Participación en las utilidades

Por Alberto Di Mare.

(San José de Costa Rica)

CAPÍTULO I

ANTECEDENTES, PROPOSITO Y METODOLOGIA

Antecedentes.

En 1930, Höckner presentó ante el Congreso Internacional de Actuarios (Estocolmo) su estudio "Problem der Gewinnverteilung" en el cual demostraba, para los planes de seguro mixto a prima pura, que la suma de las utilidades de mortalidad y una alícuota de las de interés resulta constante en el futuro, siempre que la submortalidad de la cartera satisfaga la condición

$$\frac{q_{x+t} - q'_{x+t}}{p'_{x+t}} = \text{constante} \ ^{(1)}$$

En 1941, Ottaviani publica su estudio "Sulla Partecipazione Degli Assicurati Agli Utili" [2], en el cual demuestra que el método admite generalización para todo tipo de plan de seguro y para primas de tarifa, al mismo tiempo que hace caer algunos vínculos impuestos por Höckner.

---

(1) Los símbolos acentuados representan bases de cálculo de segundo orden, o sean las que se refieren al desarrollo efectivo de la gestión.

(2) Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, Anno XXII, nn. 3 e 4. Roma.

En definitiva, se llega a la conclusión de que las utilidades de un ejercicio pueden dividirse en dos cuotas: *(a)* utilidad de suma, y *(b)* utilidad de interés o rendimiento. La *utilidad de suma* es función de la mortalidad efectiva respecto de la teórica y del capital asegurado, y la *utilidad de interés* del rendimiento efectivo de las inversiones respecto del teórico.

Al problema de la determinación de la cuantía de las utilidades y su distribución equitativa han dedicado numerosos estudios muy renombrados Actuarios, basta aquí citar los nombres de Sheppard Homans ("The Assurance Magazine", 1864), Wright ("Papers read and transactions, Actuarial Society of America", 1864), Weeks (ibidem, 1899), Sprague y Rothery ("Journal of the Institute of Actuaries") y Karup (Jena, 1903) [3]. Como el lector constatará a lo largo del presente trabajo, aun cuando el método fue inicialmente planteado por Höckner su solución es posibles gracias a las investigaciones de Homans, puesto que, en definitiva, se trata de una aplicación de la conocida *fórmula de contribución de Homans.*

Propósito.

El presente estudio pretende, mediante la aplicación de la teoría de las tablas de mutualidad [4], una generalización prácticamente irrestricta del método Höckner-Ottaviani, para obtener una valuación continua y cuanto más exacta posible de las utilidades de cada ejercicio, con indicación de cuantía, orígenes y modos de distribución. Confío en que este trabajo

---

(3) Vide Théorie et Pratique des Opérations d'Assurance, J. P. Richard, Tomo I, Libro II, Cap. II, Aparte N, párrafo 148, pág. 411. G. Doin et Cie., París, 1944.

(4) La teoría de las tablas de mutualidad fue originalmente desarrollada por una de las más preclaras glorias de la Universidad de Roma, Francesco Paolo Cantelli, en su estudio "Genesi e Costruzione delle Tavole di Mutualità" (Bolletino di Notizie sul Credito e sulla Providenza, 1914, nn. 3 e 4, Roma), trabajo que ha sido reeditado recientemente en la obra "Alcune Memorie Matematiche, onoranze a Francesco Paolo Cantelli, Facoltà di Economia e Commercio dell'Università di Roma", Giuffrè, Milán, 1958.

pueda ser de utilidad para una mejor comprensión de las realizaciones y estructura del negocio de los seguros de vida e interesante para el estudioso de problemas de economía nacional que no quiera desentenderse de una actividad de tal influencia y pujanza, como las que caracterizan a los seguros contractuales sobre la duración de la vida humana.

Metodología.

Para determinar el origen, estructura y cuantía de las utilidades son diversos los criterios posibles. Labor propia del actuario es la de escoger en dicha diversidad aquellos que, brindando una aproximación satisfactoria, sean del menor costo posible.

Lo anterior equivale a establecer como *criterio de verdad* de la técnica actuarial, el de economía y simplicidad.

Una tendencia en este sentido la ha experimentado la ciencia desde fines del siglo XIX cuando Ernst Mach desató su radical crítica contra los criterios epistemológicos de la (entonces) "ciencia oficial", "... según Mach, la ciencia, en el desarrollo determinado por la aplicación del principio de economía, atraviesa un triple estadio..., finalmente se presenta el período formal *(tercer estadio)* en el cual se trata de disponer en orden sinóptico los hechos que se presentan, es decir, de formar un sistema de manera que cada uno de ellos pueda ser encontrado y reestablecido con el menor dispendio intelectual... Las leyes son, por lo tanto, reglas de reconstrucción de un gran número de hechos, mediante una única expresión preferentemente matemática; en la naturaleza no existen leyes, sino únicamente casos múltiples; como nosotros, que en nuestra previsión de los eventos futuros nos imponemos restricciones, autolimitaciones, que no tienen ningún valor teorético, porque están fundadas exclusivamente sobre la hipótesis inverificable de la regularidad de la naturaleza, pero que sí tienen un elevado valor económico y práctico... No importa, por lo tanto, que la hipótesis sea verdadera o falsa, sino únicamente que sea fecunda al mismo tiempo que económica..." (5).

Junto al empirocriticismo de Mach, se movieron sobre la misma guía el convencionalismo de Poincaré, la concepción pragmática de la ciencia, la formalista y la teoría de los modelos: el criterio de verdad de la ciencia no puede ser otro que el de "*economía*" de los conceptos, es decir, que entre diversas hipótesis, el científico escogerá la que mejores cualidades mnemotécnicas posea (permita recordar más hechos, describa más hechos) y entre las de igual calidad mnemónica, la más susceptible de futuros desarrollos (criterio de congruencia, que no es sino un diverso planteamiento del criterio mnemotécnico).

En este estudio se adopta como *criterio de verdad* precisamente el de comodidad o economía, que precisaremos en el sentido que le da Benedetto Croce: "... Para Croce las ciencias no son actividad teorética o conocimiento, sino actividad práctica, es decir, acción; la actividad teorética se obtiene a través de la intuición y el concepto puro, a la que corresponden el arte y la filosofía o la historia. Las ciencias, en vez, hacen uso de pseudoconceptos o de convenciones conceptuales, remedos de conceptos, que son o representaciones sin universalidad, o universales sin representación. Ellos, por lo tanto, no nos hacen conocer nada, y la actividad de la ciencia puede ser comparada a la del coleccionista que ordena las estampillas en su álbum, o a la del mercader que pone etiquetas y encasilla sus mercancías para tenerlas más a mano al momento de la venta. La ciencia, por lo tanto, corresponde a un interés práctico, la utilidad mnemónica, y provee a la conservación del patrimonio de los conocimientos adquiridos; es, en fin de cuentas, una forma de economía (6).

