EL RIESGO DE INTERES EN SEGUROS Y PENSIONES: UNA APROXIMACION ACTUARIAL

Joseba Iñaki De la Peña Esteban
Profesor de la Universidad del País Vasco
Instituto de Estudios Financiero - Actuariales

RESUMEN

En el presente trabajo se pretende analizar la influencia que el riesgo de interés tiene sobre el negocio adquirido en los planes de pensiones, habida cuenta de las bajadas generalizadas en los rendimientos de las inversiones de renta fija, así como de las recomendaciones que, desde la Dirección General de Seguros se realizan para los productos actuariales de vida, en especial, los seguros de vida.

Un análisis del riesgo del tipo de interés no puede obviar la naturaleza actuarial de los planes de pensiones, por lo que se analizan las principales características de los planes de pensiones de prestación definida, así como la influencia que tiene la variación del tipo de interés, no sólo en el aspecto inversor de este producto actuarial (el fondo de pensiones) sino sobre el aspecto actuarial del plan, en cuanto a la delimitación de los pagos probables futuros a realizar. Con este análisis se demuestra que las obligaciones a las que tiene que hacer frente el fondo de pensiones, no

son fijas como determinan algunos autores, sino que dependen tanto de parámetros puramente actuariales como financieros.

Para determinar la influencia del riesgo de interés tratamos el concepto de duración brevemente, expresando las diferencias existentes cuando se emplea en productos actuariales, donde no podemos incluir los flujos económicos futuros como ciertos, sino únicamente aquellos que esperamos abonar. Este parámetro, lo denominamos como duración esperada y lo emplearemos para buscar una solvencia final entre los planes y fondos de pensiones.

En la última parte del trabajo se analizan aquellas estrategias inversoras que, buscando una protección ante las variaciones del tipo de interés, nos permitan conseguir un abono puntual de las prestaciones acumuladas hasta la fecha de la valoración. Destacamos que no existe una única estrategia, siendo varias de ellas viables. Será el actuario financiero (término acuñado por Hans Bühlmann) el que, dependiendo de múltiples factores externos e internos (economía en general, madurez del colectivo, oportunidades financieras, etc.) pueda decantarse por alguno de estos modelos o por un modelo mixto, como el propuesto en la aplicación final.

Todo el proceso que llevamos a cabo en este trabajo busca un fin tan lógico para un actuario como que se abonen puntualmente, en cuantía y tiempo, las prestaciones acumuladas a los posibles beneficiarios futuros, de forma que con el último cheque a pagar al último beneficiario, el fondo de pensiones quede con un saldo nulo. Todo lo anterior, recordando el sentido previsor que como actuarios siempre nos ha caracterizado.

ABSTRACT

In this paper I analyze the influence of the interest risk on the pension plans due to the decrements in bond yield market and the recommendations from the Dirección General de Seguros about actuarial life products, especially, the live insurance.

An analysis of the interest risk can not obviate the actuarial nature of the pension plans, therefore the principal characteristic of the definied plans are analyzed, as well as the influence that the variation of the interest rate has, not only in the investing area (the pension fund), on the actuarial aspect of the plan as well. I want to demostrate that the liabilities are not fixed as some authors have determined. They depend on actuarial and financial parameters.

To determine the influence of the interest risk we try the concept of duration briefly. The development of duration is different into the financial and actuarial world, because when it is used in actuarial products, we can not include the future flows as certain. Only those flows that we are waiting to pay. This parameter (expected duration) will be used to seek a final solvency between the plan and pension fund.

In the last part of the paper I analyze these strategies looking for a protection when there are interest rate variations. We emphasize that there are not an unique strategy. Several of them are viable. The financial actuary (term coined by Hans Bühlmann) will select the more propiate model, depending on multiple external and internal factors (economy, maturity of the collective, financial opportunities, etc.).

All the process developed in this paper seeks a very logical objetive for an actuary: The last cheque of the fund has to be paid to the last beneficiary and therefore, the remainin fund has to be zero.

Key Words. Interest rate risk, Duration, Immunization, ALM, Interest graduation, Pension Funds.

1. INTRODUCCION

En los últimos años hemos sido espectadores del descenso continuado de los tipos de interés en los mercados mundiales, lo cual ha generado una especial preocupación tanto en el sector asegurador, bancario como en los fondos de pensiones, debido a la incidencia que tienen esos decrementos de interés sobre las provisiones matemáticas dotadas en cada ejercicio económico.

En lo referente a los planes y fondos de pensiones, tiene una especial repercusión habida cuenta de que los principales afectados son los partícipes de los planes (auténticos tomadores de este producto de previsión), así como los beneficiarios (los verdaderos afectados por la bajada de tipos de interés). Sin embargo, tanto partícipes como beneficiarios son ajenos a las fluctuaciones que experimenta el tipo de interés. La repercusión de estas variaciones, no obstante, les afecta en tanto en cuanto varían sus provisiones matemáticas y, por ende, el nivel de previsión económica que buscan para su futuro.

La variación del tipo de interés que, de ahora en adelante lo denominamos *riesgo del tipo de interés*, se manifiesta fundamentalmente en una doble vertiente [Meneu y otros, (1.992)] :

i) Riesgo de precio o de mercado. Esta faceta recoge modificaciones experimentadas por el valor del activo o del pasivo, ante variaciones experimentadas por el riesgo de interés.

ii) Riesgo de reinversión. Se refiere a la incertidumbre de refinanciación a un tipo de interés para los flujos económicos futuros.

Su efecto es doble y contrapuesto. Así, mientras que una bajada en los tipos de interés produce un alza generalizada en la valoración del activo o del pasivo, si esa bajada en los tipos se mantiene, producirá un menor rendimiento en las reinversiones de los flujos intermedios y viceversa.

Habitualmente, cuando se hace referencia al riesgo del tipo de interés en el campo actuarial, se refiere a las variaciones experimentadas por el fondo de pensiones (activo económico garante de las pensiones prometidas) y muy pocas veces se hace referencia a la repercusión en las obligaciones prometidas (provisiones matemáticas).

Esta situación es chocante cuando desde 1.952, un actuario inglés definió las condiciones que permitían que una entidad aseguradora estuviese protegida ante el riesgo de interés [Redington, (1.952)]. Este actuario de seguros definió el término inmunización de forma combinada en una entidad aseguradora, buscando que la posición del activo en la entidad estuviese nivelada con la posición de su pasivo (obligaciones). A este tipo de inmunización, lo denominamos múltiple, en contraposición a la inmunización simple, la cual sólo se refiere a una parte del balance y para un horizonte temporal predeterminado.

Antes de continuar, conviene remarcar que una cartera (ya sea activa o pasiva) se encuentra en una situación inmunizada si su valor al final de un periodo de tiempo es el mismo que tendría, si la función de los tipos de interés permanece constante a lo largo de dicho periodo de tiempo [Fisher & Weil, (1.971)].

La inmunización financiera busca combinar los dos componentes contrapuestos del riesgo de interés (riesgo del precio y riesgo de reinversión), para conseguir un resultado final, con independencia de las variaciones que experimente ese tipo de interés.

En el presente trabajo se hace referencia al riesgo de interés dentro de los planes y fondos de pensiones actuariales (prestación definida), si bien es extensible a cualquier otro producto de previsión que conlleve un compromiso de pagos futuros. Se analiza el problema de la adecuación financiera y actuarial entre la cartera de inversiones del fondo de pensiones y las provisiones matemáticas determinadas de acuerdo al reglamento y base técnica del plan de pensiones. Únicamente se tendrán en cuenta los derechos prometidos a los partícipes hasta la fecha del análisis y no los posibles derechos que se puedan devengar con aportaciones futuras, al no estar materializadas, como es lógico. Analizamos el negocio adquirido y no el que se pueda adquirir [SOA, (1.996)].

Estos derechos económicos están garantizados por el fondo acumulado hasta esa fecha, representando la cartera de inversiones realizada con las aportaciones de los partícipes, y no tenemos en cuenta las posibles inversiones que se puedan materializar con las aportaciones que en el futuro se puedan realizar, al no estar desembolsadas.

Con lo anterior, buscaremos aquellas estrategias inversoras coherentes con el negocio realizado así como con el producto actuarial, acordes con el objeto para el que fue creado. Se intentará que el riesgo de interés provoque un movimiento en el fondo de pensiones que se vea respaldado con un movimiento paralelo en la provisión matemática que garantiza. Con ello, habremos conseguido que el plan y fondo de pensiones estén inmunizados ante variaciones en el riesgo de interés.

2. OBJETIVO DE LOS PLANES Y FONDOS DE PENSIONES.

En un fondo de pensiones existen diversos responsables definiendo cada uno de ellos un tipo de riesgo determinado [Scott, (1.991)]:

i) Para el responsable ante los partícipes, el riesgo radica en que el fondo de pensiones no cubra las expectativas pensionables de los partícipes en el periodo de devengo de la prestación y en el periodo de acumulación de capitales la posibilidad de que los pobres resultados de la cartera obliguen a incrementar el nivel de aportaciones.

ii) Frente a él, en una inversión clásica, el director financiero considerará riesgo únicamente el no obtener el máximo rendimiento posible en cada periodo.

iii) A la Entidad Gestora de las Inversiones le preocupará que puedan perder negocio (planes) si el fondo no es correctamente dirigido.

La teoría de carteras clásica presenta una definición del riesgo a través de la varianza o más concretamente a través de la desviación típica o estándar de los rendimientos esperados de los títulos y por *ende* de la cartera de títulos [Wise & Annable (1.990)]. Esta definición del riesgo es válida, tal vez, para los fines de los fondos de pensiones de aportación definida que es el de acumular flujos económicos para en un futuro hacer frente a las prestaciones a abonar.

El fondo de pensiones no es independiente debido a que al conocerse las prestaciones a las que hay que hacer frente, se ha de proceder a redefinir el verdadero riesgo del fondo, el más relevante y es el que resulta de la imposibilidad de que los fondos ya acumulados puedan hacer frente a las obligaciones adquiridas en el plan a lo largo del tiempo.

Esta definición del riesgo es totalmente consistente con el enfoque actuarial del plan de prestación definida, con sus objetivos y será el riesgo a evitar una vez acumulado el fondo: *La inexistencia de dinero para abonar las prestaciones prometidas*, verdadero fin de este producto actuarial de previsión.

3. LA PROVISION MATEMATICA.

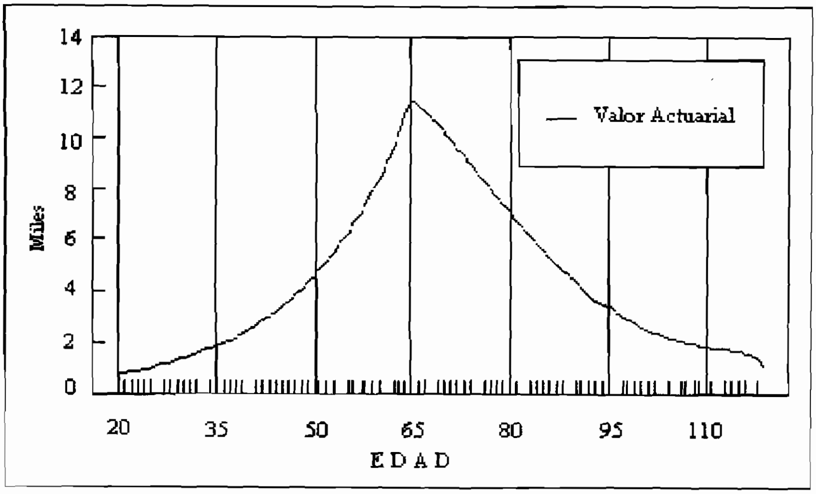
Las operaciones de los planes y fondos de pensiones tienen un doble enfoque, al estar compuestas por una parte de activo y otra parte de pasivo.

En el activo se materializan económicamente los derechos estipulados en el plan y constituye la fuente económica inversora y con mayor dinámica en este producto actuarial.

El pasivo lo constituyen las obligaciones estipuladas en el plan de pensiones, de acuerdo a un reglamento donde tras la elección de un determinado método de coste por el actuario, y con el visto bueno de la parte social afectada por el plan (promotor, partícipes y beneficiarios), se determinan las aportaciones a realizar.

Dependiendo del método de coste elegido, también se determina la provisión matemática entendida como aquella parte del valor actuarial de las prestaciones que debe estar constituida a la edad alcanzada, dependiendo de las hipótesis del plan y en base al desarrollo normal y acertado de éstas [Betzuen, (1.989)].

GRAFICO I : VALOR ACTUARIAL DE LAS PRESTACIONES DE JUBILACION



A la edad de entrada, el partícipe no ha amortizado ninguna cantidad y por tanto su correspondiente provisión matemática es nula:

$$PM_{x_e} = 0$$

Al llegar a la edad de jubilación, el valor de las prestaciones futuras ha tenido que ser amortizado y constituido, siendo el valor de la provisión el mismo que el valor actual actuarial a la edad de jubilación de las prestaciones futuras pagaderas al partícipe.

$$PM_{65} = (Va)_{65} = \sum_{j=65}^{w} B_j * V^{j-65} * {}_{j-65}P_{65}^{m}$$

siendo:

PM_{65}: Provisión matemática a los *65* años.

$(Va)_{65}$: Valor actual actuarial de las prestaciones de jubilación a la edad de jubilación.

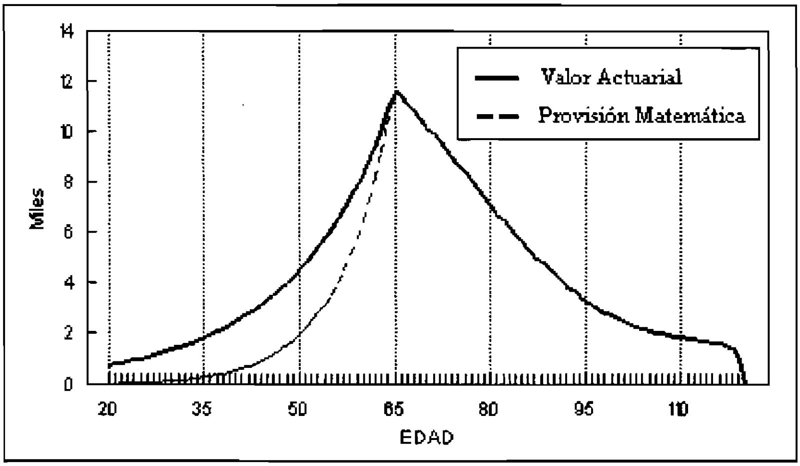
B_j: Prestación anual abonada a la edad *j*.

V^{j-65}: Valor actual financiero de *j-65* años.

${}_{j-65}P_{65}^{m}$: Probabilidad de que un beneficiario de la prestación de jubilación de *65* años de edad, alcance los *j* años, donde la única causa de salida es el fallecimiento.

La provisión matemática sufre un incremento paulatino desde la edad en la que se efectúa la equivalencia financiero-actuarial (edad de entrada x_e) hasta la edad en la que el partícipe va a empezar a recibir las prestaciones de jubilación (considerada en nuestro caso a los *65* años) momento a partir del cual no se realiza ninguna otra aportación, debiendo tener en ese momento un montante máximo para hacer frente a todas las posibles futuras prestaciones.

GRAFICO II : PROVISION MATEMATICA



En el periodo comprendido entre estos dos extremos la provisión matemática la podemos expresar de diferentes formas, dependiendo del método de coste elegido para el plan de pensiones.

El cálculo de esta provisión es posible dependiendo de que contabilicemos las obligaciones futuras, tanto del plan como del partícipe o promotor, o las pasadas, donde únicamente se tienen en cuenta las aportaciones abonadas por estos últimos. Estos dos métodos son:

i) *Método Prospectivo.*

Se expresa como la diferencia existente entre las obligaciones futuras del plan de pensiones a una edad alcanzada, sobre los deberes de pago futuros del partícipe al plan.

$$PM_{x_a} = (Va)_{x_a} - (Cfa)_{x_a}$$

siendo

PMx$_a$: Provisión matemática calculada a la edad alcanzada.

(Va)x$_a$: Valor actual actuarial a la edad alcanzada x_a de las prestaciones futuras a la jubilación del partícipe.

(Cfa)x$_a$: Valor actual actuarial a la edad alcanzada x_a de las aportaciones futuras del partícipe.

Quedará definida la provisión matemática calculada por el método prospectivo como el exceso del valor actual actuarial de las prestaciones futuras sobre los costes futuros actualizados. Es el método que normalmente exige la legislación para su cálculo.

ii) *Método Retrospectivo.*

La provisión matemática de un empleado activo, la podemos definir de forma retrospectiva, siendo igual al montante de todas las aportaciones pasadas realizadas desde la edad de entrada en el colectivo, hasta el momento del cálculo de la provisión. Normalmente la cuota de aportación del año en curso queda excluida para el cálculo. La denotaremos de la siguiente forma:

$$PM_{x_a} = (Cps)_{x_a}$$

donde

$(Cps)x_a$: Costes Pasados Capitalizados actuarialmente hasta la edad de valoración de la provisión matemática.

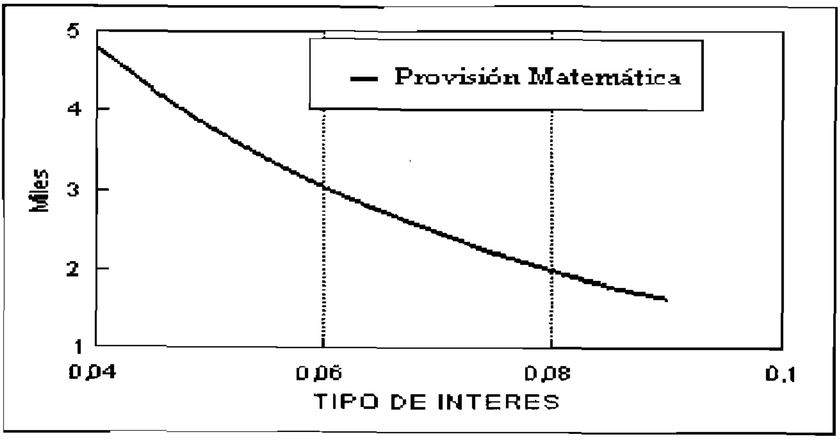
Una vez calculada la provisión matemática para cada partícipe, se obtiene la provisión matemática total del colectivo analizado como suma de los cálculos individuales.

Dentro del cálculo de la provisión matemática se tiene en cuenta la edad de cada partícipe asegurado en la fecha a la que se refiere el cálculo, el método de distribución de coste empleado, las probabilidades de fallecimiento, invalidez, rotación, así como el tipo de interés a utilizar en la valoración.

En el desarrollo de este trabajo nos interesa peculiarmente esta última variable, lo cual no quiere decir que la mortalidad, invalidez, rotación, etc. no sean factores de importancia y que, la variación que experimenten estos tantos de salida respecto de las hipótesis inicialmente planteadas, tenga una influencia escasa. Todo lo contrario.

En este punto podemos diferenciar entre el riesgo actuarial y riesgo financiero dentro de un plan de pensiones. El riesgo actuarial es aquel que experimenta los cálculos de un plan de pensiones, plasmados en la provisión matemática, debido a variaciones experimentadas en los tantos de salida del colectivo de activos, como puede ser fallecimiento, invalidez, etc., así como el experimentado por otros parámetros necesarios para la determinación de la provisión matemática (incremento salarial, pensiones públicas, etc.). Podríamos , a su vez, enumerarlas aisladamente , como riesgo actuarial de mortalidad, riesgo actuarial de invalidez, etc.

GRAFICO III: VALOR DE LA PROVISION MATEMATICA ANTE EL RIESGO DE INTERES



El riesgo financiero o riesgo del tipo de interés es aquel que experimentan los cálculos de la provisión matemática debido a variaciones del tipo de interés.

En las operaciones de seguros y de planes y fondos de pensiones, el tipo de interés técnico es el utilizado para la realización de la equivalencia actuarial entre prestaciones y aportaciones, siendo posteriormente empleado para fijar las provisiones matemáticas.

4. INMUNIZACION FINANCIERA.

La inmunización financiera intenta, como se ha comentado en la introducción, conseguir un resultado final, independientemente del riesgo de interés. Si el tipo de interés varía, afectará a la valoración de la corriente de obligaciones determinadas en el plan, así como a la corriente de ingresos procedentes del fondo.

