basta, por tanto, efectuar inferencias sobre las tres expresiones en el integrando, es decir, tendremos que analizar:

a) Las cuantías medias.

b) La distribución de frecuencias de los tiempos de demora.

c) La intensidad del proceso de Poisson, a partir de los instantes de ocurrencia de los siniestros, contrastando si es homogéneo o no, y, caso de no serlo obtener una expresión funcional de la intensidad tras la apropiada reparametrización del tiempo. Surge un problema en este apartado debido a la forma en que las compañías registran las fechas relacionadas con la siniestralidad, ya que sólo se recogen los días de ocurrencia y recepción, de modo que, realmente, se produce una discretización del tiempo. Se puede solucionar el problema mediante una redistribución adecuada de los instantes de ocurrencia y recogida, por ejemplo, los siniestros registrados en lunes correspondientes a los recibidos a lo largo de todo el fin de semana, se pueden distribuir uniformemente entre el sábado y el lunes.

A continuación se muestran los resultados obtenidos en algunos casos particulares en los cuales los procesos estocásticos implicados siguen un determinado comportamiento.

1.) Supongamos que N(t) es un proceso homogéneo de Poisson de parámetro λ, y que $E[Z(s,u)]=E[Z(s)]\alpha(u)$ es decir, la cuantía media de los siniestros es una función en el tiempo de ocurrencia, rectificado por una función determinista que refleja la tasa de variación de la cuantía en función del retardo entre la ocurrencia del siniestro y su recepción. Entonces (4) se transforma en

$$\lambda \int_0^1 E[Z(s)]ds \int_{1-s}^{\infty} \alpha(u)dP(u)$$

sin más que observar α(u) debe ser no negativa tenemos que la expresión esta acotada por

$$\lambda \int_0^1 E[Z(s)]ds \int_{1-s}^{\infty} \alpha(u)dP(u) \leq \lambda E[\alpha(U)] \int_0^1 E[Z(s)]ds$$

Si el retardo no tiene incidencia alguna en la cuantía de los siniestros, α(u) = 1, y la cuantía media de los siniestros es constante, E[Z(t)] = μ, obtendríamos

$$(4) = \lambda\mu \int_0^1 P(U \geq 1-s)ds$$

expresión acotada entre las dos siguientes

$$\lambda\mu P(U \geq 1) \leq \lambda\mu \int_0^1 P(U \geq 1-s)ds \leq \lambda\mu E[U]$$

2.) Si, en las mismas condiciones, asumimos que U sigue una distribución exponencial de parámetro θ tendremos que

$$(4) = \lambda\mu\frac{(1-e^{-\theta})}{\theta}$$

reduciéndose el problema a efectuar inferencias sobre estos parámetros.

3.) Consideramos que la cuantía de los siniestros disminuye en su proporción de forma exponencial $\alpha(u) = e^{-u\delta}$ tendríamos

$$(4) = (1-e^{-(\delta+\theta)})\frac{\lambda\mu\theta}{(\delta+\theta)^2}$$

En general, con estos supuestos se obtiene una estimación para los siniestros pendientes como la cuantía total corregida por la probabilidad de que los siniestros superen el periodo de registro, y el modo en que el retardo afecta a dicha cuantía.

COMPARACION CON OTROS METODOS.

resultados obtenidos dependen de las estimaciones realizadas ...das en los datos concretos de que disponga cada compañía. Bajo ...minadas condiciones, el modelo propuesto responde miméticamente a determinados métodos globales clásicos utilizados para el cálculo de la provisión para siniestros pendientes. Se presentará una breve descripción del método y, a continuación, cómo se adapta al modelo propuesto. Las estimaciones en uno u otro caso se fundamentan en la información histórica recogida por la compañía y en el procedimiento con que éstas se realicen.

1. Método del coste medio.

- *Descripción.*

Se parte de una división en h clases homogéneas de siniestros observadas en k años.