El utilizar como *criterio de verdad* la economía y simplicidad de los conceptos sin tener —más que secundariamen-

---

(5) Traducción y arreglo libres, el paréntesis es añadido: Filosofia delle Scienze; Filippo Selvaggi, S. J., Sección I, Capitulo II, párrafo 2, pág. 31. Edizioni della Civiltà Catolica, Roma, 1953.

(6) Traducción libre: Selvaggi, Op. cit., Sección I, Cap. II, párrafo 8, pág. 46.

te— consideración de la relación objeto-sujeto plantea sin duda un delicado problema metodológico; porque de concluirse por la no validez del criterio de verdad las elaboraciones posteriores quedarían sujetas a muy seria critica, aun cuando no se implicara de necesidad su error.

Podría argumentarse que dicho criterio es ampliamente utilizado por casi todas las ciencias hoy en día, o que multitud de especialistas están con él conformes, pero desgraciadamente (para la argumentación) ni la moda ni el argumento de autoridad gozan de virtud demostrativa [7].

Sin embargo, para el actuario el problema epistemológico se reduce en gran medida teniendo en la debida consideración que la función de la técnica actuarial es hacer posible la operación aseguradora en el mundo cotidiano de los intercambios y las necesidades; es decir, que es una actividad enteramente práctica, no especulativa.

A la técnica actuarial no le interesa, primordialmente, la existencia de una ley que regule la duración de la vida humana (ley de mortalidad), *sino asegurar la duración de la vida humana.* El actuario no trabaja con *leyes* de siniestralidad, simplemente utiliza *tablas* de siniestralidad.

Ahora bien, para dirigir la conducta práctica el *criterio de verdad* puede ser —inobjetablemente— el de economía o simplicidad. A un individuo —para fines puramente prácticos— le es indiferente el conocer la existencia de una ley de gravitación universal o el saber de memoria todos los cuerpos que son "arrastrados por su propio peso"; si su elenco es suficientemente amplio para las necesidades de su vida cotidiana, se encontrará en igualdad de condiciones con el más sutil metafísico para realizar los menesteres que la vida le haya impuesto [8].

---

(7) Para la posición de Mach, Poincaré, Duhem, etc., vide Selvaggi, Op. cit., Sección I, Cap. II.

(8) De esto a elevar a principio lógico lo que sólo es norma para el actuar práctico hay su buen trecho y no debe exponerse el "hombre cotidiano" a verse escarnecido por un "zapatero a tus zapatos" del filósofo. Ha sido precisamente este mantenerse cada cual en su campo el que ha permitido a nuestra especie no sólo el construir su

Los razonamientos anteriores no son otra cosa, en fin de cuentas, que un medio de desatar nudos a tajos de espada; pero es harto difícil proceder de otra manera cuando se trata de un campo que implica la aplicación del Cálculo de Probabilidades a la solución de problemas prácticos.

Baste considerar que, como observa muy bien Berdez, el teorema fundamental del Cálculo de Probabilidades (Ley de grandes números), implica —¡nada menos!— que la eliminación del azar, en una rama científica cuyo objeto es el azar mismo [9]. Probabilidad se ha definido como aumento de comprensión de un concepto sin disminución de su extensión, o sea, añadir una determinante ontológica a una clasificación lógica [10]. Planteada la cuestión en estos términos es aparente su casi imposible solución.

Con la aplicación de los modelos tenemos una descripción de hechos —más o menos acertada—; pretender además hacer coincidir la representación de la cosa con la cosa en sí es plantear un problema de imposible solución —para la ciencia—; más aún, parece labor sin fruto la de tratar de plantear la ciencia sobre criterios epistemológicos carentes de contradicción [11].

Todo *conocimiento* que pretende llegar a conceptos partiendo de experiencias sensibles contiene este grado de "probabilidad", o sea, de *no-conocimiento*, que es, por otra parte, lo único que la ciencia nos ofrece, porque de más no dispone; su haber son los pseudoconceptos, las convenciones. Apa-

---

morada y propagarse, que fue y será mérito del técnico, sino el indagar del porqué de su morada y de su vida, cuestiones de cuya solución depende el tanto de felicidad de que podamos disfrutar y cuya solución será mérito entero del filósofo.

(9) Teoria e Tecnica delle Assicurazioni Elementari, Luigi Molinaro; Cap. III, párrafo 8, nota (1), pág. 36, Edizioni della Rivista Assicurazioni, presso Giuffrè. Roma, 1946.

(10) Cfr. Matematica para Economistas, Angel Vegas Pérez; Cap. I, pág. 8. Editorial Dossat, Madrid, 1948.

(11) Cfr. "Symbolic Logic, an Introduction", Frederic Benton Fitch, The Ronald Press Company, New-York, 1952. Prefacio passim y especialmente párrafo 2.

riencias engañosas de sustancias, pero indispensables para nuestro sobrevivir cotidiano.

Probabilidad y certeza se hayan ligadas por la relación que tan brillantemente indica Carnelutti: "... así como la certeza es existencia captada inmediatamente por virtud de los sentidos, la probabilidad es existencia captada, mediatamente, en virtud del juicio..." [12], y tanto el técnico como el hombre de ciencia se encuentra, ante la múltiple variedad de los hechos, en la posición del juez que de alguna manera debe decidir, más aún, que está obligado a decidir, con base en pruebas (datos) que no son más que "... las cosas en cuanto sirven para argumentar algo diverso de si..." [13]. Quizás aquí se halle el origen de todo el problema epistemológico: nuestro pretender saber algo de la cosa, cuando ella se limita a argumentar de lo que de ella es diverso.

A fin de cuentas, el Actuario, que es un técnico y no un metafísico, se debe limitar a informar a quienes en el negocio de seguros se *arriesgan* de que probablemente la utilidad se ha producido en tal cuantía y probablemente debido a tales causas. Pero si el empresario pretendiera afirmaciones con contenido de certeza, se vería obligado a escuchar una respuesta que le diría ser el concepto mismo de utilidad, más aún su cuantía, uno en gran parte arbitrario [14], y que lo más prudente será tener siempre prontas reservas —su aporte de capital, su riesgo empresarial— para enfrentar no sólo pérdidas, sino pérdidas más allá de lo "previsto".