Buscaremos una estructura de inversiones que, ante variaciones en el tipo de interés, resulten afectados los flujos económicos del fondo de pensiones de igual forma que el flujo de compromisos futuros por pensiones del plan. Mediante este proceso intentamos eliminar o contrarrestar la sensibilidad de los cambios del tipo de interés en las estructuras de vencimientos tanto del activo como del pasivo.

Si el tipo de interés se incrementa, tanto el activo como el pasivo disminuirá, pero buscaremos una estructura de inversora que disminuya en igual proporción que la padecida por las obligaciones del plan. Por el contrario, si el tipo de interés disminuye, intentaremos que el valor del fondo se incremente buscando una estructura inversora que produzca un incremento en igual proporción al experimentado por las obligaciones determinadas en el plan.

Este proceso que vamos a desarrollar se fundamenta en los siguientes supuestos [Wise, (1.984)]:

a) Un modelo actuarial que nos determina unas obligaciones actuariales, considerando unas variables demográficas fijas y un fondo de pensiones donde los rendimientos a obtener de los títulos siguen un comportamiento aleatorio.

b) Es posible determinar las necesidades monetarias futuras fijadas en el modelo actuarial utilizado para la distribución del coste del plan de pensiones.

c) Es posible obtener un modelo de inversión de títulos en el mercado, pudiendo determinar para cada título los posibles flujos monetarios que se generan hacia el futuro.

Entonces existirá un modelo de asignación de títulos que relacionará cada pago probable futuro delimitado en el plan, con los ingresos a obtener en el fondo.

Este proceso lo podemos definir de forma generalizada en la relación con cualquier modelo actuarial, en términos de una asignación de la cartera del fondo a los pagos probables a realizar.

5. MODELO ACTUARIAL DE COSTE.

5.1. Introducción.

Centrándonos en los planes actuariales o de prestación definida, existen dos grandes grupos caracterizándose cada uno de ellos por la variable elegida inicialmente para determinar el coste. Estos modelos los podemos agrupar en modelos de prestaciones acumuladas y modelos de prestaciones proyectadas, dependiendo de la variable que inicialmente se determine.

5.2. Características.

Los modelos actuariales de distribución de coste para los planes de prestación definida tienen las siguientes características comunes:

i) En todos los submodelos se tiene en cuenta la prestación a recibir por el partícipe para las diversas contingencias contempladas en el plan. Es por ello por lo que se denominan de prestación definida.

ii) Se establecen probabilidades de supervivencia así como de otras causas de salida (invalidez, rotación) con lo que se determinan indirectamente tanto el momento probable de salida del colectivo para empezar a percibir la prestación, como la duración de la percepción de la misma.

iii) Se contempla un tipo de interés técnico básico para actualizar los pagos probables futuros en conjunción con la probabilidad conjunta de supervivencia. Este tipo de interés representa las ganancias y rendimientos esperados en una evolución futura a largo plazo, utilizándose habitualmente un tipo de interés técnico inferior, incluso, al tanto de rendimiento más bajo esperado en las inversiones del fondo de pensiones, debido sobre todo a [Brownlee & Daskais, (1.991)]:

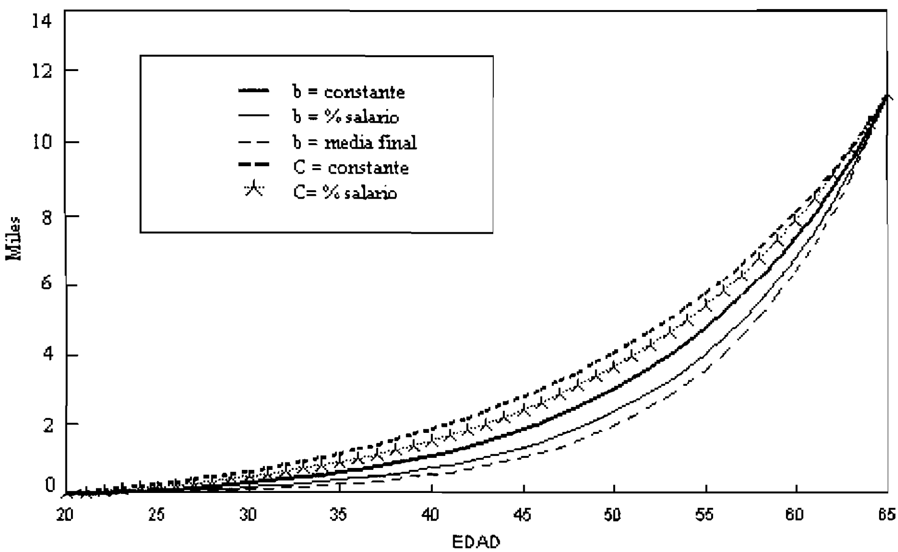
- La necesidad de ser prudente por la volatilidad de las cuantías esperadas, tanto en tiempo como en cantidad.
- La utilización de técnicas inmunizadoras.

Este tipo de interés ha de ser inferior a los utilizados en el mercado para operaciones financieras habituales (préstamos, obligaciones, etc.). Algunos actuarios [Grubbs (1.990)] recomiendan que el tipo de interés no debiera ser superior al 6% para este tipo de valoraciones a largo plazo. Actualmente, para las operaciones de seguros de vida se recomiendan tipos de interés cercanos al 4%, debido a que son operaciones a más corto plazo y se han de materializar en inversiones a ese plazo, donde la rentabilidad de deuda pública a esos vencimientos es también menor.

iv) Permiten un cálculo individualizado de las obligaciones y derechos de cada partícipe, asignando a cada uno su provisión matemática, cuota, valor de prestaciones, etc.

v) Permiten realizar proyecciones en base a las hipótesis técnicas de las magnitudes más significativas del plan. Con ello se realizan revisiones periódicas con el fin de adecuar la marcha real del plan con dichas proyecciones.

GRAFICO IV : PROVISION MATEMATICA ANTE VARIOS MODELOS DE COSTE



Con lo anterior, podemos afirmar que los modelos de coste son una función dependiente de la prestación (B), las probabilidades de causar una prestación (q_x^m para fallecimiento, q_x^i para invalidez, etc.), del tipo de interés técnico (i), de parámetros salariales (is), es decir,

$$f\,(B;q_x^m;q_x^i;i;is;\ldots)$$

6. MODELO ACTUARIAL DE PROYECCION DE OBLIGACIONES.

La elección del método de coste, a su vez, determina el montante de flujos económicos a abonar en el futuro. En el plan de pensiones podemos conocer los pagos futuros a realizar, en base a las hipótesis económicas y biométricas apuntadas en el modelo de coste [Winklevoss (1.982)]. Para prestaciones de jubilación, invalidez y fallecimiento serían las siguientes:

6.1. Pagos probables por jubilación.

La probabilidad de que cause esta prestación para aquellos individuos con edad inferior a la edad normal de jubilación es nula, dada la edad del individuo $x < 64$ y por lo tanto no los tendremos en cuenta hasta el momento en el que el trabajador llegue a la edad de jubilación, es decir a los *65* años. No todos los individuos que inicialmente están en el colectivo de activos causan la prestación, sino únicamente los que alcanzan esa edad.

Sea un subgrupo de activos de edad x (lx^T). Alcanzan la edad de jubilación:

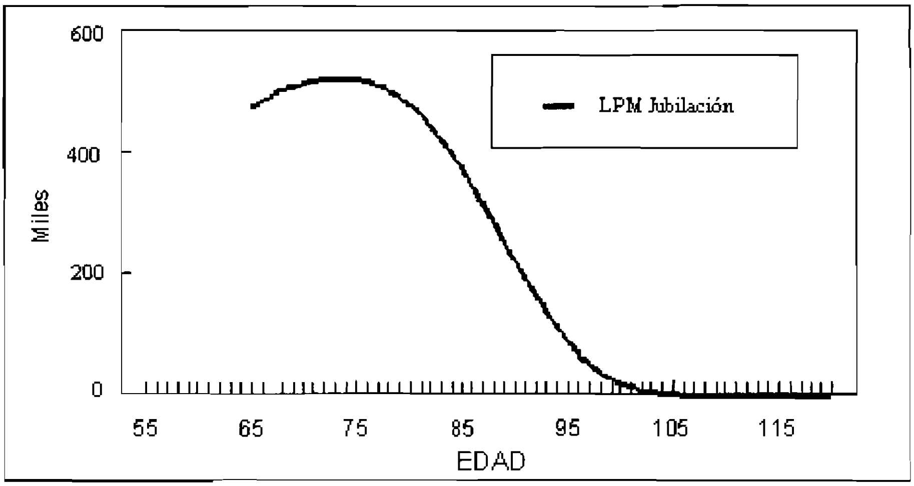
$$l_{65}^T = l_x^T * {}_{65-x}P_x^T$$

siendo:

l_{65}^{T}: Subgrupo de activos de *65* años, que están expuestos a *T* causas de salida.

${}_{65-x}P_{x}^{T}$ Probabilidad de que un individuo de edad *x* siga en el colectivo de activos cuando alcance los *65* años de edad, como activo, y no salga por ninguna de las *T* causas de salida contempladas.

GRAFICO V: PAGOS PROBABLES POR JUBILACION



El pago de la prestación de jubilación se le abonará al beneficiario siempre y cuando no fallezca, por lo que en este periodo de jubilación la única causa que le afecta es el fallecimiento. El valor de la prestación a abonar al trabajador que llega a la jubilación es: B_{65} que junto con los individuos que alcanzan los *65* años, nos indica el valor probable de la prestación de jubilación para un subgrupo de *65* años que causa jubilación al no salir del colectivo por otra causa de salida. Teniendo una distribución uniforme en el tanto de salida, el valor de las prestaciones pagaderas a la edad de 65 (LPM_x^J) para los trabajadores que en este primer año se encuentran en este subcolectivo de beneficiarios ($l_{65+½}^J$), son:

$$LPM_x^J = l_{65+1/2}^J * B_{65} = l_{65}^J * (1 - Q_{65+1/2}^M) * B_{65}$$

donde,

$Q_{65+½}^M$: Probabilidad de salida por mortalidad a la edad $65+½$.

La expresión anterior es a su vez una medida de la liquidez necesaria del fondo de pensiones para abonar las prestaciones que por jubilación se cursan en un momento determinado, es decir el pago probable futuro a realizar durante el primer año, de los que causan la jubilación.

Tenemos de forma agregada que los flujos periódicos de los pagos probables definidos en el plan de pensiones para jubilación como:

	P_{65}^M	P_{66}^M	P_{67}^M ...		P_w^M	
Año	65	66	67		65+s	LPM_t
0	$l_{65+½}^J * B_{65+½}$					LPM_1^J
1	${}^1l_{65+½}^J * B_{65+½}$	$l_{66+½}^J * B_{66+½}$				LPM_2^J
2	${}^2l_{65+½}^J * B_{65+½}$	${}^1l_{66+½}^J * B_{66+½}$	$l_{67+½}^J * B_{67+½}$			LPM_3^J
s	${}^sl_{65+½}^J * B_{65+½}$	${}^{s-1}l_{66+½}^J * B_{66+½}$	${}^{s-2}l_{67+½}^J * B_{67+½}$		$l_{65+s+½}^J * B_{65+s+½}$	LPM_s^J

$$LPM_s^J = \sum_{t=1}^{s} {}^{s-t+1}l_{65+1/2+t-1}^{J} * B_{65+1/2+t-1}$$

${}^{s-t}l_{65+t}^{J}$: Aquel subcolectivo de jubilados de edad $65+t$, que entraron en este subcolectivo a los s-t años desde el inicio de la proyección de los cálculos.

6.2. Pagos probables por invalidez.

El subcolectivo inicial de activos es la fuente de nuevos entrantes para el resto de subcolectivos y particularmente para el subcolectivo de inválidos. De esta forma a lo largo del primer año en el plan y para un subgrupo de activos de edad x (l_x^T), obtenemos un primer subcolectivo formado por aquellos partícipes que se invalidan y que causan la prestación de invalidez ($B_{x+½}^{i}$) si alcanzan la edad $x+1$ como inválidos vivos. El abono probable al final de esa edad sería (LPM_x^i):

$$LPM_x^i = Q_x^i * l_x^T * {}_{1/2}P_x^M * B_{x+1/2}^i$$

siendo,

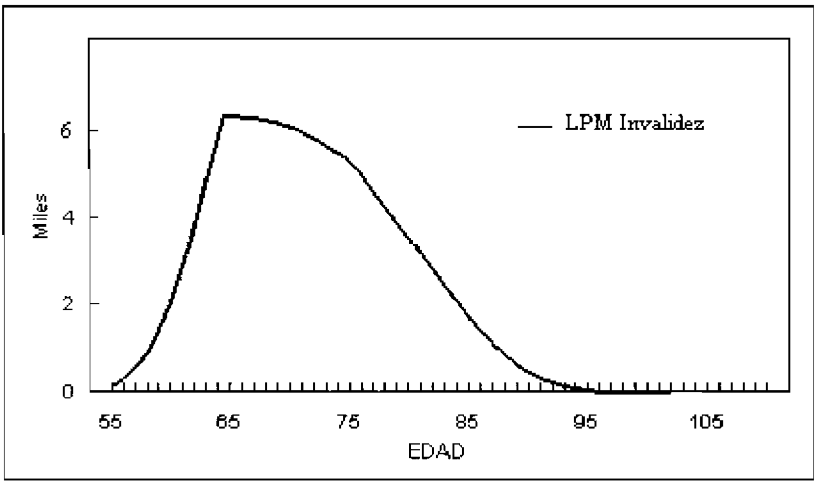
Q_x^i: Probabilidad dependiente de salida por invalidez a la edad x.

${}_{½}P_x^m$: Probabilidad de que un partícipe de edad x alcance la edad $x+½$ y no fallezca.

Para el siguiente año, al colectivo anterior, formado íntegramente por inválidos le abonamos la prestación siempre que permanezcan inválidos y no fallezcan. Adicionalmente, a esa edad se producen nuevas incorporaciones de inválidos debido a aquellos que durante este año se han invalidado. El pago probable a realizar al final del segundo año para la contingencia de invalidez (LPM_{x+1}^{i}) viene dado como:

$$LPM^{i}_{x+1} = LPM^{i}_{x} * P^{m}_{x-1/2} + Q^{i}_{x+1} * l^{T}_{x+1} * {}_{1/2}P^{T}_{x+1} * B^{i}_{x+1+1/2}$$

GRAFICO VI: PAGOS PROBABLES POR INVALIDEZ



De forma general y para un año cualquiera, el pago probable futuro estará compuesto por la suma de aquellos pagos que se vienen realizando si el beneficiario inválido sigue vivo, más el que se realiza a las nuevas incorporaciones:

$$LPM^{i}_{x+t} = \sum_{j=0}^{t-1} LPM^{i}_{x+j} * P^{m}_{x+1/2+j} + Q^{i}_{x+t} * l^{T}_{x+t} *_{1/2} P^{m}_{x+t} * B^{i}_{x+t+1/2}$$

Con lo anterior quedan determinados los flujos de pago probables debidos al pago por invalidez.

6.3. Pagos probables por fallecimiento.

El fallecimiento del partícipe del plan de pensiones provoca el nacimiento de una prestación a favor del cónyuge ($B_{x+½}{}^{m}$). Para el primer año del plan, se obtiene el primer subgrupo de beneficiarios (l_y) formado por aquellos cónyuges que alcanzan vivos un año más, tras el fallecimiento del partícipe. A ellos se les abonará la correspondiente prestación probable de fallecimiento ($LPM_x{}^{m}$):

$$LPM^{m}_{x} = Q^{m}_{x} * l^{T}_{x} * l_{y} *_{1/2} P^{m}_{y} * B^{m}_{x+1/2}$$

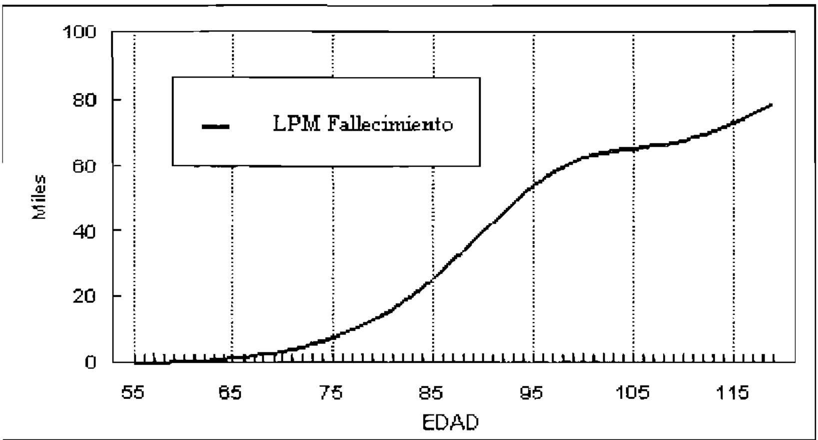
$Q_x{}^{m}$: Probabilidad dependiente de salida por fallecimiento a la edad x.

${}_{½}P_y{}^{m}$: Probabilidad de que un beneficiario de edad y alcance la edad $y+½$ y no fallezca.

Para el siguiente año, se abonará la prestación a los beneficiarios existentes que continúen vivos y adicionalmente se incorporarán nuevos beneficiarios debido al fallecimiento a tal edad de los partícipes. Generalizando para un año t-ésimo, el pago probable futuro a esa edad vendrá dado por la suma de los pagos probables que se vienen realizando si el beneficiario continua vivo más el abono probable a realizar debido a las nuevas incorporaciones durante el t-ésimo año:

$$LPM^{m}_{x+t} = \sum_{j=0}^{t-1} LPM^{m}_{x+j} * P^{m}_{y+1/2+j} + Q^{m}_{x+t} * l^{r}_{x+t} * l_{y+t} *_{1/2}P^{m}_{y+t} * B^{m}_{x+t+1/2}$$

GRAFICO VII: PAGOS PROBABLES POR FALLECIMIENTO



7. INFLUENCIA DEL RIESGO FINANCIERO.

Para determinar cómo afecta el riesgo de interés a las operaciones de los planes y fondos de pensiones, hemos de plantear inicialmente y de forma concisa, las ecuaciones básicas para un partícipe de edad alcanzada x_a bajo el caso de un tipo de interés constante, supuesto que el resto de la base técnica permanece inalterable (mortalidad, invalidez, etc.) y acorde con la experiencia apuntada, así como inexistencia de variaciones en los incrementos de las pensiones ni en los salarios, diferentes a los inicialmente previstos por el actuario.

En estas condiciones se denomina valor actuarial de las prestaciones a otorgar a la jubilación como:

$$(Va)_{x_a} = \sum_{j=x_a}^{w} B_j * {}_{j-65}P_{65}^{m} * V^{j-65} * V^{65-x_a} * {}_{65-x_a}P_{x_a}^{T}$$

De igual manera, se financia mediante cuotas de aportación (C_j), donde su valor actuarial viene dado como:

$$(Cfa)_{x_a} = \sum_{j=x_a}^{64} C_j * V^{j-x_a} * {}_{j-x_a}P_{x_a}^{T}$$

La equivalencia financiero-actuarial resulta igualando ambos procesos a aquella edad del partícipe a partir de la cual se reconocen los derechos. Esto es, a la edad de entrada (x_e):

$$(Va)_{x_e} = (Cfa)_{x_e}$$

Esta equivalencia inicial se plantea valorando financieramente la operación de previsión al tipo de interés técnico, de manera que las prestaciones quedan garantizadas siempre que se abonen aportaciones y se cumplan las hipótesis técnicas que se apuntan.