- $n_{i,j}$ = Nº de siniestros, en tramitación al cierre del ejercicio, de la clase j en el año i.

- $c_{i,j}$ = Coste medio del siniestro de la clase j en el año i.

- $\alpha_{i,j}$ = Tasa de inflación de la clase j en el año i.

La provisión se estima como:

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{h} c_{i,j} n_{i,j} (1+\alpha_{i,j}) .$$

- *Adaptación al modelo propuesto.*

Sean

- $N(t,u)$ el número de siniestros, en tramitación al cierre, en $(0,t]$ de la clase $u=\{1,2,\ldots,h\}$

Supongamos que $N(t)$ es un proceso de Poisson, con intensidad λ constante en cada año de procedencia de los siniestros (constante en intervalos), estimada como $\lambda^* = n_{i,\cdot}$ = nº de siniestros procedentes del año i en tramitación al cierre del ejercicio.

- $Z(t,u)$ la cuantía del siniestro que ocurre en t de la clase u. Se estima $P(U=j) = n_{i,j}/\, n_{i,\cdot}$

- $\alpha(t,u)$ tasa de inflación en t de la clase u. Se estima $E[Z(s,j)]= c_{i,j}\,(1+\alpha_{i,j})$

La cantidad que se desea estimar es

$$\int_T \int_U Z(s,u)N(ds,du)$$

donde T es el año de ocurrencia de los siniestros y U la clase de pertenencia de los mismos. La esperanza de la integral es

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{h} c_{i,j}(1+\alpha_{i,j})\frac{n_{i,j}}{n_{i,\bullet}} n_{i,\bullet}$$

que coincide con la propuesta.

En este caso la estimación que se realiza de P(U) transgrede la condición de independencia entre T y U. Para salvarla basta considerar cada año de procedencia por separado y estimar la cuantía total como la suma de las estimaciones provenientes de cada año.

2. Grossing up.

- Descripción.

Sean

- $C_{i,\cdot}$ la siniestralidad total del año i

- $C_{i,j}$ la siniestralidad ocurrida en el año i pagada en (i, i+j] (siniestralidad acumulada)

Supongamos que la siniestralidad ocurrida en un año i está completamente registrada,

- $P_j = C_{i,j} / C_{i,\cdot}$ es la proporción de la siniestralidad del año i que se paga j años después.Se supone independiente de i en el año k>y.

Se estima la siniestralidad total del año k-j como

$$C^*_{k-j,\cdot} = C_{k-j,j}\, P_j \qquad k>k-j>i$$

La provisión de fondos para el año k procedente del año k-j se calcularía como

$$\text{Prov}\ (k, k-j) = C^*_{k-j,\cdot} - C_{k-j,j}$$

resultando la provisión total en el año k como

$$\text{Prov}(k) = \sum_{j=0}^{k} \text{prov}(k,\ k-j)\,.$$

- *Adaptación al modelo propuesto.*

Sea U el tiempo transcurrido hasta la recepción del siniestro. La cuantía de los siniestros ocurridos en [i-1, i) y registrados en [i, k).es

$$I_{i,k} = \int_{i-1}^{i}\int_{0}^{k-s} Z(s,u)N(ds,du)$$

Supongamos que U es una variable discreta que toma valores en un punto cualquiera del año, y que E[Z(s,u)] no depende de u.

$$E[I_{i,k}] = P(U \leq k - i) \int_{i-1}^{i} E[Z(s)]\lambda(s)ds \qquad (5)$$

Si el año i está completo, y $C_{i,\cdot}$ es la siniestralidad total del año i, y $n_{i,\cdot}$ es el número total de siniestros ocurridos en este año. Estimamos

- $E[Z(s)] = C_{i,\cdot} / n_{i,\cdot}$
- $\lambda(s) = n_{i,\cdot}$ y
- $P(U \leq k-i) = C_{i,k} / C_{i,\cdot}$ independiente de k y de i

de modo que $E[I_{i,k}] = C_{i,k}$ es consistente con los valores observados en el año cerrado.