No es éste un principio o modo de actuar diverso del usual el "hombre cotidiano", a quien a menudo fallan los elencos en que ha ordenado la realidad y ve actuar a la naturaleza en modo diverso del previsto, con el consiguiente daño o beneficio.

---

(12) Lecciones sobre el Proceso Penal, Francesco Carnelutti; Volumen I, Segunda Parte, Libro II, Subtítulo II, párrafo 134, pág. 289. Bosch y Cía., Buenos Aires, 1950.

(13) Carnelutti, ibidem.

(14) Teoría de la Política Social, Manuel De Torres; Cap. IX, página 191. Aguilar, Madrid, 1949.

Ni era de esperar que en una actividad industrial basada sobre la administración de riesgos ajenos, pudiera eliminarse el riesgo inherente a todo actuar humano.

Capítulo II

EL PROBLEMA DE LAS UTILIDADES

Planteamiento del problema.

Una compañía de *seguros de vida* ha suscrito una serie de contratos relativos a la duración de la vida humana, los cuales estipulan el derecho del contratante a participar en las utilidades que la gestión de ellos produzca.

A fin de dar cumplimiento a su obligación el asegurador deberá determinar —para un período dado y respecto de cada contrato suscrito— las utilidades a que el contratante tenga derecho.

Como en toda cuestión referente a utilidades, no cabe un análisis "ex ante", pues tiene sentido real el problema sólo si se plantea "ex post".

Origen de las utilidades.

Cual sea la causa que ha producido la utilidad es el primer paso al que la compañía debe proceder. Ella no puede provenir, en virtud del principio de equidad de la prima que rige en los seguros contractuales [1], más que de una divergencia —manifiesta con el transcurso del tiempo— entre las bases de cálculo teóricas (mortalidad, interés y recargo in-

---

[1] Por "prima equitativa" se entiende aquélla que es exactamente equivalente al costo que para el asegurador representan las prestaciones que se obliga a dar a un *grupo* de asegurados, cuando dicho grupo está compuesto *únicamente* por individuos *homogéneos* respecto al riesgo asegurado.

dustrial) relativas al riesgo y el desarrollo efectivo de la gestión [2].

Respecto de la utilidad de extorno, o sea aquélla que la compañía percibe cuando un contrato es rescindido por el cliente y consistente en la diferencia entre la reserva matemática completa [3] y el valor de rescate, puede considerarse o no como beneficio, según criterios a establecer caso por caso. Ello debido a que la función de la "utilidad" de extorno es fundamentalmente estabilizadora y no financiera, siendo establecida para garantizar el equilibrio de la gestión, mediante la creación de un fondo de contingencia para enfrentar a la mayor probabilidad de desviaciones, respecto del valor promedio por siniestro supuesto en las bases de cálculo, que con el reducirse del grupo asegurado se inducen.

Caso por caso, según el número de contratos existentes antes y después de las rescisiones, para la modalidad pertinente de la variable *riesgo*, deberá decidirse si el beneficio de extorsión debe considerarse o no, en función del tamaño del grupo asegurado y del margen de pérdida establecido por la compañía para administrar la cartera como utilidad.

Cuantía de la utilidad.

Una vez establecidas las *causas* productoras de la utilidad, se hace necesario determinar cuál sea la cuantía de ésta, ya que el problema de la compañía aseguradora —en lo que aquí concierne— es uno enteramente práctico: distribuir los beneficios de la gestión.

Para ello es menester determinar la *medida* en que cada factor productor de utilidad (mortalidad, rendimiento del capital e inversiones, recargo industrial y —eventualmente— descuento por rescisión) han concurrido a provocarla, así como establecer las relaciones de dependencia que entre dichos factores existan, de modo tal que pueda determinarse

---

(2) En un régimen de prima media general o capitalización colectiva, pueden subsistir divergencias debidas a causas diversas del riesgo asegurado.

(3) Vide Sección 2, del Apéndice.

para cada contrato singular —según la que podría denominarse su "estructura de factores productores de utilidad"— el monto de participación correspondiente a las pólizas del mismo grupo.

El problema de la cuantía presenta en consecuencia dos aspectos: 1) medida de la utilidad, y 2) individualización de la utilidad.

Distribución de las utilidades.

La distribución de utilidades presenta dos problemas: determinar el monto —distribución propiamente dicha— que corresponde a cada quien (lo que antes se denominó "problema de la individualización") y determinar el modo (forma de pago).

Respecto del monto, el criterio rector debe ser el de obtener un resultado cuanto más aproximado posible al principio de equidad de la prima, en manera tal que cada contrato participe en la medida exacta en que el grupo al cual pertenece haya contribuido a producir la utilidad. Es ésta la oportunidad para recalcar la cautela con que debe procederse al determinar el monto de las utilidades, tanto para el conjunto de los asegurados como para cada grupo de riesgos, en consideración a que si bien cada cliente participa de las ganancias no existe vínculo alguno que le haga partícipe de las pérdidas [4].

Habida cuenta de que la divergencia entre mortalidad teórica y mortalidad efectiva es uno de los factores preponderantes que producen utilidad, es obvio que las tablas de mortalidad de recargo implícito (elevada mortalidad) son productoras de fuertes beneficios respecto de los contratos relativos a seguros de muerte; el hecho de que la mortalidad teórica sea más elevada —sistemáticamente— que la real, no debe ser motivo para abandonar todo criterio de cautela y olvidarse de cuál sea el desarrollo probable de cada tipo de

(4) Constituyen excepción a esta regla las [illegible] sociedades mutualistas y cooperativas de [illegible] con el negocio de sociedad que [illegible] [illegible]

contrato, máxime si —como es el caso de los países centroamericanos— las bases de cálculo de primer orden son tomadas de experiencias extranjeras y el grupo asegurado es sumamente reducido.

Respecto del modo de distribución de utilidades, dependerá, en general, de la política de ventas de la compañía aseguradora, de las condiciones del mercado, de las necesidades de la clientela y de los *principios de selección de riesgos.*

Si los clientes desearan, como regla imperante, aumentar los montos asegurados, cabría perfectamente adoptar esta política que es la que —financieramente— presenta más atractivos para la empresa; pero si tuviesen una marcada preferencia hacia la liquidez no cabría sino pensar en una reducción de primas o devolución de sumas en efectivo.