Podemos definir el valor financiero del plan de pensiones ($VLPMx_a$) en una fecha posterior, esto es, en el momento en el que el partícipe tiene una edad alcanzada (x_a), como el exceso del valor actuarial de las prestaciones prometidas sobre las aportaciones a realizar, valoradas al tipo de interés de mercado (considerando una estructura plana en este tipo de interés de mercado):

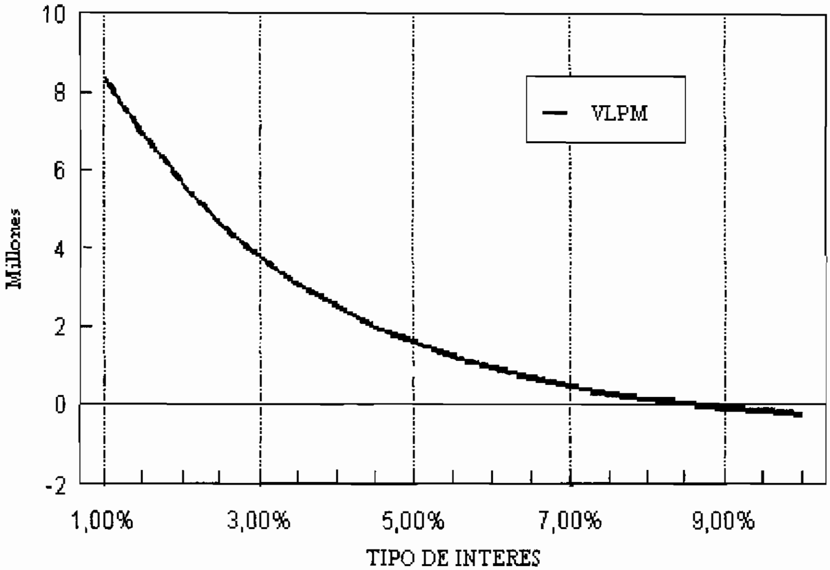
$$VLPM_{x_a} = (Va)_{x_a} - (Cfa)_{x_a} =$$

$$= \sum_{j=65}^{w} B_j * V^{j-65} * {}_{j-65}P_{65}^{m} * {}_{65-x_a}P_{x_a}^{T} * V^{65-x_a} - \sum_{j=x_a}^{64} C_j * {}_{j-x_a}P_{x_a}^{T} * V^{j-x_a}$$

Esta expresión resulta ser decreciente respecto al interés de mercado, manteniéndose constante el resto de características. Esto indica que el valor de la operación varía de forma inversa y menos que proporcional que el tipo de interés de la valoración.

La provisión matemática que corresponde al plan de pensiones es el valor financiero anterior para el caso de que el tipo de interés de mercado sea coincidente con el tipo de interés técnico empleado para el cálculo del plan.

GRAFICO VIII: *VLPM* ANTE EL RIESGO DE INTERES



Una variación del tipo de interés afectará a ambos términos de la renta. Por una parte al valor actuarial de las prestaciones a otorgar y por el otro lado, al valor actuarial de las aportaciones a abonar, es decir, afectará íntegramente al valor prospectivo de la provisión matemática.

No obstante, su valor retrospectivo permanecerá inalterado al estar formado por el valor final de las aportaciones realizadas, aminoradas por el riesgo asumido hasta la fecha (para la prestación de jubilación es nulo siempre que la edad del partícipe sea inferior a los *65* años). Este importe ha de estar dotado económicamente por el fondo de pensiones.

8. PROVISION MATEMATICA SUPLEMENTARIA.

8.1. Significado.

El diferente importe obtenido en el cálculo de la provisión matemática por el método prospectivo frente al retrospectivo debido al riesgo financiero o riesgo del tipo de interés, conlleva a la existencia de diferencias positivas o negativas se denominan provisión matemática suplementaria, pues es una cantidad que sin duda alguna debería de estar respaldada económicamente pero por efectos ajenos al plan de pensiones, no lo están.

Hallamos la cuantía de la Provisión Suplementaria ($PMSx_a$) como diferencia de la provisión matemática calculada por el método prospectivo (${}^{P}PMx_a$), con la calculada por el método retrospectivo (${}^{R}PMx_a$), basada en las cuotas de aportación y base técnica pasada y conocida. Es decir:

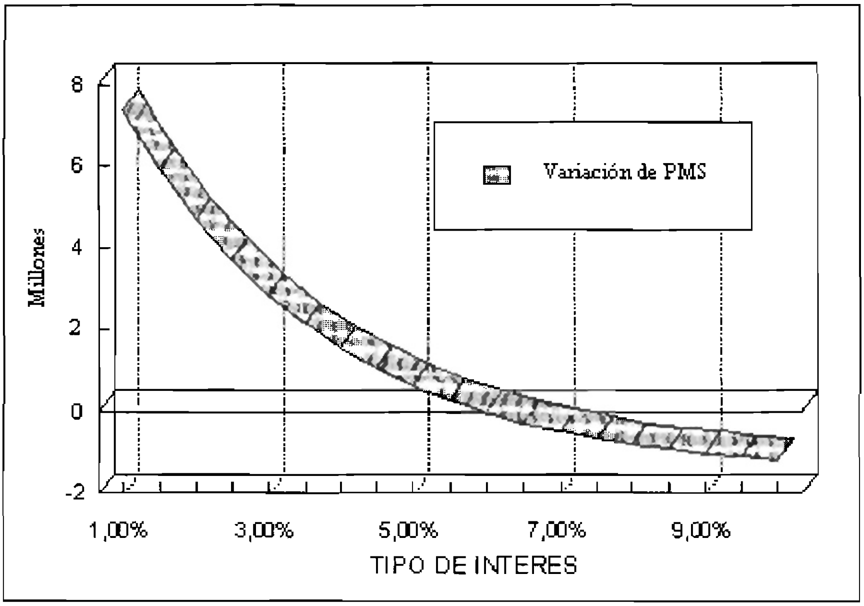
$$PMS_{x_a} = {}^{P}PM_{x_a} - {}^{R}PM_{x_a}$$

donde

$$PMS_{x_a} = (Va)_{x_a} - (Cfa)_{x_a} - (Cps)_{x_a}$$

Esta cantidad , en caso de ser positiva, habrá de ser financiada mediante unas cuotas con carácter suplementario para cada partícipe del plan de pensiones.

GRAFICO IX: VARIACION DE *PMS* ANTE EL RIESGO DE INTERES



En el caso de que no se realice durante un periodo aportación alguna, la provisión suplementaria se incrementará ($\Delta PMSx_a$), siendo este incremento el valor de la provisión suplementaria del siguiente año, menos la provisión suplementaria del año anterior capitalizada actuarialmente.

$$\Delta PMS_{x_a} = PMS_{x_a+1} - PMS_{x_a} * (1+i) * (P^T_{x_a})^{-1}$$

8.2.Coste Suplementario.

El coste suplementario de un plan de pensiones está asociado a su provisión suplementaria, pues es el homónimo al coste normal utilizado para acreditar las prestaciones futuras pero que, en este caso debido al riesgo de interés, ha producido desviaciones en las hipótesis consideradas y que en el actual modelo no pueden llegar a cumplirse.

El coste normal inadecuado para acreditar las prestaciones a la jubilación nos genera la provisión suplementaria, que a su vez es contrarrestada con el coste o cuota suplementaria, con el fin de paliar la deficiencia actuarialmente.

Este coste puede, si así se desea, ser igual al valor de la provisión suplementaria en un momento determinado o puede amortizarse en un número de periodos mayor, siendo el límite superior, el final del periodo de aportaciones normales al plan de pensiones por parte del partícipe (65 años).

El coste suplementario se irá acumulando a aquellas provisiones que deberían haber estado acumuladas, de forma que en el momento de la jubilación, se obtengan los suficientes recursos y garantías como para asegurar las prestaciones futuras del partícipe, al nuevo interés técnico considerado.

Este proceso es el que debemos llevar a cabo ante una variación de un parámetro que afecte a las obligaciones actuariales del plan (riesgo actuarial). Sin embargo, si este parámetro es el tipo de interés, puede ocurrir que no sea necesario modificar las aportaciones del partícipe en el caso de que también afecte a la materialización financiera de las obligaciones. Esto es, al fondo de pensiones.

En efecto, si la variación de la provisión matemática calculada por el método prospectivo, menos la calculada por el método retrospectivo (que no se ve afectada por el riesgo de interés) resulta de igual importe que la variación que experimente el fondo de pensiones ante el riesgo de interés, entonces los derechos económicos del partícipe continúan respaldados y no es necesario una aportación suplementaria.

Será necesario regularizar el plan de previsión si con la variación experimentada por el fondo no se equilibra la provisión matemática suplementaria.

$$PMI_x = PMS_x - \Delta F_x \neq 0$$

ΔF_x: La variación que experimenta el fondo de pensiones correspondiente al partícipe de edad x, ante una variación del tipo de interés.

PMI_x: Provisión matemática pendiente de constituir a la edad x.

9. MEDICION DEL RIESGO FINANCIERO.

9.1. Variación del fondo de pensiones.

Como se ha detallado anteriormente, el riesgo del tipo de interés no va a afectar únicamente al valor de las provisiones matemáticas sino que también afectará al fondo económico que garantiza dichas obligaciones.

El fondo de pensiones está integrado por un conjunto de inversiones en activos financieros que conllevan compromisos de cobro futuros, donde el valor del fondo viene dado por el valor financiero de los flujos futuros (VIF_T):

$$VIF_T = \sum_{J=1}^{w} IF_J * V^J$$

Una variación del tipo de interés provocará una variación del valor del fondo de pensiones. De esta forma, dado el valor financiero de los flujos futuros en una fecha dada. Si existe una mínima variación en el tipo de rentabilidad de mercado (e), el valor del fondo cambiará a $VIF(i+e)$. En este caso, podemos encontrar su nuevo valor mediante una aproximación de MacLaurin para tres términos, donde la función es $VIF(i+e)$. En el límite a cero de ese valor incremental, tendremos [Elton & Gruber, (1.991)]:

$$VIF(i+e) = VIF(i) + \frac{d\ VIF(i)}{d\ i} * e + \tfrac{1}{2} * \frac{d^2\ VIF(i)}{d\ i^2} * e^2$$

La primera derivada del valor del fondo respecto al riesgo de interés viene dada como,

$$\frac{d\,VIF(i)}{d\;i} = \sum_{t=1}^{w} \frac{t\;*IF_t}{(1+i)^t} * \frac{-1}{(1+i)}$$

La segunda derivada, respecto al mismo factor es:

$$\frac{d^2\;VIF(i)}{d\;i^2} = \sum_{t=1}^{w} \frac{t*(t+1)\;*IF_t}{(1+i)^t} * \frac{1}{(1+i)^2}$$

Quedando el valor del título cuando existe un mínimo cambio del valor del interés de mercado:

$$VIF(i+e) = \sum_{t=1}^{w} \frac{IF_t}{(1+i)^t} + \sum_{t=1}^{w} \frac{t*IF_t}{(1+i)^t} * \frac{-1}{(1+i)} * e \;+\; \tfrac{1}{2} * \sum_{t=1}^{w} \frac{t*(t+1)*IF_t}{(1+i)^t} * \frac{1}{(1+i)^2} * e^2$$

La variación que experimenta el valor del fondo de pensiones debida a una alteración del tipo de interés vendrá dada como:

$$r = \frac{VIF(i+e)\;-\;VIF(i)}{VIF(i)}$$

sustituyendo y simplificando:

$$r = \sum_{t=1}^{w} \frac{\dfrac{t * IF_t}{(1+i)^t}}{\dfrac{IF_t}{(1+i)^t}} * \frac{-1}{1+i} * e + \sum_{t=1}^{w} \frac{\dfrac{t*(t+1)*IF_t}{(1+i)^t}}{\dfrac{IF_t}{(1+i)^t}} * \frac{1}{(1+i)^2} * e^2$$

es decir,

$$r = -D* \frac{e}{(1+i)} + CX* \frac{e^2}{2*(1+i)^2}$$

donde el primer término del segundo miembro hace referencia a la duración (D) y el segundo término del segundo miembro se refiere a la convexidad del fondo (CX) frente a variaciones del tipo de interés.

Si en este desarrollo incluimos más términos, lograremos una aproximación mejor que si sólo empleamos la duración o si utilizamos la duración y la convexidad, para determinar el cambio del valor del fondo respecto a la variación del interés, aunque incrementa la dificultad para su aplicación práctica.

9.2. La duración.

9.2.1. *Concepto.*

La duración es una medida estática que nos proporciona información puntual respecto a cambios en el tipo de interés del mercado y nos permite determinar cómo calcular la influencia de éste en los rendimientos de los títulos. Inicialmente definida en 1.938, [Macaulay, (1.938)], es una medida de la vida ponderada de ésta, indicándonos el plazo de recuperación medio de la inversión efectuada. También puede ser definida como la elasticidad del valor de la inversión en el título (*P*) respecto al factor de capitalización del tipo de interés.

Para un título de valor actual *P* , con abono de cupones de cuantía *C* y un valor de reembolso de *N*, la duración viene dada con la siguiente expresión:

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{n-1} t \quad C \quad V^t}{P} + \frac{n \quad (C+N) \quad V^n}{P}$$

La duración (*D*) es un índice que mide el número de años medio que tiene que esperar el inversor para recuperar su inversión. De esta forma, dos títulos de diferentes emisiones, con idéntica duración, tienen más en común que dos títulos con igual tanto de rendimiento. Un bono cuya vida sea superior a la duración incrementa su rendimiento debido a que ya se ha recuperado la inversión en él realizada. La duración es, de este modo, un concepto que caracteriza la dimensión de riesgo de los títulos, tal vez mejor que el rendimiento de éstos.

Este índice se ha desarrollado para [Bierwag, Kaufman & Khang (1.978)]:

i) Obtener un indicador del periodo de recuperación de una inversión compuesta por una corriente de pagos, como puede ser la de los títulos financieros.

ii) Encontrar un mayor conocimiento sobre la influencia que el cambio en el tipo de interés produce en la valoración de los futuros flujos de pagos de un título.

iii) Construir estrategias, a través de la construcción de carteras diversificadas y escalonadas en vencimientos, con el fin de llegar a protegerse contra el riesgo derivado de un cambio en los tantos de interés.

9.2.2. *Características.*

Como características más importantes de este índice podemos mencionar:

i) Una variación del tipo de interés de mercado influye en la cotización de todos los activos financieros y en este sentido, la duración es una medida correcta para expresar la sensibilidad del precio de la inversión ante fluctuaciones del tipo de interés del mercado.

ii) Si los títulos abonan periódicamente dividendos o cupones, la variación del tipo de interés afectará a las reinversiones de estas magnitudes y por tanto el valor de la inversión realizada será distinto al inicialmente planificado.

iii) Si el activo financiero tiene una rentabilidad implícita (esto es, que recuperamos el capital invertido y los intereses al final de la inversión como puede ocurrir con un título con cupón acumulado o cupón cero), entonces este título es insensible a las variaciones que existan sobre el tipo de interés, y la magnitud duración sólo nos indicará la reacción del precio ante estas fluctuaciones del interés, no afectando al valor de reembolso de dicho título.

iv) La duración de aquellas inversiones atípicas y de aquellos títulos con rendimientos probables se debe basar en los flujos futuros estimados y probables [Fireman, (1.991)]

9.2.3. *Duración del fondo de pensiones.*

Bajo ciertas condiciones, podemos determinar tanto la duración del fondo de pensiones (una cartera de títulos) así como de los flujos de pagos de un plan de pensiones. Resaltamos los supuestos que tenemos en cuenta para poder determinar estas características [Boyle, (1.992)]:

i) Los ingresos futuros deben ser conocidos, o al menos debemos poder estimarlos con cierto grado de seguridad.

ii) La evolución futura del tipo de interés ha de ser independiente de la cuantía de los ingresos que se perciban por los títulos financieros en cartera, afectando la variación del tipo de interés únicamente a la valoración de estos flujos.

iii) En el mercado financiero deben existir los suficientes títulos, tanto cuantitativa como cualitativamente, para proceder a invertir.

iv) Los cambios en el tipo de interés corresponden a movimientos paralelos, esto es, los incrementos del tanto de mercado son discretos e instantáneos, produciendo una traslación paralela de la curva de interés.

Alguno de estos supuestos puede ser modificado, y determinarse mediante estimaciones con cierto grado de seguridad, requiriéndose en su caso, un análisis más concreto.

La duración de una cartera es igual a la media aritmética ponderada de las duraciones de cada uno de los títulos, utilizando como factores de ponderación las proporciones que representa cada paquete de títulos sobre el valor total de la cartera.

$$D_{IF} = D_1 * n_1 + D_2 * n_2 + \ldots + D_w * n_w$$

donde:

D_{IF}: Duración total del fondo de pensiones.

D_w: Duración del título w-ésimo.

n_w: Porcentaje en el que está invertido el título w-ésimo en el total de la cartera de títulos.

De esta forma, sean IF^1_1, IF^1_2, ... , IF^1_s, el flujo de ingresos procedentes del título 1; IF^2_1, IF^2_2, ... , IF^2_s, el flujo de ingresos procedentes del título 2; ... ; IF^w_1, IF^w_2, ... , IF^w_s, el flujo de ingresos procedentes del título w-ésimo; s número de periodos. Tenemos de forma agregada que los flujos periódicos de la cartera de títulos vienen como:

$$IF_1 = \sum_{j=1}^{w} IF_1^j$$

.....

$$IF_s = \sum_{j=1}^{w} IF_s^j$$

Es claro que puede existir algún IF^i_j con un valor nulo, habida cuenta de que se haya producido su amortización o no existan dividendos o cupones, como puede ser en un título-obligación de cupón cero o de intereses acumulados, acciones que no paguen dividendo, etc. Es importante incluir como restricción la no negatividad de estos flujos IF_i. Es decir, que todos ellos sean positivos. En la práctica pueden existir si la cartera incluye títulos dentro de sus inversiones futuras o existe una contrastada composición de títulos a corto y largo plazo.

Valorando todos los títulos al tipo de rentabilidad de mercado, obtenemos el precio o el valor actual de mercado de esos títulos:

$$V_0^1(i) = \sum_{j=1}^{w} IF_1^j * (1+i)^{-j}$$

$$.....$$

$$V_0^s(i) = \sum_{j=1}^{w} IF_s^j * (1+i)^{-j}$$

Siendo el valor actual de la cartera la suma de todos los valores actuales de los títulos, calculados al tipo de interés de mercado:

$$V_{IF} = \sum_{j=1}^{s} V_0^j$$

Donde la proporción que representa cada título en el total de la cartera, viene determinado por su valor actual sobre el valor actual total de ésta. Por la definición expuesta anteriormente, la duración de una cartera de títulos D_{IF} viene expresada como:

$$D_{IF} = \frac{\sum_{t=1}^{s} t * IF_t * (1+i)^{-t}}{V_{IF}}$$

Sustituyendo el valor de los ingresos totales periódicos de la cartera, esto es, los valores que la componen (los ingresos de cada uno de los títulos que se producen en cada periodo), y simplificando, llegamos a la expresión inicial de:

$$D_{IF} = D_1 * n_1 + D_2 * n_2 + \ldots + D_w * n_w$$

Luego la duración de una cartera es igual a la media aritmética ponderada de las duraciones de cada uno de los títulos, utilizando como factores de ponderación las proporciones que representa cada paquete de títulos poseídos sobre el valor total de la cartera.

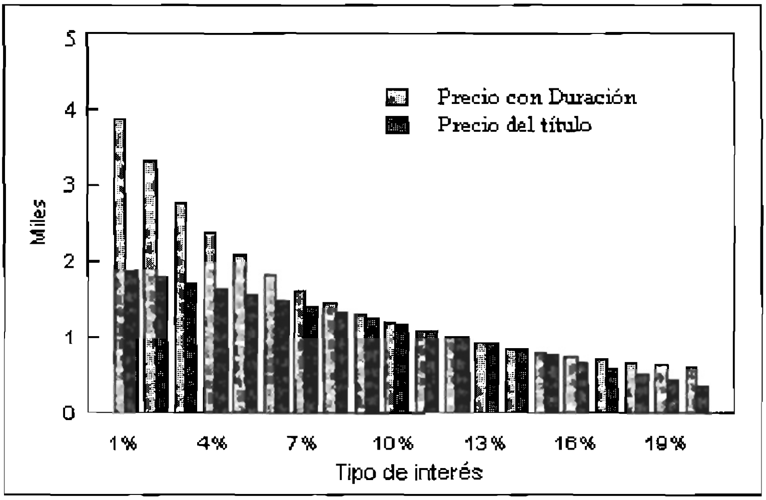
La duración de una cartera de títulos puede ser tomada como una variable de decisión. Si en el mercado existe una amplia gama de títulos, y cada uno con una duración diferente, el inversor puede elegir una duración particular y determinar el número de títulos que quiere tener.