En otro año $E[I_{j,k}] = C_{j,\cdot}.P(U \leq k - j)$. Para que esta estimación sea consistente con la última cantidad observada del año j debe coincidir $E[I_{j,k}] = C_{j,k}$ de donde obtenemos la estimación de $C_{j,\cdot}$ como

$$C^{*}_{j,\cdot} = C_{j,k} / P(U \leq k-j)$$

Ahora, usando (5), estimamos

$$E[I_{j,k+1}] = C^*_{j,\cdot}P(U \le k - j + 1)$$

obteniendo una expresión que coincide exactamente con el resultado anterior sin más que sustituir las estimaciones realizadas

$$\text{Prov(k)} = \sum_{j=0}^{k} E[I_{j,k}].$$

Otros métodos, como los diferentes usos de los *Link-ratios,* se deducen del mismo procedimiento a partir de las estimaciones que se realicen de los parámetros implicados.

Concluimos que, al menos una parte de los métodos globales, no son más que casos particulares del método propuesto. Las estimaciones realizadas sobre los parámetros en estos métodos desprecian una parte, que puede ser relevante, de la información disponible. Así, al menos en teoría, es posible obtener mejores resultados fundamentados en estimaciones que sí consideren la totalidad de los datos recogidos[5].

6.- APLICACIÓN.

Presentamos a continuación un ejemplo de aplicación con datos simulados. La TABLA 1 representa el resumen del número de siniestros registrados por una compañía aseguradora durante 1996.

[5] Estimaciones basadas en estadísticos suficientes.

1996	MES DE REGISTRO												TOTAL 1996
MES OCURRENCIA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1	14	7	8	3	4			1		1	1		39
2		5	8	7	1	3	3		1				28
3			6	18	14	5	4	1	1		1	1	51
4				6	13	6	1	1	4			1	32
5					10	10	8	5	4	2	2	3	44
6						8	5	8	3	4			28
7							6	17	13	6	4	2	48
8								6	13	7	7	5	38
9									11	13	8	6	38
10										11	10	9	30
11											7	12	19
12												5	5
Total general	14	12	22	34	42	32	27	39	50	44	40	44	400

TABLA 1

El detalle de una parte de los datos registrados durante el mes de enero se presenta en la TABLA 2. Las fechas de ocurrencia y registro se expresan en unidades anuales, distribuyéndose aleatoriamente según una distribución uniforme, en el intervalo desde la anterior fecha de registro y la consecutiva. La redistribución de las fechas tiene por objeto evitar que se produzcan o registren siniestros de forma simultánea. Se calcula, además, el tiempo anualizado entre la ocurrencia de un siniestro y su registro.

ENERO 1996						
F. OCURRENCIA		**F. REGISTRO**		**RETARDO**		**CUANTÍA**
0.00225263	1/1/1996	0.05001664	18/1/1996	17	0.04776401	79236
0.00256092	1/1/1996	0.03697812	13/1/1996	12	0.0344172	7269
0.00396325	1/1/1996	0.02718762	9/1/1996	8	0.02322437	102471
0.00660282	2/1/1996	0.22810947	23/3/1996	81	0.22150666	2441
0.00735169	2/1/1996	0.01859729	6/1/1996	4	0.0112456	30655
0.00965158	3/1/1996	0.39146644	21/5/1996	138	0.38181486	9242
0.01164821	4/1/1996	0.04116651	15/1/1996	11	0.0295183	2316

TABLA 2

Supongamos que la cuantía de los retardos sigue una distribución exponencial de parámetro θ, la muestra que observamos en un instante cualquiera "a" procede de una población con distribución $U/U \leq T^*$, siendo $T^* = T - a$, donde T es el tiempo actual en el que queremos calcular la provisión.