En todo caso, sea cual fuere la política adoptada para satisfacer las demandas del mercado, no debe consistir en modalidades de distribución capaces de producir una antiselección de riesgos. Una compañía de seguros que decide destinar la participación a aumentar los capitales asegurados por contratos de supervivencia estará obrando prudentemente; pero de adoptar igual política respecto de los seguros de muerte, sin someter a previo examen médico a otro prerrequisito selectivo a los clientes, no estaría actuando en forma tan prudente, desde el punto de vista de la estabilidad de la gestión [5].

CAPÍTULO III

BASES DE CALCULO

Bases de cálculo en general.

La prima de tarifa (símbolo P″) es resultado del conjunto siguiente, denominado *bases de cálculo:*

---

[5] Particularmente peligroso parece ser aumentar los capitales asegurados por contratos de seguro de muerte a término, dada la elevada mortalidad que normalmente caracteriza a este tipo de contratos.

p_{x+t} = probabilidad de supervivencia anual a la edad exacta $(x + t)$.

$q_{x+t} = 1 - p_{x+t}$ = probabilidad de muerte dentro del año de edad siguiente a la edad exacta $(x + t)$.

i = tasa unitaria anual efectiva de rendimiento (neto) de las inversiones.

f = tasa unitaria anual del costo de administración.

F = tasa unitaria (una tantum) del costo de adquisición del contrato.

ε = tasa unitaria anual del costo de cobro.

F, f y ε involucran todos los gastos relativos a la gestión industrial (impuestos, gastos de liquidación, emisión de pólizas y recibos, contabilidad, renovación, examen médico, comisiones de venta, etc.) pero no consideran el costo principal de la indemnización propiamente dicha (que es función de p_{x+t} y de i). Cada rubro de costo industrial se atribuye a una de las tres categorías según criterios variables de compañía a compañía y a menudo de contrato a contrato.

En rigor de lógica sólo la categoría f tiene razón de ser, puesto que el recargo industrial $(F + f + \varepsilon)$ es, en fin de cuentas, un costo de administración (f). No obstante, es conveniente llevar cuenta separada de cada concepto a fin de permitir métodos de valuación de reservas diversos de los de prima pura y reserva completa [1].

La prima única de tarifa de un contrato de seguro, al momento de su emisión, vendrá dada, en consecuencia, por la expresión [2]:

---

(1) Vide Sección 2 del Apéndice.

(2) $A''_{D(0)}$ representa la prima única de tarifa, al momento de emisión del contrato, por toda la vigencia jurídica del mismo; $A_{M(0)}$ la prima única pura, al momento de emisión del contrato, relativa al período de vigencia material del seguro (período de protección), y $a''_{G(0)}$ representa el valor presente de una anualidad por el período de vigencia formal del contrato (período de obligación al pago de primas).

Vide Sección 2 del Apéndice.

$$A''_{D(0)} = A_{M(0)} + F + f\,a''_{D(0)} + \varepsilon\,A''_{D(0)} \qquad [1]$$

y la prima periódica de tarifa resultará ser:

$$P''_{G(0)} = \frac{A''_{D(0)}}{a''_{G(0)}} = \frac{\dfrac{A_{M(0)}}{a''_{G(0)}} + \dfrac{F}{a''_{G(0)}} + \dfrac{f\,a''_{D(0)}}{a''_{G(0)}}}{1 - \varepsilon} = \qquad [2]$$

$$= \frac{P_{G(0)} + \dfrac{F}{a''_{G(0)}} + f\,\dfrac{a''_{D(0)}}{a''_{G(0)}}}{1 - \varepsilon}$$

y si D(0) = G(0), como es corriente, resultará

$$P''_{G(0)} = \frac{P_{G(0)} + f + \dfrac{F}{a''_{G(0)}}}{1 - \varepsilon} \qquad [3]$$

Bases de cálculo de primer orden.

Se denominarán así aquéllas que la compañía aseguradora estima como más representativas [3] del desarrollo futuro de la gestión. Son fruto de la experiencia *(pasado)* y se emplean como instrumento de previsión *(futuro)* [4].

En este estudio las bases de cálculo de primer orden se representan con el símbolo usual en los textos de matemática actuarial del Continente europeo, y en consecuencia:

P = prima pura
P′ = prima de inventario
P″ = prima de tarifa

---

(3) Vide "Metodología", Capítulo I, para el significado de "más representativas".

(4) "Sólo por un engranaje continuo del cálculo "ex post" con el "ex ante" se logra una aproximación al abastecimiento de bienes óptimo." Walter Eucken, Fundamentos de Política Económica, Libro III, Cap. XI, pág. 231. Ed. Rialp, S. A., Madrid, 1956.

Bases de cálculo [illegible]

Son [illegible] investigación que efectúa la compañía [illegible] para un periodo dado, del desarrollo efectivo de la gestión. Son experiencia *(pasado)* que puede ser utilizada o no para el presente *(determinación de utilidades y pérdidas)* y el futuro *(revisión de tarifas)* (5).

Con el objeto de simplificar, se supondrá, a lo largo de este estudio, que el período de observación esté comprendido entre dos fechas de balance: T_0 y T_1, ambas incluidas; se trata, en consecuencia, del intervalo cerrado (T_0, T_1). En la práctica —dados los usos de las compañías aseguradoras— la amplitud de este intervalo será igual o menor de cinco (años).

Las diferencias resultantes entre las bases de cálculo de primer orden y las de segundo son responsables de la utilidad o pérdida de una gestión aseguradora, sin que presente el problema diferencia con cualquier otra actividad industrial, ya que por definición (6) el beneficio es la cantidad residua resultante de lo esperado y la realidad.

En este estudio las bases de cálculo de segundo orden se indicarán con exponentes o subíndices que las diferencien de las de primer orden; dichas variantes se introducirán, caso por caso, a lo largo de la exposición.

Con el propósito de plantear este trabajo en el terreno más general posible, se hace necesario exponer someramente la teoría de los capitales acumulados (teoría de las tablas de mutualidad), de tan amplia utilización en seguros sociales, sin perjuicio de introducirle las convenientes variaciones que adapten dicho modelo a las formas más simplificadas que son propias de los seguros sobre la vida conforme se practican por parte de las compañías privadas.

Se procederá, consecuentemente, a desarrollar a continuación la teoría de los capitales acumulados o de las tablas de mutualidad.

---

(5) . Supra, nota (4).

(6) Erich Schneider: Teoría Económica, Tomo I, Libro I, Capítulo II, párrafo 2a), pág. 16. Aguilar, Madrid, 1958.

Capítulo IV

TEORIA DE LOS CAPITALES ACUMULADOS [1]

La población asegurada.