9.3. La convexidad

9.3.1. *Concepto.*

El uso de la duración como único índice para determinar las variaciones del fondo de pensiones ante el riesgo de interés es válido si esas variaciones no son muy grandes. Cuando los cambios en el tipo de interés son substanciales, y se desea una mayor aproximación a esas variaciones, se ha de proceder a incluir más información, sobre todo cuando estamos seleccionando diversos títulos que tengan una duración muy similar. En muchos casos vamos a necesitar para nuestras decisiones una visión complementaria y tendremos que recurrir a parámetros adicionales.

GRAFICO X : VARIACION DEL PRECIO DE UN TITULO A TRAVES DE LA DURACION



La convexidad trata de recoger aquella parte de la variación porcentual en el precio del título, derivada de una variación en el tipo de interés, y que no haya sido captada por la duración. Sin embargo, para variaciones significativas en el tanto de interés, el uso de la duración produce un error de estimación:

- Si el tipo de interés baja, el precio de mercado del título aumenta, pero al mismo tiempo, también lo hace la duración. Un descenso grande de ese interés produce un precio final muy superior al calculado inicialmente con la duración.

- Si el tipo de interés sube, el precio de mercado del título disminuye, pero al mismo tiempo, también lo hace la duración. Un incremento grande de ese interés produce un precio final inferior al calculado inicialmente con la duración.

La convexidad está conceptualmente relacionada con la variación de la duración ante un cambio en el tipo de interés (tercer término del desarrollo de McLaurin).

Para obtener una mayor exactitud de la variación de los precios de los títulos ante variaciones del tipo de interés, se considera un parámetro que nos indica la dispersión de aquel frente a éste. Es el término de convexidad anteriormente descrito. Viene dado para un título *j*-ésimo de valor *P* como:

$$CX = \frac{\sum_{t=1}^{s} t*(t+1)*IF_t^j*(1+i)^{-t}}{P}$$

siendo:

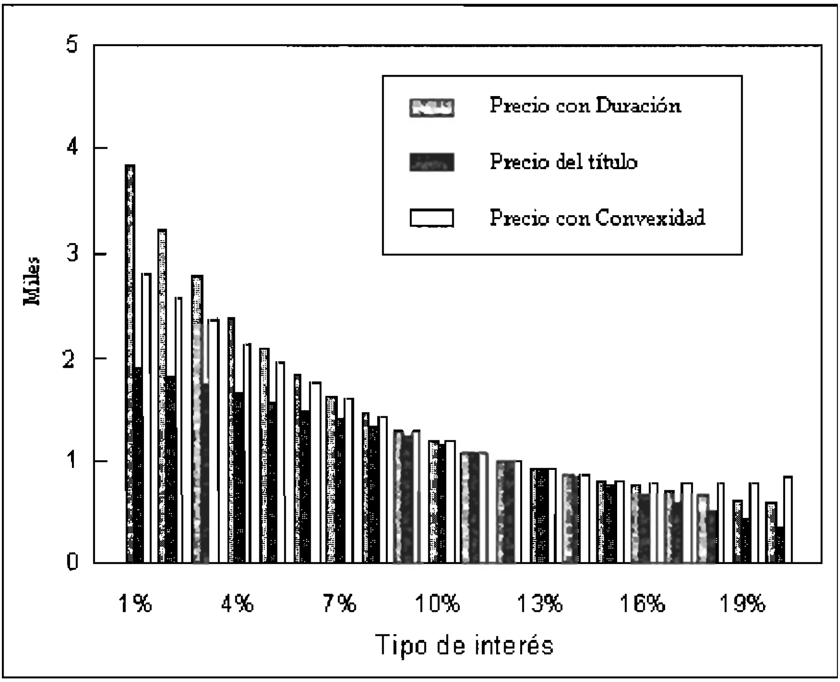
IF^j_t: Valor de los ingresos debido a las inversiones realizadas más los intereses generados de el título j-ésimo en el momento t-ésimo.

P: El precio de mercado del título en el momento inicial.

t: Momento t de valoración de los ingresos que se producen en ese año. Asimismo, es el factor de ponderación de éstos.

De la descripción realizada hasta ahora se deduce que el efecto corrector de la convexidad sobre el precio final de un título calculado a través de la duración, es siempre positivo. Si el interés desciende, el aumento del precio del título es mayor que el estimado con la duración. Si el interés aumenta, el descenso final del precio es menor al estimado con la duración.

GRAFICO XI: VARIACION DEL PRECIO DE UN TITULO A TRAVES DE LA CONVEXIDAD



Con lo anterior, podremos definir una regla de decisión ante dos títulos con las mismas características: El inversor preferirá aquel título que tenga menor convexidad, puesto que le proporciona una cobertura mayor ante la variación de los tipos de interés.

9.3.2. *Características.*

Los dos factores más importantes que afectan a la convexidad de un título son su duración y la dispersión de los flujos de pago.

a) *La Duración.*

La convexidad de un título aumenta con su duración. La anterior afirmación está relacionada con el hecho de que cuanto más dilatado es el plazo de vencimiento del título, mayor es su curvatura, incrementándose la convexidad más que proporcionalmente a la duración.

Por tanto, al igual que la duración, la convexidad está positivamente relacionada con el plazo de vencimiento e inversamente relacionada con el tipo de interés y con el tipo de cupón.

b) *La dispersión de los flujos de pago*

Entre dos bonos de la misma duración, la convexidad será mayor en aquel que tenga menos concentrados en el tiempo los pagos de intereses y la devolución del principal.

Por ejemplo, la convexidad será mayor en un título con abono de intereses periódicos que en un título cupón cero. La razón es que para la misma duración, al incrementarse la dispersión, los flujos de pago más alejados en el tiempo acaparan cada vez mayor convexidad (la convexidad se incrementa más proporcionalmente que la duración).

9.3.3. *Convexidad del fondo de pensiones.*

Al igual que en el epígrafe 9.2.3., la convexidad del fondo de pensiones vendrá dada como

$$CX_{IF} = \frac{\sum_{t=1}^{s} t*(t+1)*IF_t*(1+i)^{-t}}{V_{IF}}$$

Sustituyendo el valor de los ingresos totales periodicos de la cartera, esto es, los valores que la componen (los ingresos de cada uno de los títulos que se producen en cada periodo), desarrollando y simplificando obtenemos:

$$CX_{IF} = CX_1*n_1 + CX_2*n_2 + \ldots + CX_w*n_w$$

Luego la convexidad de una cartera es igual a la media aritmética ponderada de las convexidades de cada uno de los títulos, utilizando como factores de ponderación las proporciones que representan cada paquete de títulos sobre el valor total de la cartera.

9.4. La duración esperada.

Una variación del tipo de interés provocará una variación del valor de las obligaciones del plan de pensiones. De esta forma, dado el valor financiero de los pagos probables futuros determinados en una fecha dada. Si existe una mínima variación en el tipo de rentabilidad de mercado (*e*), el valor de las obligaciones asumidas cambiará a *VLPM(i+ e).* En este caso, podemos encontrar su nuevo valor mediante una aproximación de MacLaurin para tres términos, donde la función es *VLPM(i+ e).* En el límite a cero de ese valor incremental tendremos,

$$VLPM(i+e) = VLPM(i) + \frac{d\ VLPM(i)}{d\ i} * e + \tfrac{1}{2} * \frac{d^2\ VLPM(i)}{d\ i^2} * e^2$$

La primera derivada del valor de los pagos probables respecto al riesgo de interés viene dada como,

$$\frac{d\ VLPM(i)}{d\ i} = \sum_{t=1}^{w} \frac{t\ * LPM_t}{(1+i)^t} * \frac{-1}{(1+i)}$$

La segunda derivada, respecto al mismo factor es:

$$\frac{d^2\ VLPM(i)}{d\ i^2} = \sum_{t=1}^{w} \frac{t * (t+1)\ * LPM_t}{(1+i)^t} * \frac{1}{(1+i)^2}$$

Quedando el valor de los pagos probables futuros cuando existe un mínimo cambio del valor del interés de mercado:

$$VLPM(i+e)=\sum_{t=1}^{w}\frac{LPM_t}{(1+i)^t}+\sum_{t=1}^{w}\frac{t*LPM_t}{(1+i)^t}*\frac{-1}{(1+i)}*e \quad + \quad \frac{1}{2}*\sum_{t=1}^{w}\frac{t*(t+1)*LPM_t}{(1+i)^t}*\frac{1}{(1+i)^2}*e^2$$

La variación que experimenta el valor de estas obligaciones debido a una alteración del tipo de interés vendrá dada como:

$$r = \frac{VLPM(i+e) - VLPM(i)}{VLPM(i)}$$

sustituyendo y simplificando:

$$r = \sum_{t=1}^{w}\frac{\frac{t*LPM_t}{(1+i)^t}}{\frac{LPM_t}{(1+i)^t}}*\frac{-1}{1+i}*e + \sum_{t=1}^{w}\frac{\frac{t*(t+1)*LPM_t}{(1+i)^t}}{\frac{LPM_t}{(1+i)^t}}*\frac{1}{(1+i)^2}*e^2$$

es decir,

$$r = -DE*\frac{e}{(1+i)} + CXE*\frac{e^2}{2*(1+i)^2}$$

donde el primer término del segundo miembro hace referencia a la duración esperada (*DE*) y el segundo término del segundo miembro se refiere a la convexidad esperada (*CXE*) de los pagos probables futuros asumidos en el plan de pensiones, ante a variaciones del tipo de interés.

Si en este desarrollo incluimos más términos, lograremos una aproximación mejor que si sólo empleamos la duración esperada o si utilizamos la duración y la convexidad esperada, para determinar el cambio del valor de las obligaciones respecto a la variación del interés, aunque incrementa la dificultad para su aplicación práctica.

9.4.1. *Concepto.*

La duración esperada en una operación actuarial corresponde al número de años medio en el que se va a producir la salida de prestaciones o pagos debido a la contingencia contemplada. Este índice nos proporciona información puntual respecto a la influencia que tiene el tipo de interés en la valoración de una operación actuarial.

La duración en una operación actuarial corresponde a la medida de vencimientos de los capitales a abonar en la operación, ponderados por los valores actualizados de las cuantías esperadas, respecto del valor financiero de la operación [Meneu, (1.997)]. En todos los casos, representa una medida de los vencimientos de nuestra operación contratada, afecta a variaciones en el tipo de interés de la valoración.

Propiamente no se trata la duración esperada como el valor esperado de una variable estadística. La utilización práctica de este concepto ha de emplearse dentro de un marco colectivo, al igual que ocurre con la propia operación actuarial, la cual únicamente tiene sentido si es aplicada, en conjunto, dentro de un colectivo de asegurados [Li & Panjer, (1.994)].

Este índice nos puede ser de utilidad para:

- obtener un indicador del periodo de maduración de la corriente de pagos, como puede ser una renta temporal vitalicia.

- tener un conocimiento mayor sobre la influencia que produce el tipo de interés sobre la valoración de los flujos probables de pago.

- construir estrategias con el fin de protegerse contra el riesgo derivado de los cambios en el tipo de interés.

9.4.2. *Características.*

Como características más importantes que podemos mencionar de la duración esperada tenemos:

1. Una variación del tipo de interés influye en la valoración financiera de la operación actuarial y, en ese sentido, es una medida correcta para expresar la sensibilidad del pago probable ante fluctuaciones del tipo de interés.

2. Si los pagos a realizar son periódicos, por ejemplo, una renta temporal, el riesgo de interés afectará a estas magnitudes y, por tanto, el valor de los pagos será diferente al inicialmente establecido.

3. Si la operación actuarial consiste en un único pago en *n*, entonces su duración esperada es *n* y esta operación es insensible a las fluctuaciones que experimente el tipo de interés.

De esta forma, para un individuo de edad *x*, al que se le abone un capital *C*, en el caso de que esté vivo dentro de *n* años, tendrá una duración esperada igual al momento de vencimiento del capital que se debe abonar. Es decir, *n*:

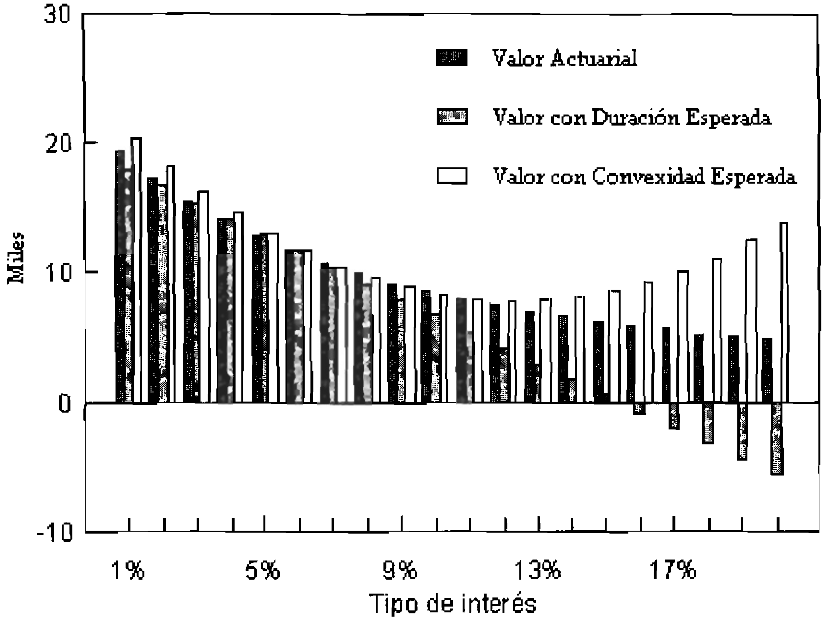
$$DE = \frac{n * C *_n P_x * V^n}{C *_n P_x * V^n} = n$$

4. Si la operación actuarial consiste en una serie de pagos entre *0* y *n*, entonces la duración esperada tomará un valor comprendido en el intervalo de *0* hasta *n*, y una variación del tipo de interés influirá en su valoración.

En el caso de que se tuviese contratada una renta temporal constante por un importe anual de *C*, a favor de un beneficiario de edad *x* y a percibir al final de cada año y por *n* años, la duración esperada vendría dada como:

$$DE = \frac{1*C*_1P_x*V^1 + 2*C*_2P_x*V^2 + \ldots + n*C*_nP_x*V^n}{C*_1P_x*V^1 + C*_2P_x*V^2 + \ldots + C*_nP_x*V^n} = \frac{(Ia)_{x:n}}{a_{x:n}}$$

GRAFICO XII: VALOR DE UNA RENTA ACTUARIAL TEMPORAL



5. La duración esperada varía en forma inversa al tipo de interés. Esto es, que ante fluctuaciones al alza, la duración esperada disminuye y si se producen disminuciones en el tipo de interés, entonces el valor de la duración esperada se incrementa.

9.4.3. *Duración esperada del plan de pensiones.*

La duración esperada de una operación actuarial conjunta es la media aritmética de la duración esperada de cada operación individualmente tratada. De esta forma, sean LPM_1, LPM_2, . . . , LPM_s el flujo de pagos probables del año 1, 2, . . . , s, donde de forma agregada para cada año, incluyen los pagos probables de cada uno de los h partícipes del plan

$$LPM_1 = \sum_{j=1}^{h} LPM_1^j$$

.....

$$LPM_s = \sum_{j=1}^{h} LPM_s^j$$

La duración de los pagos previstos de un plan de pensiones viene expresada como:

$$DE_{LPM} = \frac{\sum_{t=1}^{s} t * LPM_t * (1+i)^{-t}}{V_{LPM}}$$

donde

LPM_t : Los pagos previstos del plan de pensiones, considerados como gasto en el año t-ésimo.

t: Momento t de valoración de los pagos que se producen en ese año. Así mismo es el factor de ponderación de éstos.

DE_{LPM} : Duración de los pagos previstos del plan de pensiones.

La duración de los pagos definidos en un plan de pensiones es una medida de la vida ponderada de estos pagos, indicándonos el plazo de liquidez medio exigido para hacer frente a los pagos probables a efectuar.

9.5. La convexidad esperada.

9.5.1. *Concepto.*

Para obtener una mayor exactitud de la variación que experimentan los pagos por prestaciones prometidas en el plan ante variaciones del tipo de interés, se considera un parámetro que nos indica la dispersión de aquel frente a éste. Es el término de convexidad esperada de las operaciones actuariales, sensiblemente diferente a su homónimo convexidad de un título. La convexidad esperada (CXE_{LPM}) viene dada como:

$$CXE_{LPM} = \frac{\sum_{t=1}^{s} t*(t+1)*LPM_t*(1+i)^{-t}}{V_{LPM}}$$

El parámetro convexidad esperada se utiliza para describir esta dispersión, siendo la derivada de segundo orden en la aproximación de

MacLaurin. De la descripción realizada hasta ahora se deduce que el efecto corrector de la convexidad sobre el valor de las obligaciones asumidas calculado a través de la duración esperada, es siempre positivo. Si el interés desciende, el aumento del valor de estos pagos es mayor que el estimado únicamente con la duración esperada. Si el interés aumenta, el descenso final es menor al estimado con la duración esperada.

9.5.2. *Características.*

Los dos factores más importantes que afectan a la convexidad esperada de una operación actuarial son su duración esperada y la dispersión existente en los flujos de pago.

a) *La Duración esperada.*

La convexidad aumenta con su duración. La anterior afirmación está relacionada con el hecho de que cuanto más dilatado es el plazo de pago, mayor es su curvatura, incrementándose la convexidad más que proporcionalmente a la duración.

Por tanto, al igual que la duración, la convexidad está positivamente relacionada con el plazo de vencimiento e inversamente relacionada con el tipo de interés y con el tipo de cupón.

b) *La dispersión de los flujos de pago*

Entre dos operaciones actuariales que tengan la misma duración esperada, la convexidad será mayor en aquel que tenga menos concentrados en el tiempo los pagos probables.

Por ejemplo, la convexidad esperada será mayor en una renta temporal que en un capital diferido. La razón es que para la misma duración, al incrementarse la dispersión, los flujos de pago más alejados en el tiempo acaparan cada vez mayor convexidad (la convexidad se incrementa más proporcionalmente que la duración).

9.5.3. *Convexidad de un plan de pensiones.*

La convexidad esperada de una operación actuarial conjunta es la media aritmética de la convexidad esperada de cada operación individualmente tratada. De esta forma, sean $LPM_1, LPM_2, \ldots, LPM_s$ el flujo de pagos probables del año 1, 2, . . . , s, donde de forma agregada para cada año, incluyen los pagos probables de cada uno de los h partícipes del plan

$$LPM_1 = \sum_{j=1}^{h} LPM_1^j$$

.....

$$LPM_s = \sum_{j=1}^{h} LPM_s^j$$

La convexidad de los pagos previstos de un plan de pensiones viene expresada como:

$$CX_{LPM} = \frac{\sum_{t=1}^{s} t*(t+1)*LPM_t*(1+i)^{-t}}{V_{LPM}}$$

La convexidad esperada de los pagos definidos en un plan de pensiones es una medida de la dispersión o variación de la vida ponderada de estos pagos, indicándonos la dispersión sobre el plazo de liquidez medio exigido para hacer frente a los pagos probables a efectuar.

10. LA ESTRUCTURA DEL TIPO DE INTERES.

El valor que toma el tipo de interés no es independiente del plazo al que nos estemos refiriendo. En la actualidad es patente los diferentes tipos de interés vigentes en operaciones a corto plazo (véase las letras del tesoro), a medio y a largo plazo. Cada vez que el Tesoro Público realiza una subasta de títulos del tesoro, éstos resultan a un tipo de interés diferente, influenciados por el tiempo a su reembolso entre otros factores como son:

- Las necesidades de liquidez del Banco de España.

- La situación económica española y europea marcan una tendencia en otros países y que, dentro de un mercado único, tiende a estabilizarse y a seguir una evolución a lo largo del tiempo homogénea.

- La situación económica mundial afecta a estos tipos de interés, habida cuenta de que las expectativas comerciales de los países industrializados más fuertes marcan la pauta de qué tipos de interés son capaces de mantener y abonar a distintos plazos.

- Las decisiones políticas afectan a la evolución de los mercados tanto financiero como económico, influyendo en el precio del dinero y , por tanto en la evolución del tipo de interés a lo largo del tiempo.

Los siguientes términos son utilizados bajo la denominación de tipos de interés en operaciones financieras, aunque su significado es netamente diferente [Meneu y otros (1.992)]:

i) Tipo de interés al contado (spot)
ii) Tipo de interés a plazo implícito (forward)
iii) Tanto interno de rentabilidad.