Si analizamos los retardos de los siniestros en un intervalo "reducido" [a,b) y adoptamos la postura más prudente (suponer que los siniestros tardan más en registrarse que lo que realmente ocurre, con un límite de error dado por a – b), asignando a todos los siniestros registrados en este intervalo el instante de ocurrencia "a" tendremos una muestra de una población $U/U \leq T^*$.

La función de densidad de la variable exponencial hasta T^* es de la forma

$$f(x,\theta / U \leq T^*) = \frac{\theta\, e^{-\theta x}}{1 - e^{-T^* \grave{e}}}$$

El estimador de máxima verosimilitud del parámetro se obtendría maximizando la función de verosimilitud como la solución de

$$\frac{1}{\theta} - \frac{T^*}{e^{T^*\theta} - 1} = \overline{X}$$

Donde la media muestral está referida al retardo de los siniestros ocurridos en [a,b), solución que se obtiene aplicando las técnicas computacionales habituales.

Suponemos que dividimos el periodo de tiempo en el cual deseamos estimar la siniestralidad (un año) en intervalos de la forma $[a_1, b_1)$, $[a_2, b_2)$,.... $[a_k, b_k)$ $a_1 = 0$, $b_k = 1$ teniendo así un conjunto de k muestras.

$x_1, \ldots\ldots, x_{n_1}$ m.a.s. $U/U \leq T^* = T - a_1$.

....

$x_1, \ldots\ldots, x_{n_k}$ m.a.s. $U/U \leq T^* = T - a_k$.

Sea $n = \sum_1^k n_i$ $\qquad\qquad$ $\overline{X} = \sum_1^k \frac{n_i}{n} \overline{x}_i$

con $\overline{x}_i$ = la media registrada en el intervalo i-ésimo, entonces el estimador de máxima verosimilitud del parámetro se obtiene resolviendo

$$\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{\theta}-\frac{T_j^*}{e^{T_j^*\theta}-1}\right)\frac{n_j}{n}=\overline{X} \qquad (6)$$

Dado que contamos con un reducido número de datos, resolvemos (6) en el límite, es decir, considerando cada caso por separado, $k = n$ y $n_i = 1$.

Calculamos la media anual de los retardos 0,14414484 y resolvemos. Estimando el parámetro como **θ^* =5,3323** el retardo medio se estimará como E[U] = **1/θ = 0,18753634.**

Una vez obtenida la estimación de la distribución de probabilidad del retardo se puede estimar la proporción de siniestros registrados. Consideramos la división del tiempo en intervalos mencionada anteriormente.

La probabilidad de registrar un siniestro en el intervalo i-ésimo es

$$P_i = P(T \text{ - fecha de ocurrencia} \geq \text{retardo})$$

si N_i es el número de los siniestros ocurridos en dicho intervalo

$$P_i = n_i / N_i$$

estimamos,

$$N_i = \frac{n_i}{P(U \leq T - a_i)} = \frac{n_i}{1 - e^{-\theta(T - a_i)}}$$

La elección del punto a_i como fecha de referencia responde al criterio más conservador, se podría escoger como representante de la fecha de ocurrencia cualquier valor dentro del intervalo.

$$N = \sum_{i=1}^{k} N_i \qquad\qquad p = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} n_i$$

Para estimar el parámetro λ aplicamos la propiedad de que los intervalos entre ocurrencias son variables aleatorias independientes, distribuidas según una exponencial de parámetro λ. El problema es que no se observan todas las variables, ya que la información de que se dispone está truncada por la fecha de registro del siniestro, es decir, el tiempo transcurrido desde que ocurre un siniestro hasta la siguiente ocurrencia, no tiene por qué coincidir con el tiempo observado entre el primero de los siniestros y su consecutivo, puesto que entre ellos podría haber un tercer siniestro aún no registrado. Es decir, con información completa, tendríamos una muestra

X_1, ... ,X_N donde X_k es el tiempo transcurrido desde que ocurre el siniestro k-1-ésimo hasta que ocurre el k-ésimo. ($X_0 = 0$).