Esté bajo observación una población *cerrada* (aquéllas que sufren sólo decrementos y ningún incremento), *unitaria* (sean las compuestas por un solo grupo, sin admitir pasajes de y a subgrupos), en la que operen las causas de eliminación (independientes en el sentido de Karup) α, β, γ, ..., ω, con tasas instantáneas *(nominales)* $\alpha(u)$, $\beta(u)$, $\gamma(u)$, ..., $\omega(u)$, donde u representa una variable temporal continua. Sean, además, las tasas dichas continuas en el intervalo $(0, w)$ [2].

Indique $l(u)$ la entidad de la población observada al tiempo u, y plantéese el problema de determinar esa entidad al tiempo $n \geqslant u$, es decir, hallar el valor numérico de $l(n)$.

Fíjese como origen del tiempo el momento cero y en consecuencia $l(0)$ como población inicial, sea, además, $l(x)$, en $0 \leqslant x \leqslant n$, una función continua de x.

Dentro de las limitaciones puestas [3] se tendrá:

$$l(u) = l(0) - \int_0^u l(s)\ \alpha(s)ds - \int_0^u l(s)\ \beta(s)ds - $$
$$- \int_0^u l(s)\ \gamma(s)ds - \ldots - \int_0^u l(s)\ \omega(s)ds$$

---

(1) Por comodidad de exposición se imponen los vínculos de población *cerrada unitaria* y de *excindibilidad* por producto de la ley de capitalización. Estos vínculos son particulares, pues la teoría —con las oportunas modificaciones— se aplica igualmente a poblaciones abiertas circulares en que opere una genérica ley de capitalización no excindible por producto. Vide Genesi e Costruzione delle tavole di mutualità, Francesco Paolo Cantelli, Op. cit. Passim; y Lezioni sulla tecnica delle assicurazioni sociali; Mario A. Coppini, Caps. II y V. Eredi Virgilio Veschi, Roma, 1956.

(2) O a lo sumo con un número finito de discontinuidades de primera especie.

(3) Las limitaciones impuestas tienen por objeto permitir la utilización de integrales de Riemann.

y derivando respecto a u:

$$l'(u) = -l(u)\,\alpha(u) - l(u)\,\beta(u) - l(u)\,\gamma(u) - \dots - l(u)\,\omega(u)$$

$$\frac{l'(u)}{l(u)} = \frac{d}{du}\ln l(u) = -$$

$$-\left[\alpha(u) + \beta(u) + \gamma(u) + \dots + \omega(u)\right]$$

e integrando en (0, n):

$$\int_0^n \frac{d}{du}\ln l(u)du = \ln l(u)\int_0^n = \ln l(n) - \ln l(0) =$$

$$= \int_0^n -\left[\alpha(u) + \beta(u) + \gamma(u) + \dots + \omega(u)\right]du$$

$$\therefore\ \ln\frac{l(n)}{l(0)} = -\int_0^n \left[\alpha(u) + \beta(u) + \gamma(u) + \dots + \omega(u)\right]du$$

$$\frac{l(n)}{l(0)} = \exp\left[-\int_0^n \left[\alpha(u) + \beta(u) + \gamma(u) + \dots + \omega(u)\right]du\right]$$

$$l(n) = l(0)\exp\left\{-\int_0^n \left[\alpha(u)+\beta(u)+\gamma(u)+\dots+\omega(u)\right]du\right\} \quad [1]$$

que es la [illegible] de la población asegurada al tiempo $n \geq u$.

Cap[illegible]

Sea [illegible] *ley de capitalización*, es decir, una [illegible]:

1) [illegible]
2) L[illegible] para todo $t \geq u$
3) L[illegible] para todo u, con el crecer de t.

---

(4) Vide [illegible] Attuariale, Raffaele Cultrera, Capítulo I, pár[illegible] Virgilio Veschi, Roma, 1954. La tercera condición [illegible] general (en problemas demográficos y en seg[illegible] considerarse, como es sabido, leyes de capitalizació[illegible] un vínculo usualmente impuesto en el [illegible] financieras.

Sea, además, $L(u, t)$ *excindible por producto*, es decir, tal que, para $u \leqslant x \leqslant t$, siempre $L(u, t) = L(u, x) \cdot L(x, t)$ [5]; opere, además, una tasa instantánea (nominal) de capitalización $\delta(u)$ [5] y sean $L(u, t)$ y $\delta(u)$ funciones continuas en $(0, n)$, o al máximo con un número finito de discontinuidades de primera especie.

Considérese el problema de determinar la cuantía del capital acumulado al tiempo n, que se indicará con $C(n)$, referido financieramente a ese mismo momento n [6].

Por definición se tendrá:

$$C(n) = C(0) \cdot L(0, n) \qquad [2]$$

además:

$$C(t) = C(0) + C(0) \int_0 L(0, u)\ \delta(u) du =$$

$$= C(0) \left[1 + \int_0^t L(0, u)\ \delta(u) du \right] = c(0) \cdot L(0, t)$$

$$\therefore \quad L(0, t) = 1 + \int_0^t L(0, u)\ \delta(u) du$$

y derivando respecto a t

$$L'(0, t) = L(0, t)\ \delta(t)$$

$$\frac{L'(0, t)}{L(0, t)} = \frac{d}{dt} \ln L(0, t) = \delta(t)$$

e integrando en $(0, n)$

$$\int_0^n \frac{d}{dt} \ln L(0, t) dt = \ln L(0, t) \int_0^n =$$

$$= \ln L(0, n) - \ln L(0, 0) = \int_0^n \delta(t) dt$$

$$\therefore \qquad \ln \frac{L(0, n)}{L(0, 0)} = \int_0^n \delta(t) dt$$

---

(5) Condición necesaria y suficiente para que una ley de capitalización sea excindible por producto es que la tasa instantánea de interés no dependa de la época inicial de inversión. Intra, Sección 1 del Apéndice.

(6) Si la ley de capitalización es excindible por producto no tiene especial interés considerar el valor $C(t, r)$, capital acumulado

$$\therefore \quad \frac{L(0,\ n)}{L(0,\ 0)} = \exp\left\{\int_0^n \delta(t)dt\right\}$$

$$L(0,\ n) = L(0,\ 0)\ \exp\left\{\int_0^n \delta(t)dt\right\}$$

$$L(0,\ n) = \exp\left\{\int_0^n \delta(t)dt\right\} \text{(7)} \qquad [3]$$

y sustituyendo en [2]:

$$C(n) = C(0)\ \exp\left\{\int_0^n \delta(t)dt\right\}$$

que es la expresión del capital acumulado al tiempo n, referido financieramente a ese mismo momento.