10.1. Tipo de interés al contado (spot).

Este tipo de interés es aquel tanto efectivo periódico que corresponde a un plazo de inversión [0, t], libre de riesgo de insolvencia y amortizable en el momento t-ésimo. Es de destacar que este tipo de interés al contado depende directamente del plazo en el que está vigente.

$$i_t = \left(\frac{P_t}{P_0} \right)^{1/t} - 1$$

donde,

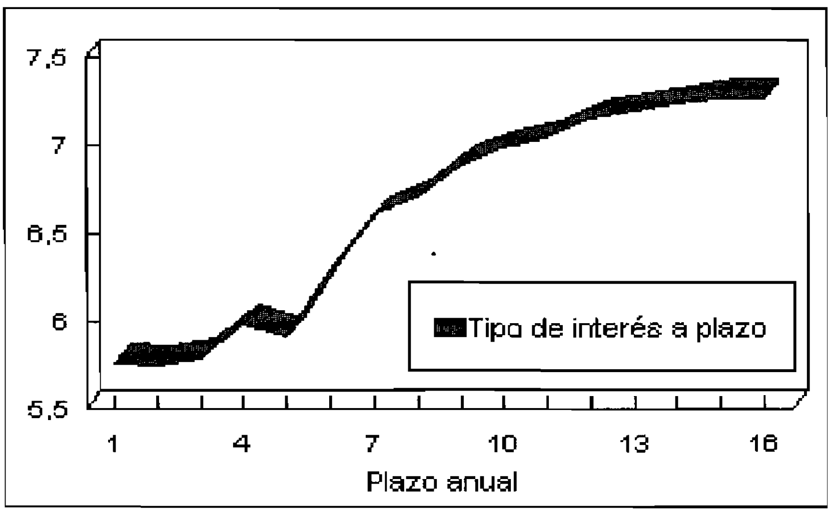
i_t : Tipo de interés periódico (anual) a un plazo de t años.

P_0 : Precio del título en el momento inicial.

P_t : Precio del título en el momento t-ésimo, momento de su venta.

Igualmente, si tenemos un conjunto de títulos solventes y con amortizaciones en diversos momentos de tiempo, podremos establecer una relación que determine el tipo de interés al contado para cada plazo establecido, a partir de los precios de compra y de amortización de los títulos.

GRAFICO XIII: TANTOS OBSERVADOS EN ABRIL DE 1.997



A esta estructura entre el valor del tipo de interés y el plazo al que corresponde es a lo que se denomina estructura temporal de los tipos de interés, de forma que :

- Si los tipos de interés para todos los plazos tienen igual valor, estamos ante una estructura plana.

- Si los tipos de interés para los plazos cortos son mayores que los tipos de interés para los plazos largos, entonces es una estructura decreciente.

- Si los tipos de interés para el corto plazo toman valores menores que para el largo plazo, entonces es una estructura creciente de los tipos de interés.

A la hora de establecer en un momento dado la estructura de los tipos de interés nos encontramos con el problema de la necesidad de gran variedad (en cuanto a plazo de amortización) de títulos con los que determinar el tipo de interés al contado, como títulos a valor descontado y títulos con cupón acumulado o cupón cero.

10.2. Tipo de interés a plazo implícito (forward).

Es aquel tanto de interés periódico correspondiente al año t-ésimo y que verifica:

$$(1 + i_{t+1})^{t+1} = (1 + i_t)^t * (1 + f_t)$$

siendo

i_{t+1} : el tipo de interés anual correspondiente al plazo [0, t+1].

i_t : el tipo de interés anual correspondiente al plazo [0, t].

f_t : el tipo de interés implícito del año t.

Es decir, es aquel tipo de interés correspondiente al año t-ésimo que aplicado al montante de una unidad monetaria valorada al tipo de interés a plazo t-ésimo produce igual valor que el que se obtendría con el montante de una unidad monetaria valorada al tipo de interés a plazo t+1-ésimo.

En un mundo perfecto, sin costes de transacción y sin perturbaciones políticas ni económicas, el tipo de interés implícito del año t-ésimo debiera corresponder al tipo de interés vigente en el año t para el plazo [t-1 , t].

Si conociésemos los tipos de interés implícitos anuales para cada uno de los años futuros, podemos determinar el valor del tipo de interés a plazo como producto de los factores de capitalización anuales de los tipos implícitos en cada año:

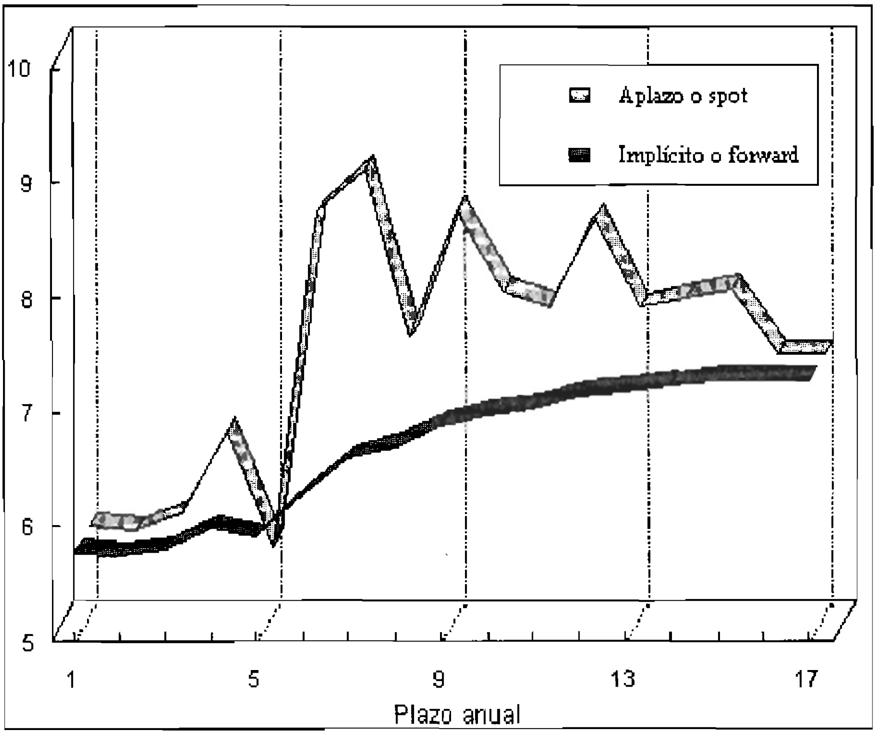
$$(1 + i_t)^t = (1 + f_1) * (1 + f_2) * \; \ldots \; * (1 + f_{t-1})$$

donde

$$i_t = \left[(1+f_1)*(1+f_2)* \ \ldots \ *(1+f_{t-1})\right]^{1/t} - 1$$

obteniendo el tipo de interés correspondiente al plazo [0 , t]

GRAFICO XIV: ESTRUCTURA DE LOS TIPOS DE INTERES



10.3. Tanto interno de rentabilidad.

El tanto interno de rentabilidad (TIR) es el tanto medio efectivo periódico (anual) que iguala el valor actual de la corriente de pagos de un título con el precio abonado por dicho título.

Para un bono cuyo precio actual es P, con abono periódico de cupones (C), amortizable dentro de t años a su valor nominal (N), el valor del tanto interno de rendimiento (y) se obtiene de la siguiente equivalencia financiera en el momento de la compra del título:

$$P = \sum_{j=1}^{t} \frac{C}{(1+y)^j} + \frac{N}{(1+y)^t}$$

Es de resaltar que el valor del tanto interno de rendimiento coincide con el tipo de interés al plazo [$0, t$] , cuando estamos con títulos de cupón acumulado o cupón cero o al descuento.

El tanto interno de rendimiento adolece, entre otros, de los siguientes problemas:

- Se está suponiendo que el título va a estar en posesión del inversor hasta su vencimiento, con lo que en caso de una venta anticipada, el tanto de rendimiento interno sería diferente.

- Con el cálculo expuesto del tanto de rendimiento se presupone que los flujos intermedios abonados por el título se reinvierten a un tipo de interés idéntico al valor del tanto de rendimiento.

Sin embargo, la rentabilidad real que se obtenga al final de la operación, seguramente será diferente a la inicialmente prevista, debido a alguno de estos problemas que plantea. Este problema no existe si utilizamos los tipos de interés al contado, los cuales nos indican la rentabilidad final que se obtendría de invertir en un título al descuento si dicho título es mantenido hasta su amortización.

De esta forma, se determinaría la siguiente equivalencia financiera en el origen de la operación, asumiendo que los tantos de reinversión de los flujos intermedios se realizan al tipo de interés implícito al plazo de cada año. Luego,

$$P = \frac{\sum_{j=1}^{t} C * \prod_{h=j}^{t} (1 + f_h) + N}{(1 + i_t)^t}$$

donde el tanto interno de rendimiento corresponde al tanto de interés a plazo i_t.

10.4. Tanto de interés implícito ajustado.

El tipo de interés implícito a plazo o forward del t-ésimo año representa aquel tipo de interés anual vigente para el periodo t-ésimo, describiéndose en el epígrafe 10.2. la forma de obtenerlo.

Este tipo de interés implícito a un plazo anual lo calculamos con los datos de mercado vigentes en un momento dado y en base a las observaciones realizadas. Sin embargo, cuando se alcance temporalmente tal periodo, el tipo de interés vigente en aquella fecha no tiene porqué coincidir con los datos pasados, habida cuenta de que el mercado habrá variado sus expectativas, si bien los datos que actualmente conocemos nos permitirán aproximarnos al tanto de interés implícito al plazo futuro. El problema existente para determinar estos tipos implícitos futuros incluye dos restricciones:

i) Los valores futuros deben ser cercanos a los valores actualmente observados. Sin embargo hemos de tener en cuenta la imperfección del mercado, donde los precios se facilitan en función de un valor teórico (100 unidades) y existen, como mucho tres decimales.

ii) La curva del interés implícito futuro no ha de tener discontinuidades.

El proceso para determinar los tantos de interés implícitos futuros es muy parecido al que se lleva a cabo para la construcción de tablas de mortalidad [Slaney, (1.994)], partiendo de datos observados en la realidad para una aplicación futura. De hecho, es deseable que una vez obtenidos esos tantos implícitos a partir de nuestras observaciones en el momento presente, procedamos a aplicar algún modelo actuarial de graduación.

En este caso es factible la aplicación de varios modelos de ajuste actuarial, si bien nos centraremos en el modelo de Whittaker-Henderson. Para ello procedemos a minimizar la siguiente función:

$$M = \sum_{j=1}^{100}(f_j - \overline{f_j})^2 + h * \sum_{j=1}^{100}(\Delta^z f_j)^2$$

siendo:

f_j: El tipo de interés implícito futuro del periodo j-ésimo.

$\overline{f_j}$: El tipo de interés implícito observado para el periodo j-ésimo.

Δf_j: La variación experimentada por los tipos de interés implícitos futuros para dos periodos consecutivos.

h : Grado de variabilidad permitido.

z : Grado de diferencia.

El primer término del segundo miembro de la función a minimizar representa una medida de ajuste sobre los datos realmente observados. El segundo término del segundo miembro, a su vez, representa una medida de variación permitida en los tantos de interés implícitos ajustados.

En nuestro caso hemos analizado la situación del mercado en deuda pública para abril de 1.997, obteniendo los tipos de interés a plazo, así como los tipos de interés implícitos observados.

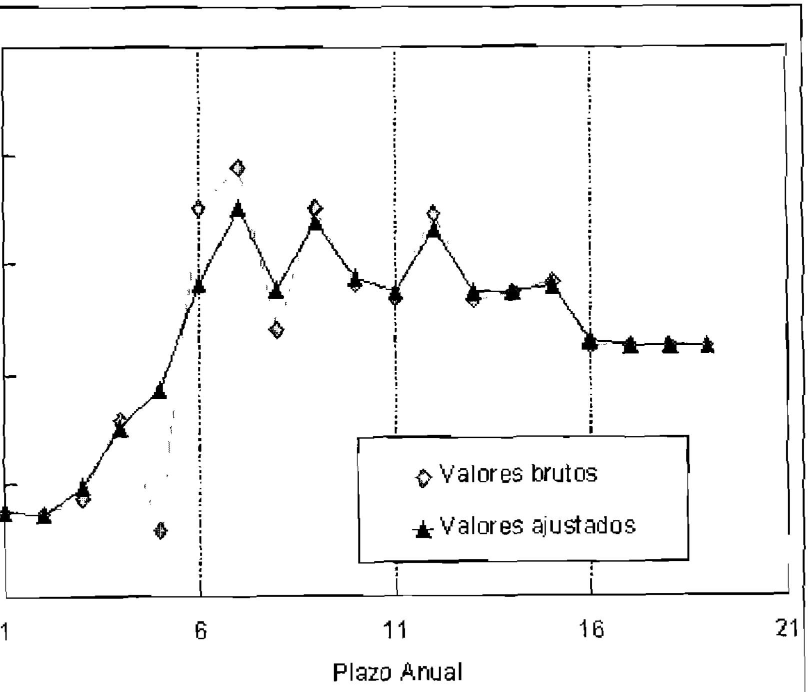
A través del modelo de Whittaker-Henderson para un grado de diferencia $z = 3$ y una permisibilidad de la variación de $h = 3$ obtenemos los siguientes resultados:

t	spot	forward	f. ajustado
1	5,765	5,765	5,765000151
2	5,751	5,737	5,738132366
3	5,797	5,890	5,972043985
4	5,989	6,598	6,530742654
5	5,909	5,598	6,877514004
6	6,288	8,519	7,834073825
7	6,613	8,891	8,52096084
8	6,710	7,425	7,787217229
9	6,894	8,533	8,400201787
10	6,983	7,831	7,876010198
11	7,046	7,704	7,77247597
12	7,156	8,470	8,339468654
13	7,196	7,687	7,762105309
14	7,235	7,769	7,768827122
15	7,275	7,851	7,814721353
16	7,275	7,275	7,313952902
17	7,275	7,275	7,274999989
18	7,275	7,275	7,275000057
19	7,275	7,275	7,27499992
20	7,275	7,275	7,274999997

Estos tantos implícitos futuros representan a aquellos tipos de interés empleados para la reinversión anual de los flujos económicos intermedios,

para el plan de pensiones (a través de los pagos futuros a realizar con
ıantías reconocidas actualmente), como para el fondo de pensiones
:sos futuros a percibir de las actuales inversiones) y para el caso de
xista algún exceso monetario en el periodo futuro t-ésimo.

GRAFICO XV: TIPOS DE INTERES A PLAZO BRUTOS Y AJUSTADOS



arecer de títulos con un vencimiento superior a 15 años, hemos
iderado que tanto el precio como los tipos de interés a plazo se
enían constante en ese último valor, con lo cual también realizamos
ıste a partir de esos vencimientos. Como es normal, los resultados

obtenidos son prácticamente los correspondientes al título con vencimiento en el año 15.

11. LA CARTERA DE INVERSIONES DEL FONDO DE PENSIONES.

11.1. Introducción

La inversión del patrimonio del fondo no se realiza exclusivamente en una sola clase de títulos sino en una amplia variedad. Esta variedad de títulos que compone el patrimonio del fondo, lo denominamos cartera de valores del fondo de pensiones.

Desde la década de los 60 se han desarrollado modelos cuantitativos para determinar la formación de carteras de títulos, basadas en los estudios desarrollados por Markowitz y posteriormente por Sharpe principalmente. Esta gestión activa de las carteras de títulos se complementó con análisis de sensibilidad del cambio del valor de la cartera ante variaciones de los intereses de mercado, así como buscando medidas para determinar la buena actuación de los modelos utilizados.

En la década de los 80, se rescató un viejo concepto financiero: La Inmunización. A pesar de que sus principios teóricos fueron realizados por Redington en 1.952, no se desarrolló hasta que se dieron una serie de circunstancias:

- Un mayor desarrollo científico de la teoría propuesta, contrastada prácticamente.

- Situación económica reinante con altos tipos de interés en el mercado, en comparación con los tipos de interés propuestos por los actuarios en sus hipótesis, para sus cálculos a medio y largo plazo.

- Expansión de los fondos de pensiones convirtiéndose en un intermediario financiero con gran peso en el mercado.

- Por otra parte, los modelos cuantitativos que tanta expansión y aceptación tuvieron en las décadas anteriores no obtuvieron éxitos tan brillantes como se esperaba de ellos.

Todo lo anterior produjo la necesidad de buscar soluciones a los problemas de siempre, que seguían sin resolverse:

> *Obtener la máxima rentabilidad posible en las inversiones, con el mínimo riesgo de pérdida de éstas para así poder hacer frente a los compromisos estipulados en los fondos.*

Estas estrategias tienen como objetivo el hacer frente a las necesidades propias del objeto garantizado. De esta forma se entiende que la razón de ser de un fondo de pensiones es satisfacer el pago de las pensiones prometidas en el plan y determinadas por el actuario. La estructura del pasivo del fondo de pensiones ha de quedar determinada por las relaciones financieras que se establezcan en torno a este objetivo primordial [Tarrazón & Montllor (1.993)]. Estas relaciones delimitan los derechos de los elementos personales del plan de pensiones (promotor, partícipes y beneficiarios) sobre el valor acumulado del fondo. Es, entonces, la propia naturaleza del plan de pensiones la que fija la estructura de su pasivo (el fondo de pensiones), delimitando unos requerimientos financieros específicos a cuyo cumplimiento debe orientarse la estrategia de inversión. Esta estrategia no puede concebirse sin tener en cuenta la naturaleza del plan de pensiones y por tanto, las inversiones del fondo de pensiones deben elegirse de forma que los resultados que proporcionen permitan cumplir los requerimientos que emanan del reglamento del plan de pensiones. Esta filosofía inversora ha sido denominada como Gestión de Activos y Pasivos (Asset-Liability Management) de fondos de pensiones.

11.2. Características

Para satisfacer las pensiones prometidas, el fondo ha de estar compuesto por un conjunto de inversiones que, por un lado, ofrezcan seguridad y, por otro, rentabilidad. La seguridad podría conseguirse invirtiendo exclusivamente en activos de renta fija. Sin embargo, en los planes de prestación definida se relaciona normalmente la prestación o la aportación según la evolución de algún parámetro salarial. Como los salarios suelen evolucionar según la inflación, los méritos y la productividad [Betzuen (1.988)],[Winklevoss (1.993)], es necesario que la rentabilidad de las inversiones de los fondos de pensiones sea, al menos, el incremento estimado para esa evolución salarial.

La rentabilidad de los títulos de renta fija en pocas ocasiones satisface este requisito, por lo que una parte del activo ha de invertirse en renta variable, con el riesgo consiguiente de obtener esos rendimientos. De hecho, los fondos de pensiones reparten sus inversiones fundamentalmente entre títulos financieros de renta fija, renta variable e inmuebles, por ser los activos que mejor se ciñen a sus necesidades. La estrategia de inversión que se utilice debe seleccionar la combinación de estos activos que mejor se adapte al cumplimiento de los objetivos de los planes de pensiones.

Las características que ha de cumplir el modelo de selección de inversiones de un fondo de pensiones correspondiente a un plan de prestación definida, aunque triviales, conviene remarcarlas:

i) La estrategia inversora del fondo ha de tener en cuenta la prestación económica a otorgar al partícipe cuando éste sea beneficiario, la cual queda delimitada en el plan de pensiones.

ii) Se ha de tener en cuenta las distintas contingencias que se puedan causar (fallecimiento, jubilación, invalidez, etc.) por lo que las probabilidades correspondientes delimitarán el ritmo de flujos de pagos probables que ha de hacer frente el fondo de pensiones.

iii) Se ha de contemplar una rentabilidad mínima a obtener para que, al menos, satisfaga en cuantía y tiempo las prestaciones prometidas. Esta mínima rentabilidad ha de representar las ganancias financieras a obtener a largo plazo. Los excesos de rentabilidad que se obtengan repercutirán en el otro lado del balance de la operación, esto es, en una mejora de las pensiones futuras a abonar o en una disminución de las futuras aportaciones a realizar.

iv) El cálculo de los flujos económicos a hacer frente en el fondo de pensiones ha de ser individualizado, al tener cada partícipe distintas características biométricas (edad, sexo, etc.) así como distintas características económicas (prestaciones, salarios, etc.).

v) Conocidas las obligaciones del plan, se necesitará conocer los flujos económicos que pueden generar los títulos en los que se proceda a invertir, por lo que será necesario realizar proyecciones de esos ingresos (cupones, dividendos, amortizaciones, etc.).