La información con la que contamos es de la forma

Y_1, ... ,Y_n donde Y_k es el tiempo transcurrido desde que se observa el siniestro k-1-ésimo hasta que se observa el k-ésimo. Las variables Y acumulan una cantidad desconocida de sumas de las variables X .

$$Y_k = \sum_{i=s_{k-1}}^{s_k} X_i \equiv \mathrm{Gamma}(\lambda, s_k - s_{k-1})$$

si Z_k es la fecha de ocurrencia del k-ésimo siniestro observado,

$$Z_k = \sum_{i=1}^{S_k} X_i \equiv \mathrm{Gamma}(\lambda, S_k) \qquad S_k = \sum_{i=1}^{k} s_i$$

S_k es un parámetro desconocido, que representa el número de siniestros realmente ocurridos hasta que observamos Z_k.

Estimamos

$$S_1 = \frac{1}{P_1} \qquad S_{k+1} = S_k + \frac{1}{P_i} \qquad \text{si } Z_{k+1} \in [a_i, b_i)$$

FECHA OCURRENCIA	s_k	S_k
1/ 1/ 1996	1,00491539	1,00491539
1/ 1/ 1996	1,00492351	2,0098389
1/ 1/ 1996	1,00496065	3,01479955
2/ 1/ 1996	1,00503132	4,01983087
2/ 1/ 1996	1,00505155	5,02488242
3/ 1/ 1996	1,00511422	6,02999662
4/ 1/ 1996	1,00516923	7,03516585
4/ 1/ 1996	1,00521026	8,04037611

TABLA 3

el estimador de máxima verosimilitud del parámetro toma el valor

$$\lambda^* = \frac{\sum_{k=1}^{n} s_k}{\sum_{k=1}^{n} Y_k} = \frac{S_n}{Z_n} = \mathbf{498{,}032602}$$

Basta ahora analizar la cuantía media de los siniestros para estimar la provisión.

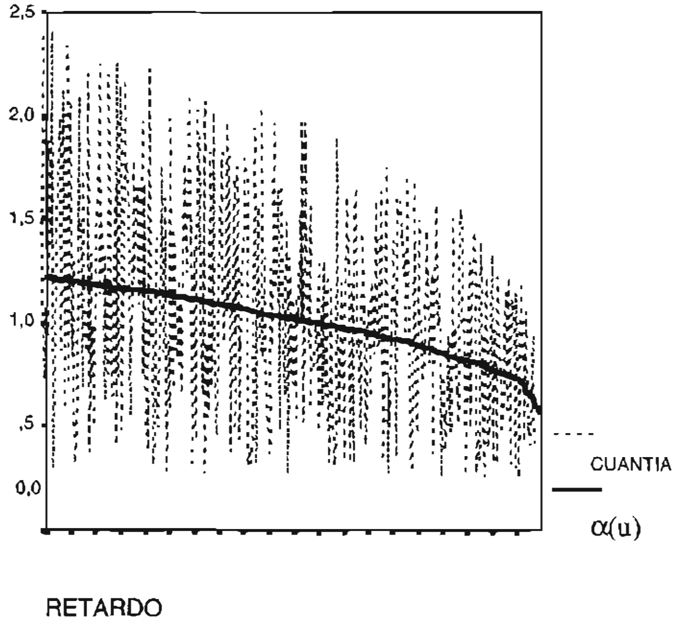

GRÁFICO 2

Estimamos E[Z(t)]= μ = 20937,96 como la cuantía media registrada y

$$\alpha(u) = a + b*\exp(-c*u) = 0{,}5067 + 0{,}71149*\exp(-u*3{,}012)$$

Así (4) se transforma en

$$\lambda\mu\left[\frac{a}{\theta}(1-e^{-\theta}) + \frac{b\theta}{(c+\theta)^2}(1-e^{-(c+\theta)})\right]$$

Sustituyendo los valores estimados de los parámetros involucrados

Provisión = 1.506.588,11