Capital acumulado por un grupo de contratos (8).

En el período estadístico (T_0, T_1) se observa un grupo de contratos, todos de igual tipo, idéntica antigüedad e igual edad de emisión, con el objeto de determinar el capital acumulado por cada uno al tiempo $t \geqslant u$.

Un contrato será tomado en consideración únicamente si perteneciendo al tiempo u al conjunto 1(u) ha permanecido en él hasta el tiempo t, formando, en consecuencia, parte del grupo 1(t) (8).

a) *Ingresos de la cartera.*

Los ingresos de la cartera bajo observación estén constituídos por las primas de tarifa P″(u) pagadas por los contratos observados y por los intereses devengados por ellas.

---

al momento t y referido financieramente al momento r; si la ley de capitalización no fuera excindible por producto dicho problema adquiere particular relieve. Vide Coppini, Op. cit., Cap. V.

(7) L(0, 0) = 1, por la condición 2) impuesta a la ley de capitalización, vide supra.

(8) Supra, nota (1).

b) *Egresos de la cartera.*

Los egresos de la cartera estén constituidos por los rubros siguientes [9]:

1) Gastos de gestión, f(u) [10].
2) Gastos de adquisición, F(u) [10].
3) Gastos de cobro, ε(u) [10].

4) Rentas de permanencia pagadas a los asegurados, S(u). En este rubro se involucran los *dividendos (garantizados) que se paguen a los asegurados, y las rentas propiamente dichas;* puede estimarse sin más como una prima negativa en virtud de la hipótesis que se introducirá respecto a la ley de capitalización, suponiéndola excindible por producto.

5) El valor (unitario) asegurado que se paga al ser eliminado un contrato por la causa α (vgr., *muerte).*

6) El valor (unitario) que se paga al ser eliminado un contrato por la causa β (vgr., *sobrevivencia a una determinada época).*

7) Una alícuota G(u) del capital acumulado C(u) que se paga cuando un contrato es eliminado por la causa γ (verbigracia, *rescisión del contrato).*

8) Una alícuota E(u) del capital acumulado C(u) que se paga cuando el contrato es eliminado por la causa ξ (vgr., *conversión a seguro saldado o prorrogado).*

Contratos tontinarios.

Supóngase, en una primera hipótesis, que los contratos de seguro en vigor obligan a los asegurados al pago de las

---

(9) Con el propósito de adecuar la teoria de las tablas de mutualidad a las prácticas usuales en las compañias privadas de seguro de vida se ha ampliado el modelo de Cantelli en ciertos aspectos (condiciones 5 y 6) y se ha reducido en otros (supuesto de excindibilidad de la ley de capitalización). Vide Cantelli, loc. cit., y Coppini, Op. cit., Cap. V.

(10) Ante, "Bases de cálculo en general", Capítulo III.

primas $P''(u)$, sin derecho a contraprestación alguna. Supóngase, asimismo, que la gestión no comporte costo alguno.

En tales condiciones la alícuota de capital acumulado que corresponde a cada contrato vigente al tiempo t vendrá dado por:

$$C(t) = \frac{1}{l(t)} \int_0^t l(u)\ P''(u)\ L(u, t) du, \qquad t \geqslant u$$

Si en la colectividad observada opera una única causa de eliminación α, con tasa instantánea (nominal) $\alpha(u)$, se tendrá por la ecuación [1] de este capítulo:

$$l(t) = l(0)\ e^{-\int_0^t \alpha(u) du} \qquad t \geqslant u$$

$$\therefore \quad \frac{l(u)}{l(t)} = \frac{l(0)\ e^{-\int^u \alpha(u) du}}{l(0)\ e^{-\int^t \alpha(u) du}} = e^{\int^t \alpha(u) du}, \quad t \geqslant u \qquad [5]$$

y en consecuencia la *probabilidad de permanencia* en el grupo de la edad u hasta la edad $t (> u)$, será:

$$p(u, t) = e^{-\int_u^t \alpha(u) du}, \qquad t \geqslant u \qquad [6]$$

Se tendrá, por las ecuaciones [3] y [5] anteriores:

$$\frac{l(u)\ L(u, t)}{l(t)} = e^{\int_u^t [\alpha(u) + \delta(u)] du}$$

y en consecuencia,

$$\begin{aligned} C(t) &= \frac{1}{l(t)} \int_0^t l(u)\ P''(u)\ L(u, t) du = \\ &= \int_0^t P''(u)\ \frac{l(u)\ L(u, t)}{l(t)}\ du = \\ &= \int_0^t P''(u)\ e^{\int^t [\alpha(s) + \delta(s)]\ ds}\ du \end{aligned} \qquad [7]$$

Esta expresión, con las variantes del caso, constituye uno de los teoremas fundamentales de la matemática del seguro de vida [11].

Si hacemos $\varphi(s) = \alpha(s) + \delta(s)$, la ecuación [7] se transforma en la siguiente:

$$C(t) = \int_0^t P''(u)\, e^{\int_u^t \varphi(s)\,ds}\, du \qquad [8]$$

que determina la cuantía del capital acumulado, respecto de cada contrato vigente al tiempo t, en un régimen tontinario operado sin costo alguno de gestión y sin brindar contraprestación alguna a los asegurados.

Gestión de una cartera normal de seguros.

Seguidamente deben considerarse las variaciones que introducen las condiciones en que normalmente se opera una cartera de seguros (vide supra), en la determinación del capital acumulado para cada uno de los contratos existentes al tiempo t.

En tales condiciones el capital total acumulado al tiempo t será:

$$\begin{aligned} 1(t)\,C(t) = & \int_0^t 1(u)\,P''(u)\,L(u,t)\,du - \int_0^t 1(u)\,f(u)\,L(u,t)\,du - \\ & - \int_0^t 1(u)\,F(u)\,L(u,t)\,du - \int_0^t 1(u)\,\varepsilon(u)\,L(u,t)\,du - \\ & - \int_0^t 1(u)\,s(u)\,L(u,t)\,du - \int_0^t 1(u)\,\alpha(u)\,L(u,t)\,du - \\ & - \int_0^t 1(u)\,\beta(u)\,L(u,t)\,du - \end{aligned}$$

---

(11) "... for a single life annuity... any addition (constant throught or varying with the duration) to the total force of decrement is equivalent to the same addition to the force of interest..." P. F. Hooker y L. H. Longley-Cook, Life and Other Contingencies, Volumen II, Cap. 23, párrafo 4, pág. 73. Cambridge University Press, 1957.