Con todo lo anterior podremos estimar la estructura probable de la cartera de inversiones del fondo de pensiones.

La estrategia inversora a seleccionar deberá depender por consiguiente de la prestación a abonar (*B*), de las probabilidades de causar una prestación (q_x^m para fallecimiento, q_x^i para invalidez, etc.), de la rentabilidad mínima a obtener (*r*), de parámetros salariales (*is*), de los flujos económicos a obtener de los títulos (*IF*) es decir,

$$g(B\,; q_x^m\,; q_x^i\,; r\,; is\,; IF\,)$$

12. ESTRATEGIAS INVERSORAS COHERENTES: PROS Y CONTRAS.

Las estrategias de carteras inmunizadas persiguen garantizar un objetivo mínimo con un mínimo de rentabilidad. Este objetivo mínimo es la meta principal de la estrategia y la cartera de títulos se diseña para garantizar principalmente ese fin, si bien puede contemplar otros secundarios.

Las estrategias inmunizadoras tratan de conseguir la neutralización del riesgo, por lo que se pueden denominar estrategias de protección. Es frecuente catalogar estas estrategias dentro de la renta fija, si bien su concepción es lo suficientemente amplia como para hacerse extensiva a la renta variable.

Las principales aplicaciones de esta cartera se encuentran actualmente en los fondos de pensiones, compañías de seguros y entidades bancarias [Christensen, Fabozzi & Lofaso (1.995)]. Concretamente, en los fondos de pensiones se pretende hacer frente a una serie de pagos determinados en un plan y puede llegar a producir un incremento del tipo de interés técnico del plan logrando reducir las aportaciones de los partícipes y/o promotor al fondo [Bader (1.985)].

12.1. Congruencia Absoluta.

En la literatura inglesa es denominada como Cash-flow Matching o Absolute Matching, aunque su traducción en castellano podría darse como congruencia absoluta o congruencia en los flujos económicos intermedios.

12.1.1. *Definición.*

Esta estrategia inversora consisten en la igualación en cuantía y tiempo de los pagos a realizar determinados en el plan de pensiones en el periodo t-ésimo con los ingresos a obtener en ese periodo t-ésimo provenientes del fondo de pensiones.

Implica que los cupones y amortizaciones de los títulos en los que se ha invertido generaran un flujo económico suficiente como para abonar los pagos probables de ese año.

$$LPM_t^j + LPM_t^m + LPM_t^i + LPM_t^r = n_1 * IF_1^t + n_2 * IF_2^t + \ \ldots \ + n_w * IF_w^t$$

12.1.2. *Resolución.*

Planteamos un modelo donde se considera un programa lineal de w variables y con $s+1$ restricciones. Nuestra función objetivo puede ser doble:

- Por una parte, dado el tamaño de la cartera de títulos (F_t), consistirá en encontrar aquella distribución de títulos para una rentabilidad dada [Christensen & Fabozzi (1.995)]

- Por otra parte, podemos buscar la estructura de títulos del fondo que resulte de un mínimo coste total de la cartera.

En ambos casos, debe seguir las siguientes restricciones:

i) Para cada periodo se obtengan los suficientes flujos de forma que se pueda hacer frente a todos y cada uno de los pagos a realizar, no sólo en cuantía sino también en tiempo:

$$
\begin{aligned}
n_1 * IF_1^1 + n_2 * IF_2^1 + \ \ldots \ + n_w * IF_w^1 &= LPM_1 \\
n_1 * IF_1^2 + n_2 * IF_2^2 + \ \ldots \ + n_w * IF_w^2 &= LPM_2 \\
\ldots\ldots\ldots \quad &. \\
n_1 * IF_1^s + n_2 * IF_2^s + \ \ldots \ + n_w * IF_w^s &= LPM_s
\end{aligned}
$$

siendo IF^t_j el flujo económico producido por el título j-ésimo en el periodo t-ésimo.

Nótese que en esta restricción no aparecen los precios de los títulos. Un fondo debe concentrarse únicamente en los flujos y aunque varíen los precios de los títulos a lo largo de los años, está garantizada la integridad del fondo siempre que los flujos sean completos y puntuales.

ii) No se pide ninguna cuantía a préstamo, haciendo frente a los pagos prometidos con el fondo acumulado, luego la proporción de cada título (j = 1, 2, ..., w) en la cartera será positiva o nula.

$$\forall\, n_j \geq 0$$

12.1.3. *Pros y Contras.*

i) Se deja la suficiente libertad como para que se especifique la lista de títulos candidatos en los que se puede invertir [Tilley (1.980)]. Esta lista se determinará en base a criterios cualitativos como una clasificación, protección y primando el concepto básico de diversificación en las inversiones de los títulos [Hoiska (1.980)].

ii) Adicionalmente, si se consigue que con los resultados obtenidos en un periodo se haga frente a los pagos prometidos en ese periodo, el riesgo de interés afectará a la corriente de pago y a la de ingresos en el mismo sentido, produciendo en todos los casos una congruencia absoluta, luego estaríamos ante una situación de inmunización total ante el riesgo de interés.

iii) Sería necesario la existencia de títulos que tuviesen unos vencimientos avanzados en el tiempo (títulos a 100 años como límite superior), habida cuenta de que con esos títulos estaríamos garantizando los pagos probables futuros de los beneficiarios más jóvenes del plan. Actualmente esto no es factible en la mayoría de los países, pero tal vez sería deseable que las instituciones públicas comenzasen a realizar esta serie de emisiones, donde se produciría un apoyo intergeneracional, no sólo a lo que respecta al cálculo actuarial, sino en lo que respecta al apoyo financiero entre generaciones.

iv) Puede ocurrir que la inversión en títulos que abonen periódicamente sus intereses produzcan un desequilibrio temporal en un momento t-ésimo:

$$n_1 * IF_1^t + n_2 * IF_2^t + \ \dots \ + n_w * IF_w^t \ > \ LPM_t$$

La razón de este desequilibrio puede estribar en que por ajustar el balance de la operación en un periodo posterior produzca en periodos anteriores excesos de ingresos, lo cual conllevaría a un efecto de exceso económico que tendríamos que reinvertir. En este caso se estaría expuesto al riesgo de interés. Para evitarlo, es deseable la existencia de títulos de cupón acumulado o títulos cupón cero a vencimientos variados y a largo plazo.

Con ello conseguiríamos una congruencia total con los pagos probables al invertir en títulos que generan un único abono compuesto por su nominal más todos los intereses generados hasta su reembolso. Estaríamos de nuevo ante una inmunización total ante el riesgo de interés.

12.2. Congruencia Positiva.

También es conocida con el nombre en inglés de Positive Matching o Duration Matching, pudiéndose traducir al castellano como Congruencia Positiva o Congruencia de Duraciones.

12.2.1. *Definición.*

Esta estrategia inversora consiste en igualar el plazo medio de los pagos probables futuros al plazo medio de los ingresos futuros del fondo de pensiones, a través del concepto de duración intentando buscar una distribución de títulos que permanezca inmune ante el riesgo de interés.

Siguiendo el teorema de Fisher y Weil [Fisher & Weil (1.971)], una variación del tipo de interés conllevaría a un nuevo tipo para la capitalización (i^*), es decir:

$$(1+i^*) = (1+i)*(1+e)$$

Si esta hipótesis es cierta, un conjunto de flujos económicos futuros generados por una cartera (de títulos o de compromisos) estará inmunizada en un momento determinado (el origen de la operación) si la duración de dichos flujos económicos en el origen es igual al horizonte de planificación del inversor (*H*).

Sea V_{IF} el valor financiero de los ingresos futuros por las inversiones arealizadas en nuestro fondo de pensiones valorados al tipo de interés *i*, donde su expresión resultante sería:

$$V_{IF} = \sum_{j=1}^{w} IF_j * V^j$$

El valor financiero de los flujos económicos valorados en el horizonte temporal del inversor, resulta:

$$V_{IF}^{H} = \sum_{j=1}^{w} IF_j * (1+i)^{-j} * (1+i)^{H}$$

Si el tipo de interés varía pasará a ser i^* y entonces,

$$V_{IF}^{H} = \sum_{j=1}^{w} IF_j * (1+i)^{-j} * (1+i)^{H} * (1+e)^{H-j}$$

Realizando la primera derivada respecto al incremento del tipo de interés *e*, ésta se anulará sólo si ese incremento toma el valor nulo, luego tenemos:

$$0 = \sum_{j=l}^{w} IF_j*(1+i)^{-j}*(1+i)^{H}*(H-j)$$

Operando y despejando, nos queda:

$$H = \frac{\sum_{j=l}^{w} j * IF_j*(1+i)^{-j}}{\sum_{j=l}^{w} IF_j*(1+i)^{-j}} = D_{IF}$$

Luego si la duración de los flujos económicos del fondo de pensiones es igual al horizonte de planificación del inversor, entonces el fondo de pensiones está inmunizado ante el riesgo de interés. Esta solución coincide con el segundo término del desarrollo en serie de MacLaurin, el cual nos define la duración.

Dicho horizonte de planificación puede ser determinado a través de los pagos probables futuros a realizar y determinados en el plan de pensiones.

Sea V_{LPM} el valor financiero de los compromisos de pago a realizar, valorados al tipo de interés *i*, donde su expresión resultante sería:

$$V_{LPM} = \sum_{j=1}^{w} LPM_j * (1+i)^{-j}$$

El valor financiero de los compromisos de pago valorados en el horizonte temporal del inversor, resulta:

$$V_{LPM}^{H} = \sum_{j=1}^{w} LPM_j * (1+i)^{-j} * (1+i)^{H}$$

Si el tipo de interés varía pasará a ser i^* y entonces,

$$V_{LPM}^{H} = \sum_{j=1}^{w} LPM_j * (1+i)^{-j} * (1+i)^{H} * (1+e)^{H-j}$$

Realizando la primera derivada respecto al incremento del tipo de interés (e), ésta se anulará sólo si ese incremento toma el valor nulo, es decir resulta un incremento infinitesimal:

$$0 = \sum_{j=1}^{w} LPM_j * (1+i)^{-j} * (1+i)^{H} * (H-j)$$

Operando y despejando, nos resulta el valor que debe tomar el horizonte de planificación del inversor, el cual no es fijo, sino que es determinado por el valor de los pagos probables a abonar para cada integrante del plan de pensiones:

$$H = \frac{\sum_{j=1}^{w} j * LPM_j * (1+i)^{-j}}{\sum_{j=1}^{w} LPM_j * (1+i)^{-j}} = DE_{LPM}$$

Este horizonte temporal, depende de la prestación a abonar, de las causas de salida del colectivo del partícipe, de los incrementos salariales, esto es, depende de los mismos factores que los modelos de distribución de coste de los planes de pensiones.

Luego si el horizonte temporal del inversor para la corriente de pagos del plan coincide con el horizonte temporal del inversor para la corriente de ingresos del fondo, podremos decir que el riesgo de interés no afecta a los pagos probables a abonar en el futuro. El plan y fondo de pensiones está inmunizado. Esto es, que la duración del fondo quede igualada a la duración esperada del plan.

12.2.2. *Resolución*

Con idéntico objetivo al anteriormente apuntado, nuestra función a optimizar sería aquella cartera con menor coste total (P_j es el precio del título j-ésimo):

$$Min\,(\; P_1 * n_1 \;+\; P_2 * n_2 + \;\dots\; + \; P_w * n_w \;)$$

Como variación a este modelo [Elton & Gruber (1.991)], [Rama Kocherlakota y otros (1.988)], se puede establecer otra función objetivo. La diferencia con el modelo anterior, reside en considerar en la función objetivo el valor actual de la cartera de títulos (V_{IF}) respecto al valor actual de cada título (V_0^j), en la proporción en la que se invierte dentro de la cartera y valorado al tipo de interés de mercado:

$$Min\,(V_{IF} \;=\; V_0^1 * n_1 + V_0^2 * n_2 + \;\dots\; + V_0^w * n_w\,)$$

En ambos casos debemos incluir como restricción que el plazo medio de los pagos previstos en el plan sea el mismo que el plazo medio de los ingresos a obtener previstos en el fondo de pensiones, a través del concepto básico en la teoría de la inmunización financiera, para evitar el riesgo de las variaciones del tipo de interés: La Duración.

Esta restricción vendría formulada como:

i) La duración de los pagos del plan de pensiones (D_{LPM}) ha de ser igual a la duración de la cartera de títulos en los que se ha de invertir.

$$D_{LPM} \;=\; D_1 \,*\, n_1 \,+\, D_2 \,*\, n_2 \,+\, \dots \,+\, D_w \,*\, n_w$$

donde D_j es la duración del título j-ésimo.

ii) No se pide ninguna cuantía a préstamo, luego la proporción de cada título en la cartera será positiva o nula:

$$\forall\, n_j \geq 0$$

12.2.3. *Pros y Contras.*

i) Esta estrategia no es tan restrictiva como la anterior, permitiéndonos proceder a invertir en títulos con abono periódico de intereses, aunque también es deseable la existencia de títulos de cupón cero, para una mejor congruencia a largo plazo.

ii) Habida cuenta de que la duración esperada de los pagos del plan alcanza normalmente valores temporales superiores a los 20 e incluso los 25 años, es deseable la existencia de títulos con vencimientos a plazos superiores a esa duración esperada. En la práctica se puede proceder a invertir en acciones y títulos de renta variable con suficiente solidez que permitan mantenerlos en cartera hasta una fecha lejana, sin la existencia de grandes variaciones en su valor nominal.

iii) La resolución del programa lineal va a plantear múltiples soluciones, algunas de ellas inviables financieramente, como puede ser el caso de la no inversión en títulos a corto y medio plazo, resultando balances anuales negativos. Siempre es posible incluir restricciones adicionales sobre cuantías máximas o mínimas a invertir en clases de títulos, así como en los saldos anuales entre ingresos y pagos. Sin embargo, si tenemos dos carteras de títulos con igual duración no implica que tengan igual comportamiento ante el riesgo de interés.

iv) Cuando el riesgo de interés es debido a variaciones altas en el tipo de interés, es necesario la incorporación de otro parámetro que nos indique el comportamiento de nuestra cartera de títulos ante esas variaciones. Ese parámetro viene medido a través del tercer término del desarrollo de MacLaurin: La Convexidad.

Si dos carteras de títulos tienen igual duración, ante una variación sustanciosa en el tipo de interés preferiremos aquella cuya convexidad sea menor.

El modelo descrito anteriormente es válido para pequeñas variaciones en el tipo de interés, pero a largo plazo las variaciones del tipo de interés del mercado pueden ser mayores y se ha de incorporar una restricción adicional que consistiría en que la variación afecte siempre positivamente a la cartera de títulos, de forma que se obtengan los suficientes recursos como para hacer frente a los pagos del plan, en cantidad y tiempo. En lo referente a los pagos e ingresos probables buscaremos que una variación del tipo de interés afecte de igual forma a la corriente de pagos probables y a la corriente de ingresos o que afecte en mayor medida a los pagos probables que a los ingresos. Esto es, que ante incrementos en el tipo de interés, el valor de los pagos probables sea menor que el de los ingresos probables. Si el tipo de interés desciende, el valor de los pagos probables se incrementa menos que el valor de los ingresos probables.

La restricción adicional quedaría:

$$CX_{IF} = \frac{\sum_{j=1}^{w} j*(j+1)*IF_j*(1+i)^{-j}}{\sum_{j=1}^{w} IF_j*(1+i)^{-j}} \geq \frac{\sum_{j=1}^{w} j*(j+1)*LPM_j*(1+i)^{-j}}{\sum_{j=1}^{w} LPM_j*(1+i)^{-j}} = CXE_{LPM}$$

Donde la convexidad de la cartera de títulos viene dada como la suma de las convexidades de los títulos que integran en fondo en función de su proporción en el mismo:

$$CX_1 * n_1 + CX_2 * n_2 + ... + CX_w * n_w \geq CXE_{LPM}$$

siendo CX_j la convexidad del título j-ésimo.

v) A medida que el tiempo avanza, tanto la duración como la convexidad cambian, lo cual implica que la cartera de títulos del fondo de pensiones debe ser revisada a intervalos periódicos con el fin de realinear tanto la duración como la convexidad. A este proceso se le denomina tendencia de la duración (Duration Drift). Aunque el tipo de interés no varíe y sea acorde a nuestras expectativas, la duración varía a medida que el tiempo avanza [Toevs, (1.986)].

Para conseguir una continua protección ante el riesgo de interés se requiere una reestructuración periódica.

vi) La utilización de la duración no convierte, como expresan algunos autores, a la estrategia inversora en una estrategia pasiva. Esta impresión no es correcta, ya que la duración queda determinada en función del tipo de interés reinante en el mercado. Los cambios que se produzcan tanto en un los ingresos de un título como en los pagos del plan pueden modificar el equilibrio inicial, al igual que lo hace la variación del tipo de interés de mercado. Es necesario, por tanto, una reestructuración periódica, lo que supone que nos encontramos ante una estrategia inversora de equilibrio activa [Elton & Gruber (1.991)]. Esta condición es vital para la exitosa implantación de esta estrategia inmunizadora [Sherris, (1.993)].

Los resultados obtenidos en un momento determinado pueden ser proyectados para buscar una situación dinámica, para buscar y simular las variaciones que puede experimentar nuestra cartera de inversiones ante el riesgo de interés y así buscar una inmunización óptima a través de la duración [Bierwag, (1.977)].

12.3. Congruencia Temporal.

Estrategia inversora híbrida entre las dos estrategias anteriores, es denominada en inglés como Horizon Matching.

12.3.1. *Definición.*

Mezcla de las dos estrategias anteriores, consiste en determinar un horizonte temporal en el que se realiza una congruencia absoluta (t años) y adicionalmente proceder a la igualación de la duración de los ingresos del fondo con la duración esperada de los pagos probables del plan, para de este modo obtener una congruencia a mayor plazo.