$$-\int_0^t 1(u)\ \gamma(u)\ G(u)\ C(u)\ L(u, t)du\ -$$

$$-\int_0^t 1(u)\ \xi(u)\ E(u)\ C(u)\ L(u, t)du =$$

$$=\int_0^t 1(u)\ \Big[P''(u) - f(u) - F(u) - E(u) - S(u) -$$

$$- \alpha(u) - \beta(u)\Big] L(u, t)du$$

$$-\int_0^t 1(u)\ \Big[\gamma(u)\ G(u) + \xi(u)\ E(u)\Big]\ C(u)\ L(u,t)du$$

y haciendo

$$P^{x}(u) = P''(u) - f(u) - F(u) - \varepsilon(u) -$$
$$- S(u) - \alpha(u) - \beta(u) \qquad [9]$$

$$G^{x}(u) = \gamma(u)\ G(u) + \xi(u)\ E(u) \qquad [10]$$

resulta

$$[11]$$

$$1(t)\ C(t) = \int_0^t 1(u)\ P^{x}(u)\ L(u, t)du\ -$$
$$-\int_0^t 1(u)\ G^{x}(u)\ C(u)\ L(u, t)du$$

y dividiendo por L(0, t) (12):

$$\frac{1(t)\ C(t)}{L(0,\ t)} = \int^t \frac{1(u)\ P^{x}(u)}{L(0,\ u)}\, du\ -$$
$$-\int_0^t \frac{1(u)\ G^{x}(u)\ C(u)}{L(0,\ u)}\, du$$

y derivando respecto a t:

$$\frac{L(0,\ t)\ [1'(t)\ C(t) + C'(t)\ 1(t)] - L'(0,\ t)\ 1(t)\ C(t)}{L(0,\ t)^2} =$$

$$= \frac{1(t)\ P^{x}(t)}{L(0,\ t)} - \frac{1(t)\ G^{x}(t)\ C(t)}{L(0,\ t)}$$

---

(12) L(0, t) = L(0, u) · L(u, t) en virtud de la propiedad de excindibilidad.

$$1'(t)\ C(t) + 1(t)\ C'(t) - \frac{L'(0,\ t)\ 1(t)\ C(t)}{L(0,\ t)} +$$
$$+ 1(t)\ G^{x}(t)\ C(t) = 1(t).\ P^{x}(t)$$

$$C(t)\ \frac{1'(t)}{1(t)} - C(t)\ \frac{L'(0,\ t)}{L(0,\ t)} + G^{x}(t)\ C(t) + C'(t) = P^{x}(t)$$

$$C(t)\left[\frac{1'(t)}{1(t)} - \frac{L'(0,\ t)}{L(0,\ t)} + G^{x}(t)\right] + C'(t) = P^{x}(t) \qquad [12]$$

por la ecuación [1] resulta ser

$$\frac{1'(t)}{1(t)} = -\alpha(t) - \beta(t) - \gamma(t) - \xi(t) \qquad [13]$$

y por la ecuación [3] resulta ser

$$\frac{L'(0,\ t)}{L(0,\ t)} = \delta(t) \qquad [14]$$

y, en consecuencia, la ecuación [12], habida cuenta de la [10] equivale a

$$P^{x}(t) = -C(t)\Big[\alpha(t) + \beta(t) + \gamma(t) + \xi(t) - \delta(t) -$$
$$-\gamma(t)\ G(t) - \xi(t)\ E(t)\Big] + C'(t)$$
$$= -C(t)\Big[\alpha(t) + \beta(t) + \gamma(t)\ (1 - G(t) +$$
$$+ \xi(t)\ (1 - E(t) + \delta(t)\Big] + C'(t)$$

e introduciendo la variable $f^{x}(t)$, que se denominará *tasa instantánea de mutualidad*, expresada por

$$f^{x}(t) = \alpha(t) + \beta(t) + \gamma(t)\ (1 - G(t) + \xi(t)\ (1 - E(t) \qquad [15]^{(13)}$$

$$P^{x}(t) = -C(t)\left[f^{x}(t) + \delta(t)\right] + C'(t)$$

$$\therefore\quad C'(t) = C(t)\left[f^{x}(t) + \delta(t)\right] + P^{x}(t) \qquad [16]$$

que es una ecuación diferencial lineal no homogénea de pri-

(13) Para una expresión más general de $f^{x}(t)$ vide infra nota (15).

mer orden existe una solución única, dado el vínculo inicial de ser C(0) = 0 y vendrá dada por:

$$C(t) = \int_0^t P^{x}(u)\, e^{\int_u^t [f^{x}(s) + \delta(s)]\, ds}\, du \qquad [17]\ ^{(14)}$$

$$= \int_0^t P^{x}(u)\, e^{\int_u^t f^{x}(s)\, ds}\, e^{\int_u^t \delta(s)\, ds}\, du$$

y esta ecuación es del mismo tipo que la [7], lo que demuestra que el modelo aplicable a una gestión tontinaria y a la de una genérica gestión aseguradora son idénticos, en cuanto se sustituyan las causas de eliminación del modelo tontinario por una tasa *ficticia* de eliminación $f^{x}(u)$ [15] y por una ley de contribución $P^{x}(u)$ a la ley contributiva $P''(u)$ que opera en el modelo tontinario.

---

[14] Vide Lezioni di Analisi Matematica, Aldo Ghizzetti; Vol. II, Cap. XXIV, párrafo 4, pág. 382. Eredi Virgilio Veschi, Roma, 1954.

[15] Esta tasa ficticia, como se ha demostrado, es *única, independiente de la ley de contribución* y de la de *capitalización*. En un modelo tontinario en que operen varias tasas de eliminación la ley de eliminación total resulta ser la suma de las tasas parciales de eliminación, como es inmediato de la ecuación [7]; en el modelo de gestión aseguradora genérica que se ha desarrollado en este estudio las tasas $\alpha(u)$ y $\beta(u)$ no se hallan reducidas por ningún factor, puesto que se supuso que la eliminación de la colectividad por dichas causas comportaba la percepción del *capital asegurado*, o lo que es lo mismo, que no se les reconoce participación alguna a los eliminados por esas causas en el *capital acumulado*, incidiendo el costo total de la prestación sobre la ley contributiva $p^{x}(u)$. La fórmula general de la tasa instantánea de mutualidad no es consecuentemente la expresada, sino que vendrá dada por

$$f^{x}(t) = \alpha(t)\,[1 - A(t)] + \beta(t)\,[1 - B(t)] + \gamma(t)\,[1 - G(t)] + \xi(t)\,[1 - E(t)]$$

donde A(t), B(t), G(t), E(t) son las alícuotas del capital acumulado que se reconocen a cada eliminado de la colectividad con antigüedad t de seguro.