12.3.2. *Resolución.*

La función a optimizar corresponde a aquella distribución de títulos que implique el menor coste total (P_j es el precio del título j-ésimo):

$$Min\,(\; P_1 * n_1 \;+\; P_2 * n_2 + \;\dots\; + \; P_w * n_w \;)$$

O bien utilizando la variación anterior, la función objetivo resultaría de determinar el menor valor actual de la cartera de títulos (V_{IF}) respecto al valor actual de cada título (V_0^j), en la proporción en la que se invierte dentro de la cartera y valorado al tipo de interés de mercado:

$$Min\,(V_{IF} = V_0^1 * n_1 + V_0^2 * n_2 + \ldots + V_0^w * n_w)$$

En todos los casos, debemos incluir las siguientes restricciones:

i) Para los primeros t periodos, se deben obtener los suficientes flujos de forma que se pueda hacer frente a todos y cada uno de los pagos a realizar, en cuantía y tiempo:

$$n_1 * IF_1^1 + n_2 * IF_2^1 + \ldots + n_w * IF_w^1 = LPM_1$$
$$n_1 * IF_1^2 + n_2 * IF_2^2 + \ldots + n_w * IF_w^2 = LPM_2$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$n_1 * IF_1^t + n_2 * IF_2^t + \ldots + n_w * IF_w^t = LPM_t$$

siendo IF^h_j el flujo económico producido por el título j-ésimo en el periodo h-ésimo.

ii) Adicionalmente, el plazo medio de los pagos previstos en el plan ha de ser el mismo que el plazo medio de los ingresos a obtener previstos en el fondo de pensiones, con lo cual procedemos a igualar las duraciones de ambas corrientes de flujos para evitar el riesgo de las variaciones del tipo de interés.

$$D_{LPM} = D_1 * n_1 + D_2 * n_2 + \ldots + D_w * n_w$$

iii)No se pide ninguna cuantía a préstamo, haciendo frente a los pagos prometidos con el fondo acumulado, luego la proporción de cada título (j = 1, 2, ..., w) en la cartera será positiva o nula.

$$\forall\, n_j \geq 0$$

12.3.3. *Pros y Contras.*

i) Tal vez sea esta la estrategia inversora más real de las tratadas, al buscar una solvencia a corto y medio plazo, en el sentido que busca poder abonar puntualmente las prestaciones que se puedan causar durante los t primeros años. En este primer periodo, el riesgo de interés no afectará a los compromisos estipulados en el plan, pues se tienen garantizados los importes económicos que van a hacer frente a esos pagos. En un segundo plazo, se busca una congruencia a mayor plazo a través de la duración, lo que permite una estructuración media de la cartera de inversiones acorde con las obligaciones medias asumidas en el plan.

ii) Al igual que la estrategia anterior, nos permite invertir en títulos con abono periódico de intereses, aunque también es deseable la existencia de títulos de cupón cero, para una mejor congruencia a largo plazo. Sin embargo, la inexistencia de valores de renta fija con vencimientos a plazos superiores a la duración esperada, nos puede obligar a invertir en acciones y títulos de renta variable con suficiente solidez que permitan mantenerlos en cartera hasta una fecha lejana, sin la existencia de grandes variaciones en su valor nominal.

iii) La resolución del programa lineal va a plantear múltiples soluciones. Las preferencias de la entidad gestora del fondo, así como de los partícipes pueden incorporar restricciones adicionales que permitan seleccionar de entre las soluciones posibles aquella que resulte más atractiva cualitativamente.

iv) El modelo descrito anteriormente es válido para pequeñas variaciones en el tipo de interés, pero a largo plazo las variaciones del tipo de interés del mercado pueden ser mayores y se ha de incorporar una restricción adicional que consistiría en que la variación afecte siempre positivamente a la cartera de títulos, de forma que se obtengan los suficientes recursos como para hacer frente a los pagos del plan, en cantidad y tiempo. Incluiremos la restricción a través del parámetro de la convexidad .

$$CX_1 * n_1 + CX_2 * n_2 + \ldots + CX_w * n_w \geq CXE_{LPM}$$

siendo CX_j la convexidad del título j-ésimo.

v) Al igual que la estrategia precedente, a medida que el tiempo avanza, tanto la duración como la convexidad cambian, lo cual implica que la cartera de títulos del fondo de pensiones debe ser revisada a intervalos periódicos con el fin de realinear tanto la duración como la convexidad. Podemos realizar simulaciones del riesgo de interés hacia el futuro para prever las variaciones que experimenten tanto los pagos probables como los ingresos del fondo. Esta labor de previsión es la que siempre ha caracterizado al actuario.

13. CONCLUSIONES

i) En tanto los planes de pensiones y los seguros de vida, en general, definen derechos económicos a percibir por los partícipes y/o beneficiarios en caso de producirse alguna de las contingencias contempladas en el plan o en la póliza, el fondo de pensiones debería estructurarse siguiendo la premisa de hacer frente a los pagos para cuando probablemente puedan acontecer. Este es un hecho diferenciador con cualquier otro producto financiero y en la medida que se siga esta máxima se logrará una coherencia con el plan y fondo administrado.

Proceder a invertir de acuerdo con otro objetivo puede producir, ante el hecho de una contingencia determinada, minusvalías que pongan en peligro la solvencia del fondo.

ii) El riesgo de interés no es el único que afecta a los seguros y los planes de pensiones. Tan importante es la volatilidad del aspecto financiero como las variaciones que puedan experimentar las consideraciones actuariales como la mortalidad, invalidez, rotación, etc. El actuario ha prestado atención durante muchos años al riesgo propiamente actuarial, sin embargo también hay que referirse a este riesgo financiero no menos importante.

Adicionalmente, existen otros campos dentro de la previsión donde todavía es necesario un trabajo por parte del actuario, como es en los aspectos salariales, la inflación, etc. al ser parámetros que influyen notablemente en la valoración de los compromisos por pensiones y que tal vez, estén poco estudiados.

iii)El estudio de un plan de pensiones no se debe limitar a determinar aquellos parámetros que forman la base técnica del plan de pensiones y a determinar el método de coste para el plan. Debe ir más lejos. Debe determinar los compromisos futuros que adquiere con el negocio obtenido, determinando de igual modo esa estructura de pagos. Debe formar parte de la gestión y de la inversión financiera para que, tras analizar los títulos existentes en el mercado, logre una estructura de ingresos futuros que pueda hacer frente a esos pagos determinados.

Adicionalmente, el seguimiento, control y adaptación de los resultados es una labor que también debe ser realizada por el actuario, en vista de las desviaciones o el nuevo negocio realizado.

iv) Existen tres condiciones necesarias para conseguir una inmunización satisfactoria [Shimpi, (1.991)]:

$$\text{Valor Actual}_{IF} = \text{Valor Actual}_{LPM}$$
$$\text{Duración}_{IF} = \text{Duración } E_{LPM}$$
$$\text{Convexidad}_{IF} \geq \text{Convexidad } E_{LPM}$$

Como se ha visto anteriormente, una caída en los tipos de interés produce un incremento mayor en los valores y flujos económicos del fondo de pensiones que en el valor de los pagos a realizar y a su vez, un incremento en los tantos de interés resulta en una bajada en el valor de los títulos del fondo en una cuantía menor que el descenso de valor de los pagos a realizar.

La inmunización requiere que la duración media de los títulos y pagos sean iguales en cualquier momento. Desafortunadamente, una congruencia sólo de las duraciones no es una condición suficiente. Se necesita otra condición para una inmunización eficiente. Esta es que el valor de mercado de los títulos ha de ser igual o mayor al valor actual de los pagos. Se debe adicionalmente incorporar una tercera condición para controlar el grado de dispersión. Esta puede ser la medida de la Convexidad.

Por otra parte, se necesita que las condiciones de Duración y Convexidad se mantengan a través del tiempo. Al ser magnitudes que hacen referencia a momentos de tiempo, a medida que pasan los periodos el valor de la duración y la convexidad cambiará, incluso si no existe una variación del tipo de interés. La única forma de mantener las condiciones de inmunización es procediendo a realizar continuos ajustes en la composición del fondo. Esto es impracticable desde un punto de vista práctico. Como solución existe la política de implantar revisiones periódicas (cada 3 ó 6 meses) en busca de los objetivos de la inmunización.

v) Una condición suficiente para la existencia del equilibrio financiero en un plan y en un fondo de pensiones consiste en que, en caso de una alteración del tipo de interés de mercado, tanto los flujos de ingresos como de pagos se muevan en igual dirección y cuantía. La condición suficiente es que simultáneamente [Devolder, (1.993)]:

a) Tanto el valor actual de los ingresos de los títulos de la cartera, como el valor actual de los pagos a realizar en el plan han de ser iguales, luego como primera condición para buscar un equilibrio entre el plan y el fondo, tendremos que ambos valores iniciales sean coincidentes:

$$V_{IF} = V_{LPM}$$

La estrategia más obvia consiste en igualar los flujos generados por el fondo con las necesidades requeridas en el plan. Pero esta estrategia aunque viable, es muy restrictiva (*Cash-flow matching*).

b) Cualquier alteración mínima del tipo de interés de mercado puede producir una desviación en este resultado. Como segundo paso, igualamos la duración de una cartera de títulos con la duración de la corriente de pagos del plan, y se puede minimizar su exposición a las influencias que acarrea una variación del tipo de interés.

$$D_{IF} = DE_{LPM}$$

Esta alternativa, más flexible, consiste en igualar la duración de los flujos de ingresos con los de los pagos a través de la duración.

c) Además, si igualamos la convexidad de una cartera de títulos con la convexidad de la corriente de pagos del plan, se pueden minimizar todavía más las influencias que acarrea una variación superior del tipo de interés. Este sería el tercer paso:

$$CX_{IF} = CXE_{LPM}$$

Demostración:

Denotemos por s_t la diferencia en el año t-ésimo entre los flujos de ingresos de ese año y los flujos de pago de ese periodo:

$$s_t = IF_t - LPM_t$$

Definimos así mismo el excedente o superávit actualizado (S) al tanto de interés de mercado (i), como el valor actual de los superávits periódicos obtenidos en cada periodo:

$$S(i) = \sum_{j=1}^{s} s_j * (1+i)^{-j}$$

Al existir una variación en el tipo de interés, puede ocurrir que este excedente o superávit se vea trastocado y que incluso pueda ser negativo, lo que implicaría que no se abonan las prestaciones fijadas en el plan de pensiones. Nosotros vamos a exigir que, cualquier variación en el tipo de interés, afecte positivamente a este excedente o, a lo sumo, sea nulo (igualdad entre ingresos y pagos):

$$S(i+e) \geq S(i)$$

Mediante un desarrollo de Taylor, tenemos:

$$S(i+e) = S(i) + e * S'(i) + e^2 * \frac{S''(i+k)}{2}$$

Donde

$$|k| \in [0, e]$$

Si la variación del interés (e) es suficientemente pequeña, entonces $S''(i+k)/2$ es mayor o igual a cero y como resultado tenemos que:

$$S'(i) = 0 \qquad y \qquad S''(i) \geq 0$$

Cumpliéndose las condiciones *b)* y *c)*, donde vamos a obtener que cualquier variación en el tipo de interés afecta positivamente al equilibrio de ingresos-pagos de un plan y fondo de pensiones.

Aquella cartera de títulos que posea la misma duración y la misma convexidad que la cartera de pagos previstos en el plan, produce una mayor congruencia en los plazos de esos pagos, en tiempo y cantidad, que si únicamente utilizamos la duración (*Positive Matching*).

A través de este proceso, la corriente de ingresos generados por la cartera de títulos del fondo no depende de los valores futuros que pueda tomar el tanto de interés en la valoración de esos flujos, pudiendo hacer frente a los pagos definidos en cada periodo por el plan, sin necesidad de proceder a ventas anticipadas que produzcan minusvalías o pérdidas que afecten el equilibrio financiero del plan y del fondo.

vi) El modelo inversor coherente y adecuado debe permitir que:

1.- Los fondos puedan ser optimizados sin excedentes a largo plazo.

2.- Se pueda revisar periódicamente la composición de la cartera de títulos. A medida que el tiempo pasa, la cartera debe ser rebalanceada para asegurar que no van a existir efectos de desviaciones no deseados.

3.- Incorpore la probabilidad de insolvencia o ruina del fondo, esto es, que no pueda hacer frente a las obligaciones estipuladas en el plan de pensiones, entendido como una cuantía adicional a tener en cuenta siendo una mayor garantía para hacer frente a las prestaciones.

$$IF_t = (1 + \%_{MS}) * LPM_t$$

donde el porcentaje del margen de solvencia ($\%_{MS}$):

$$\%_{MS} = \frac{IF_t}{LPM_t} = \frac{IF_t - LPM_t}{LPM_t} = \frac{S_t}{LPM_t}$$

vii)Dentro de la dinámica conducente a determinar la estructura óptima de inversiones del fondo de pensiones y que influye en la solvencia ante los compromisos estipulados en el plan, existen campos para trabajos adicionales, como son el del estudio de los tipo de interés implícitos a un plazo (*forward*), así como su ajuste hacia el futuro. Para ello sería necesario un análisis de la tendencia que estos tipos de interés en los últimos años, para poder predecir con mayor exactitud los valores que pueden tomar en el futuro.

14. APLICACION AL CASO DE JUBILACION.

Con el fin de ilustrar todo lo anterior, procedemos en el siguiente epígrafe a desarrollar las estrategias propuestas a un colectivo de 2.778 personas, cuyas características biométricas medias son las siguientes:

Edad media:	39,25 años	Desviación:	8,48 años
Moda:	38 años	C. Pearson:	22,78
Hombres:	1.509	Mujeres:	1.269

Sus características económicas más relevantes son:

Salario Medio Total :	576.644.428 Ptas/mes.
Salario medio por partícipe:	207.575 Ptas/mes.
Antigüedad media:	10,034 años.

En base al método actuarial de coste de prestaciones proyectadas donde la cuota es definida como un porcentaje constante del salario de cada partícipe, obtenemos el importe económico de la provisión ıatemática para jubilación para todo este colectivo. Esta provisión lcanza un valor de:

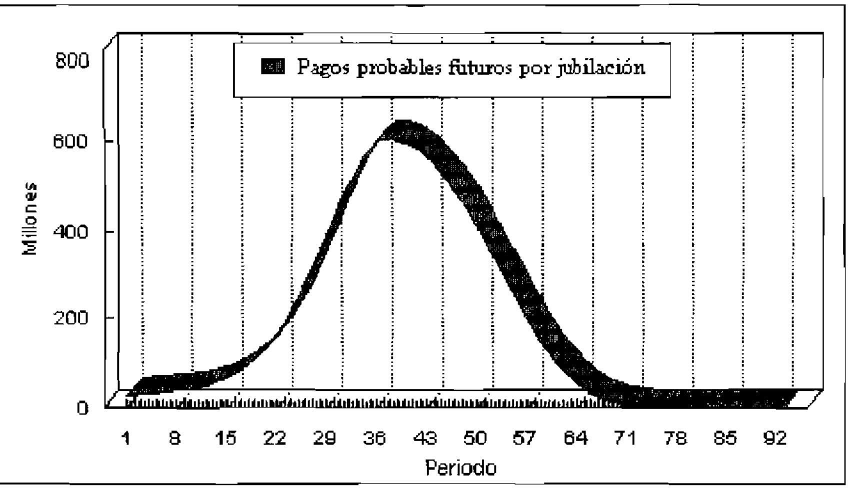
$$PM = 3.552.805.402 \text{ Ptas.}$$

iendo el valor actuarial de las prestaciones totales de jubilación rometidas,

$$(Va) = 14.544.267.374 \text{ Ptas.}$$

os pagos probables a realizar para la prestación de jubilación y para os próximos años (hasta la extinción del colectivo cerrado), en base a ı prestación acumulada de cada partícipe hasta la edad actualmente lcanzada, viene representado en el gráfico XVI. Se puede apreciar ue al ser un colectivo relativamente joven, el grueso de los pagos robables se realizará a partir de 30 años.

GRAFICO XVI: ESTRUCTURA DE LOS PAGOS PROBABLES POR JUBILACION



El objetivo que perseguimos es el de poder encontrar una cartera de títulos que nos permita hacer frente a esos pagos.

14.1. Congruencia absoluta.

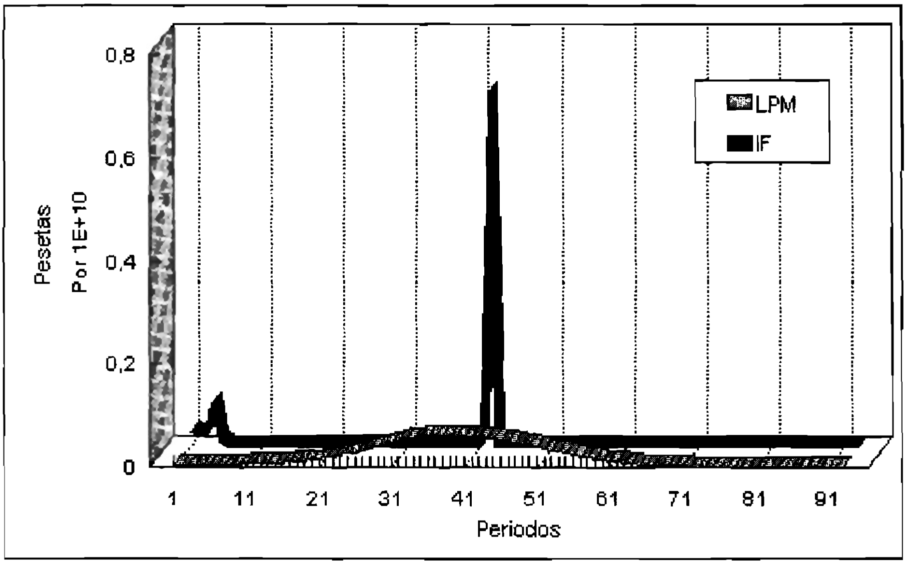
Utilizando una estrategia inversora que busque la congruencia de los flujos intermedios si utilizamos títulos con abono periódico de intereses y amortización en su fecha de vencimiento, nos encontramos con el problema expuesto en el epígrafe 12.1.3. iv), donde los intereses y amortizaciones de los títulos invertidos a largo plazo producen un montante de ingresos en el año t-ésimo superior a los pagos probables a realizar para ese periodo. Este problema también nos lo encontramos en las otras dos estrategias, por lo que consideramos títulos de 100.000 Ptas. nominales a su valor de mercado con reembolso conjunto de nominal más intereses (títulos de cupón acumulado o cupón cero). Con ello conseguimos para este caso, una estructura de flujos económicos futuros idénticos a la apuntada en el gráfico XVI, con un fondo empleado de:

$$F' = 1.287.725.023 \text{ Ptas.}$$

14.2. Congruencia positiva.

A través de la congruencia positiva conseguimos una estructura de títulos que nos permiten, entre otros, igualar las duraciones de ingresos y gastos probables, obteniendo un saldo final a la extinción del colectivo igual a cero.

GRAFICO XVII: ESTRUCTURA DE INGRESOS CON CONGRUENCIA POSITIVA



El valor del fondo dedicado a producir tales ingresos asciende a:

$$F' = 1.481.703.092 \text{ Ptas.}$$

Podemos apreciar que existen cuantías económicas no dedicadas directamente al abono de las prestaciones, por lo que para esa diferencia (F'')

$$F'' = PM - F'$$

es posible utilizar técnicas de gestión activa, las cuales, asumiendo riesgo de pérdida de capital, también nos permiten obtener mayores rentabilidades.

Con los excesos económicos obtenidos en los años futuros, pueden otorgarse prestaciones adicionales (premio a la jubilación) o incrementar las prestaciones en curso o regularizar el plan de aportaciones con un menor importe de éstas.

Igualmente, es deseable dotar cuantías económicas o provisiones de estabilización con el fin de prever malos resultados en nuestras inversiones y evitar ajustes no previstos.

14.3. Congruencia temporal.

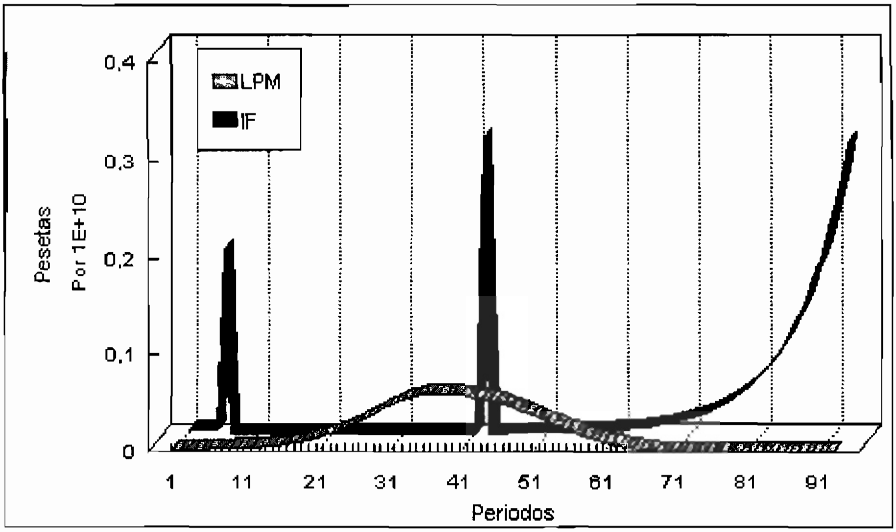
Tal vez sea éste el caso más real de todos los anteriores, al permitirnos una congruencia total en los cinco primeros años, evitando desviaciones de liquidez.

Para conseguir una mayor distribución a largo plazo, también se ha procedido a igualar la duración esperada del plan con la duración del fondo, destinando a este fin un importe de:

$$F' = 1.558.554.946 \text{ Ptas.}$$

Al igual que en el caso anterior, existen excedentes económicos que pueden ser invertidos para vía provisiones (mejora de la solvencia del plan) y/o para regularizarlo (incremento de prestaciones o reducción de aportaciones).

GRAFICO XVIII: ESTRUCTURA DE INGRESOS CON CONGRUENCIA TEMPORAL



Podemos igualmente afirmar que los valores del fondo dedicado a cubrir la provisión matemática es debido a las altas rentabilidades que, actualmente, ofrecen los títulos del Tesoro Público que se hallan en circulación.

Es de esperar que las nuevas emisiones que se realicen en el futuro confirmen la tendencia a la baja. No obstante, cuanto mejor posicionado se encuentre el fondo de pensiones, menores modificaciones deberá realizar en su estructura financiera. Unicamente las necesarias para readaptar los cálculos ante:

- Nuevas variaciones no previstas en los tipos de interés.

- Nuevo negocio realizado.

- Desviaciones en las hipótesis técnicas utilizadas por el actuario.

En todos los casos, es necesaria la participación del actuario con el fin de lograr la solvencia de los planes y fondos de pensiones ante el riesgo de interés.

15. ANEXO

En este epígrafe se presentan esquemáticamente los resultados obtenidos al aplicar las estrategias inversoras sobre el colectivo apuntado.

En el primer cuadro incluimos las principales características de los títulos del Tesoro empleados para buscar la congruencia con los pagos probables futuros, todos ellos de cupón acumulado o cupón cero. Hay que hacer notar que a partir de la última emisión, se ha considerado títulos de iguales características que los últimos, pero con vencimientos a plazos mayores.

CUADRO I: TITULOS DEL TESORO. ABRIL DE 1.997

t	Valor Mercado	Interés	Nominal
1	107,300	7,300	100.000
2	108,300	8,300	100.000
3	109,400	9,400	100.000
4	112,250	12,250	100.000
5	106,750	6,750	100.000
6	107,900	7,900	100.000
7	110,500	10,500	100.000
8	108,000	8,000	100.000
9	110,000	10,000	100.000
10	108,800	8,800	100.000
11	107,350	7,350	100.000
12	108,200	8,200	100.000
13	108,367	8,370	100.000
14	108,533	8,530	100.000
15	108,700	8,700	100.000
16	108,700	8,700	100.000

En los siguientes cuadros, se representan los resultados de los flujos periódicos obtenidos en el fondo de pensiones, en base a las distintas estrategias apuntadas, así como el balance anual correspondiente.

Recordamos que los excesos anuales de capital, así como los déficits correspondientes son capitalizados hasta el siguiente ejercicio al tipo de interés a ese plazo ajustado correspondiente, con el fin de buscar un saldo final de la operación que sea nulo.

CUADRO II : RESULTADOS DE CONGRUENCIA ABSOLUTA

t	LPM	IF	IF-LPM	COSTE
1	28.485.701	28.485.701	0	28.485.701
2	30.017.346	30.017.346	0	27.716.848
3	31.474.705	31.474.705	0	26.298.261
4	32.546.342	32.546.342	0	23.011.405
5	34.050.576	34.050.576	0	26.221.222
6	35.653.471	35.653.471	0	24.377.805
7	37.286.122	37.286.122	0	20.482.056
8	39.269.950	39.269.950	0	22.913.639
9	41.368.619	41.368.619	0	19.298.766
10	43.568.967	43.568.967	0	20.394.695
11	47.271.948	47.271.948	0	23.258.570
12	51.077.181	51.077.181	0	21.464.810
13	55.274.505	55.274.505	0	21.075.422
14	61.978.864	61.978.864	0	21.375.819
15	69.534.577	69.534.577	0	21.626.548
16	76.987.364	76.987.364	0	22.028.062
17	86.540.467	86.540.467	0	22.779.623
18	99.056.112	99.056.112	0	23.987.171
19	110.462.292	110.462.292	0	24.608.336
20	124.624.344	124.624.344	0	25.541.215
21	143.814.923	143.814.923	0	27.115.216
22	165.919.406	165.919.406	0	28.779.070
23	188.730.229	188.730.229	0	30.115.598
24	215.185.893	215.185.893	0	31.588.884
25	248.433.652	248.433.652	0	33.550.683
26	282.236.274	282.236.274	0	35.065.031
27	318.502.782	318.502.782	0	36.403.663
28	352.743.135	352.743.135	0	37.090.346
29	391.361.227	391.361.227	0	37.857.381
30	431.289.601	431.289.601	0	38.380.640
31	468.821.307	468.821.307	0	38.381.418
32	500.870.440	500.870.440	0	37.723.288
33	535.012.197	535.012.197	0	37.069.632
34	561.584.126	561.584.126	0	35.796.443
35	579.603.101	579.603.101	0	33.988.046
36	598.338.501	598.338.501	0	32.278.467
37	604.917.454	604.917.454	0	30.021.510
38	604.552.435	604.552.435	0	27.602.019
39	600.991.029	600.991.029	0	25.243.253
40	595.479.537	595.479.537	0	23.009.894

t	LPM	IF	IF-LPM	COSTE
41	587.366.794	587.366.794	0	20.879.862
42	576.719.449	576.719.449	0	18.860.504
43	563.677.350	563.677.350	0	16.958.590
44	548.229.806	548.229.806	0	15.173.726
45	530.406.165	530.406.165	0	13.505.436
46	510.278.931	510.278.931	0	11.953.034
47	487.966.736	487.966.736	0	10.515.531
48	463.635.990	463.635.990	0	9.191.546
49	437.501.217	437.501.217	0	7.979.233
50	409.823.417	409.823.417	0	6.876.210
51	380.907.242	380.907.242	0	5.879.522
52	351.095.113	351.095.113	0	4.985.607
53	320.759.950	320.759.950	0	4.190.288
54	290.295.296	290.295.296	0	3.488.785
55	260.103.928	260.103.928	0	2.875.753
56	230.584.787	230.584.787	0	2.345.340
57	202.119.544	202.119.544	0	1.891.271
58	175.058.644	175.058.644	0	1.506.952
59	149.708.538	149.708.538	0	1.185.586
60	126.320.574	126.320.574	0	920.303
61	105.082.075	105.082.075	0	704.297
62	86.111.289	86.111.289	0	530.955
63	69.455.226	69.455.226	0	393.979
64	55.091.966	55.091.966	0	287.493
65	42.936.398	42.936.398	0	206.127
66	32.849.209	32.849.209	0	145.079
67	24.648.548	24.648.548	0	100.148
68	18.123.016	18.123.016	0	67.741
69	13.045.336	13.045.336	0	44.859
70	9.185.273	9.185.273	0	29.057
71	6.320.982	6.320.982	0	18.396
72	4.248.211	4.248.211	0	11.374
73	2.786.616	2.786.616	0	6.864
74	1.782.890	1.782.890	0	4.040
75	1.112.184	1.112.184	0	2.318
76	676.207	676.207	0	1.297
77	400.640	400.640	0	707
78	231.271	231.271	0	375
79	130.063	130.063	0	194
80	71.262	71.262	0	98
81	38.031	38.031	0	48
82	19.782	19.782	0	23
83	9.995	9.995	0	11

t	LPM	IF	IF-LPM	COSTE
84	4.927	4.927	0	5
85	2.340	2.340	0	2
86	1.091	1.091	0	1
87	468	468	0	0
88	228	228	0	0
89	82	82	0	0
90	27	27	0	0
91	9	9	0	0
92	5	5	0	0
93	2	2	0	0

CUADRO III : RESULTADOS DE CONGRUENCIA POSITIVA

t	LPM	IF	IF - LPM	Balance anual	Coste
1	28.485.701	260.681.741	232.196.040	232.196.040	260.681.741
2	30.017.346	221.363.378	191.346.032	436.865.788	204.398.318
3	31.474.705	170.773.499	139.298.794	602.254.399	142.687.469
4	32.546.342	843.169.522	810.623.180	1.452.209.264	596.150.415
5	34.050.576	68.458.600	34.408.024	1.586.493.184	52.717.703
6	35.653.471	0	(35.653.471)	1.675.126.760	0
7	37.286.122	0	(37.286.122)	1.780.577.534	0
8	39.269.950	0	(39.269.950)	1.879.965.024	0
9	41.368.619	0	(41.368.619)	1.996.517.261	0
10	43.568.967	0	(43.568.967)	2.110.194.197	0
11	47.271.948	0	(47.271.948)	2.226.936.586	0
12	51.077.181	0	(51.077.181)	2.361.574.083	0
13	55.274.505	0	(55.274.505)	2.489.607.445	0
14	61.978.864	0	(61.978.864)	2.621.041.880	0
15	69.534.577	0	(69.534.577)	2.756.334.422	0
16	76.987.364	0	(76.987.364)	2.880.944.059	0
17	86.540.467	0	(86.540.467)	3.003.992.272	0
18	99.056.112	0	(99.056.112)	3.123.476.600	0
19	110.462.292	0	(110.462.292)	3.240.247.228	0
20	124.624.344	0	(124.624.344)	3.351.350.870	0
21	143.814.923	0	(143.814.923)	3.451.346.723	0
22	165.919.406	0	(165.919.406)	3.536.512.788	0
23	188.730.229	0	(188.730.229)	3.605.063.862	0
24	215.185.893	0	(215.185.893)	3.652.146.362	0
25	248.433.652	0	(248.433.652)	3.669.406.358	0
26	282.236.274	0	(282.236.274)	3.654.119.395	0

t	LPM	IF	IF - LPM	Balance anual	Coste
27	318.502.782	0	(318.502.782)	3.601.453.802	0
28	352.743.135	0	(352.743.135)	3.510.716.430	0
29	391.361.227	0	(391.361.227)	3.374.759.824	0
30	431.289.601	0	(431.289.601)	3.188.984.000	0
31	468.821.307	0	(468.821.307)	2.952.161.278	0
32	500.870.440	0	(500.870.440)	2.666.060.571	0
33	535.012.197	0	(535.012.197)	2.325.004.281	0
34	561.584.126	0	(561.584.126)	1.932.564.218	0
35	579.603.101	0	(579.603.101)	1.493.555.165	0
36	598.338.501	0	(598.338.501)	1.003.872.803	0
37	604.917.454	0	(604.917.454)	471.987.096	0
38	604.552.435	0	(604.552.435)	(98.228.278)	0
39	600.991.029	0	(600.991.029)	(706.365.415)	0
40	595.479.537	0	(595.479.537)	(1.353.233.035)	0
41	587.366.794	0	(587.366.794)	(2.039.047.531)	0
42	576.719.449	6.882.147.744	6.305.428.295	4.118.040.058	225.067.447
43	563.677.350	0	(563.677.350)	3.853.950.119	0
44	548.229.806	0	(548.229.806)	3.586.095.183	0
45	530.406.165	0	(530.406.165)	3.316.577.440	0
46	510.278.931	0	(510.278.931)	3.047.579.515	0
47	487.966.736	0	(487.966.736)	2.781.324.188	0
48	463.635.990	0	(463.635.990)	2.520.029.533	0
49	437.501.217	0	(437.501.217)	2.265.860.466	0
50	409.823.417	0	(409.823.417)	2.020.878.397	0
51	380.907.242	0	(380.907.242)	1.786.990.059	0
52	351.095.113	0	(351.095.113)	1.565.898.474	0
53	320.759.950	0	(320.759.950)	1.359.057.638	0
54	290.295.296	0	(290.295.296)	1.167.633.786	0
55	260.103.928	0	(260.103.928)	992.475.216	0
56	230.584.787	0	(230.584.787)	834.093.001	0
57	202.119.544	0	(202.119.544)	692.653.722	0
58	175.058.644	0	(175.058.644)	567.985.636	0
59	149.708.538	0	(149.708.538)	459.598.053	0
60	126.320.574	0	(126.320.574)	366.713.237	0
61	105.082.075	0	(105.082.075)	288.309.551	0
62	86.111.289	0	(86.111.289)	223.172.782	0
63	69.455.226	0	(69.455.226)	169.953.375	0
64	55.091.966	0	(55.091.966)	127.225.517	0
65	42.936.398	0	(42.936.398)	93.544.776	0
66	32.849.209	0	(32.849.209)	67.500.949	0
67	24.648.548	0	(24.648.548)	47.763.095	0
68	18.123.016	0	(18.123.016)	33.114.845	0
69	13.045.336	0	(13.045.336)	22.478.614	0

t	LPM	IF	IF - LPM	Balance anual	Coste
70	9.185.273	0	(9.185.273)	14.928.660	0
71	6.320.982	0	(6.320.982)	9.693.738	0
72	4.248.211	0	(4.248.211)	6.150.746	0
73	2.786.616	0	(2.786.616)	3.811.597	0
74	1.782.890	0	(1.782.890)	2.306.000	0
75	1.112.184	0	(1.112.184)	1.361.578	0
76	676.207	0	(676.207)	784.426	0
77	400.640	0	(400.640)	440.853	0
78	231.271	0	(231.271)	241.654	0
79	130.063	0	(130.063)	129.171	0
80	71.262	0	(71.262)	67.306	0
81	38.031	0	(38.031)	34.172	0
82	19.782	0	(19.782)	16.876	0
83	9.995	0	(9.995)	8.109	0
84	4.927	0	(4.927)	3.772	0
85	2.340	0	(2.340)	1.706	0
86	1.091	0	(1.091)	739	0
87	468	0	(468)	325	0
88	228	0	(228)	120	0
89	82	0	(82)	46	0
90	27	0	(27)	15	0
91	9	0	(9)	7	0
92	5	0	(5)	2	0
93	2	0	(2)	0	0

CUADRO IV: RESULTADOS DE CONGRUENCIA TEMPORAL

t	LPM	IF	IF - LPM	Balance anual	Coste
1	28.485.701	28.485.701	0	0	28.485.701
2	30.017.346	30.017.346	0	0	27.716.848
3	31.474.705	31.474.705	0	0	26.298.261
4	32.546.342	32.546.342	0	0	23.011.405
5	34.050.576	34.050.576	0	0	26.221.222
6	35.653.471	1.905.512.958	1.869.859.487	1.869.859.487	1.302.880.797
7	37.286.122	0	(37.286.122)	1.991.903.359	0
8	39.269.950	0	(39.269.950)	2.107.747.251	0
9	41.368.619	0	(41.368.619)	2.243.433.654	0
10	43.568.967	0	(43.568.967)	2.376.557.751	0
11	47.271.948	0	(47.271.948)	2.514.003.183	0
12	51.077.181	0	(51.077.181)	2.672.580.509	0

t	LPM	IF	IF - LPM	Balance anual	Coste
13	55.274.505	0	(55.274.505)	2.824.754.518	0
14	61.978.864	0	(61.978.864)	2.982.225.949	0
15	69.534.577	0	(69.534.577)	3.145.744.020	0
16	76.987.364	0	(76.987.364)	3.298.834.892	0
17	86.540.467	0	(86.540.467)	3.452.284.663	0
18	99.056.112	0	(99.056.112)	3.604.382.262	0
19	110.462.292	0	(110.462.292)	3.756.138.777	0
20	124.624.344	0	(124.624.344)	3.904.773.529	0
21	143.814.923	0	(143.814.923)	4.045.030.880	0
22	165.919.406	0	(165.919.406)	4.173.387.467	0
23	188.730.229	0	(188.730.229)	4.288.271.173	0
24	215.185.893	0	(215.185.893)	4.385.057.005	0
25	248.433.652	0	(248.433.652)	4.455.636.250	0
26	282.236.274	0	(282.236.274)	4.497.547.512	0
27	318.502.782	0	(318.502.782)	4.506.241.315	0
28	352.743.135	0	(352.743.135)	4.481.327.235	0
29	391.361.227	0	(391.361.227)	4.415.982.564	0
30	431.289.601	0	(431.289.601)	4.305.955.694	0
31	468.821.307	0	(468.821.307)	4.150.392.663	0
32	500.870.440	0	(500.870.440)	3.951.463.290	0
33	535.012.197	0	(535.012.197)	3.703.920.047	0
34	561.584.126	0	(561.584.126)	3.411.796.107	0
35	579.603.101	0	(579.603.101)	3.080.401.175	0
36	598.338.501	0	(598.338.501)	2.706.161.862	0
37	604.917.454	0	(604.917.454)	2.298.117.683	0
38	604.552.435	0	(604.552.435)	1.860.753.308	0
39	600.991.029	0	(600.991.029)	1.395.132.080	0
40	595.479.537	0	(595.479.537)	901.148.401	0
41	587.366.794	0	(587.366.794)	379.340.152	0
42	576.719.449	3.043.761.852	2.467.042.403	2.873.979.551	99.540.396
43	563.677.350	203.872	(563.473.478)	2.519.588.083	6.134
44	548.229.806	448.405	(547.781.401)	2.155.106.714	12.411
45	530.406.165	771.007	(529.635.158)	1.782.255.569	19.632
46	510.278.931	1.155.818	(509.123.113)	1.402.791.547	27.074
47	487.966.736	1.635.114	(486.331.622)	1.018.513.009	35.236
48	463.635.990	2.202.330	(461.433.660)	631.176.170	43.661
49	437.501.217	2.904.050	(434.597.167)	242.497.070	52.965
50	409.823.417	3.735.762	(406.087.655)	(145.948.923)	62.680
51	380.907.242	4.736.779	(376.170.463)	(532.737.171)	73.115
52	351.095.113	5.917.286	(345.177.827)	(916.671.627)	84.026
53	320.759.950	7.335.102	(313.424.848)	(1.296.784.336)	95.823
54	290.295.296	8.996.479	(281.298.817)	(1.672.424.215)	108.120
55	260.103.928	10.959.175	(249.144.753)	(2.043.237.831)	121.166

t	LPM	IF	IF - LPM	Balance anual	Coste
56	230.584.787	13.257.883	(217.326.904)	(2.409.210.287)	134.849
57	202.119.544	15.967.043	(186.152.501)	(2.770.632.834)	149.407
58	175.058.644	19.131.503	(155.927.141)	(3.128.123.513)	164.689
59	149.708.538	22.803.936	(126.904.602)	(3.482.599.099)	180.591
60	126.320.574	27.100.326	(99.220.248)	(3.835.178.430)	197.438
61	105.082.075	32.071.178	(73.010.897)	(4.187.198.560)	214.952
62	86.111.289	37.868.523	(48.242.766)	(4.540.060.025)	233.494
63	69.455.226	44.578.708	(24.876.518)	(4.895.225.908)	252.869
64	55.091.966	52.355.574	(2.736.392)	(5.254.089.981)	273.213
65	42.936.398	61.298.315	18.361.917	(5.617.963.115)	294.278
66	32.849.209	71.665.767	38.816.558	(5.987.853.373)	316.513
67	24.648.548	83.601.608	58.953.060	(6.364.516.646)	339.676
68	18.123.016	97.290.064	79.167.048	(6.748.368.188)	363.655
69	13.045.336	113.104.219	100.058.883	(7.139.253.096)	388.929
70	9.185.273	131.227.027	122.041.754	(7.536.591.998)	415.131
71	6.320.982	152.014.965	145.693.983	(7.939.185.082)	442.403
72	4.248.211	175.862.071	171.613.860	(8.345.146.942)	470.841
73	2.786.616	203.181.214	200.394.598	(8.751.861.790)	500.445
74	1.782.890	234.504.929	232.722.039	(9.155.837.702)	531.368
75	1.112.184	270.280.484	269.168.300	(9.552.756.595)	563.415
76	676.207	311.150.925	310.474.718	(9.937.244.917)	596.699
77	400.640	357.778.265	357.377.625	(10.302.801.866)	631.202
78	231.271	411.053.459	410.822.188	(10.641.508.506)	667.150
79	130.063	471.739.008	471.608.945	(10.944.069.301)	704.364
80	71.262	540.911.331	540.840.069	(11.199.410.281)	743.006
81	38.031	619.823.434	619.785.403	(11.394.381.984)	783.257
82	19.782	709.329.687	709.309.905	(11.514.013.369)	824.622
83	9.995	811.379.954	811.369.959	(11.540.287.882)	867.764
84	4.927	927.395.192	927.390.265	(11.452.453.558)	912.458
85	2.340	1.059.163.320	1.059.160.980	(11.226.458.582)	958.697
86	1.091	1.209.009.415	1.209.008.324	(10.834.175.120)	1.006.743
87	468	1.378.884.110	1.378.883.642	(10.243.477.726)	1.056.299
88	228	1.571.511.837	1.571.511.609	(9.417.179.128)	1.107.509
89	82	1.790.043.254	1.790.043.172	(8.312.235.745)	1.160.549
90	27	2.037.903.800	2.037.903.773	(6.879.047.119)	1.215.498
91	9	2.318.604.159	2.318.604.150	(5.060.893.647)	1.272.236
92	5	2.636.150.115	2.636.150.110	(2.792.923.548)	1.330.705
93	2	2.996.108.727	2.996.108.727	0	1.391.360