Conclusión.

Resulta de lo anterior que es posible determinar directamente, mediante la utilización de un modelo tontinario, el capital acumulado (o la prima de tarifa) por una genérica gestión de seguros sobre vidas individuales, bastando a dicho fin emplear una ley modificada de contribución $P^x(u)$ y haciendo actuar en la población una tasa ficticia de eliminación $f^x(u)$ (tabla de mutualidad), la cual resulta independiente de la ley de capitalización y de la de contribución, siendo suma de determinadas fracciones de las tasas de eliminación (ver nota [15] anterior).

Por comodidad de exposición se ha fijado en este capítulo como origen (emisión) de todos los contratos la edad cero, hipótesis que, como es evidente, no desvirtúa ni restringe los resultados obtenidos, siendo todas las fórmulas aplicables, *mutatis mutandis*, a cualesquiera edad de emisión de los contratos.

Finalmente, como consecuencia de lo demostrado se concluye que el equilibrio financiero de la gestión aseguradora se mantiene inalterado si se concede el capital acumulado a los contratos que se eliminan y si se obliga a pagar a los que ingresan el capital que deberían haber acumulado a la época de ingreso (pólizas antedatadas) [16].

CAPÍTULO V

DETERMINACION DEL MONTO DE LAS UTILIDADES

Capital acumulado.

Un grupo de contratos de seguros sobre la vida, emitidos todos a clientes de igual edad exacta x y a la fecha de fun-

---

(16) El caso de ingreso de contratos antedatados exige únicamente eliminar el vinculo de colectividad cerrada, punto que parece superfluo tratar. Vide Cantelli, Op. cit., y Coppini, Op. cit., Caps. II y V.

dación de la compañía (que coincide con el inicio del primer ejercicio económico) (1), siendo todos del mismo tipo, se somete a observación en el período estadístico $(0, t_0)$, para determinar el capital efectivamente acumulado por cada uno de ellos.

a) *Ingresos efectivos de la cartera.*

$P''(u)$ = Prima instantánea de tarifa que corresponde pagar a la edad exacta u, por unidad de capital asegurado, y que es igual a $P(u) + P^f(u) + P^F(u) + P^s(u)$ (2).

$P(u)$ = prima instantánea que corresponde pagar a la edad exacta x, por unidad de capital asegurado ("p.i.x.") por la protección principal (prima pura).

$P^f(u)$ = "p.i.x." por gastos de gestión.

$P^F(u)$ = "p.i.x." por gastos de adquisición.

$P^s(u)$ = "p.i.x." por gastos de cobro.

Supóngase además (3) que durante el período haya operado una ley de capitalización $L^o(0, u)$ excindible por producto.

---

(1) El modelo está afectado por vínculos imposibles de llenar en la práctica, pero con oportunas modificaciones se deriva uno de gran simplicidad, sea muy "económico", y "suficientemente representativo". Ver Capítulo I, "Metodología", passim.

(2) Desde un punto de vista estrictamente matemático la expresión debería ser $P''(u)du$, como prima correspondiente de pagar en el intervalo de edad $(u, u + du)$. Ruego al lector excusarme de utilizar esta notación por ser más molesta, en el sobreentendido de que al hacer referencia a tasas instantáneas correspondientes a edades exactas alcanzadas se quiere expresar —con diversa notación— el concepto matemáticamente correcto.

(3) Nuevamente se introduce un vínculo de difícil realización práctica, pero que permite obtener un modelo "suficientemente representativo". Ver Capítulo I, "Metodología", passim.

b) *Egresos efectivos de la cartera* [4].

ba) *Gestión con valores de rescisión garantizados.*

$f^0(u)$ = gastos instantáneos en que se incurre a la edad exacta u, por unidad de capital asegurado ("g.i.x.") por administración (ver nota [2] anterior).

$F^0(u)$ = "g.i.x." por adquisición.

$\varepsilon^0(u)$ = "g.i.x." por cobro.

$S(u)$ = "g.i.x." por el pago de rentas de permanencia.

(unidad) 1 = "g.i.x." al ser eliminado un contrato por la causa $\alpha^0(u)$.

(unidad) 1 = "g.i.x." al ser eliminado un contrato por la causa $\beta^0(u)$.

$C(u)$ = "g.i.x." al ser eliminado un contrato por la causa $\gamma^0(u)$.

$C(u)$ = "g.i.x." al ser eliminado un contrato por la causa $\xi^0(u)$.

bb) *Gestión sin valores de rescisión garantizados.*

Sea la gestión en todo idéntica a la anterior, excepto en que al eliminarse un contrato por las causas $\gamma^0(u)$ y $\xi^0(u)$ se le concede a los asegurados el capital $C^0(u)$, alícuota del capital efectivamente acumulado por el grupo que corresponde al contrato rescindido. Una cláusula contractual de este tipo no se aviene con las prácticas y filosofía de una compañía comercial de seguros, pero es la más conveniente para una sociedad mutualista en que todo asegurado es un asegurado-socio.

---

(4) Los símbolos contraseñados con el índice 0 corresponden a bases de cálculo de segundo orden, en tanto que los carentes de él [C(u) y S(u)] a bases de cálculo de primer orden.

c) *Alícuota que corresponde a cada contrato en el fondo total acumulado al tiempo t_0.*

ca) *Modelo en que se garantizan los valores de rescisión.*

Sin perjuicio de plantear de seguido el problema en un modo estrictamente matemático, parece conveniente hallar la expresión correspondiente por vía de puro razonamiento directo, con el objeto de comprender mejor su significación actuarial.

Al tiempo t_0 todos los contratos tendrán edad alcanzada $x + t_0$ habiendo actuado en la colectividad bases de cálculo de segundo orden; a los contratos eliminados no se les habrá brindado contraprestación alguna que dependa del capital efectivamente acumulado, puesto que C(u) es un valor determinado por cálculo (sea de previo al resultado efectivo de la gestión); en consecuencia, todas las prestaciones recibidas por los asegurados han venido a incidir sobre la prima de tarifa en forma de alícuotas negativas de prima [5]. Se trata, en consecuencia, de un modelo tontinario como el expresado por la ecuación [8] del capítulo IV anterior. Llamando $C^0(x + t_0)$ al capital efectivamente acumulado por cada contrato al tiempo t_0 [6], se tendrá que su expresión vendrá dada por la ecuación siguiente:

---

(5) Ese planteamiento no introduce desequilibrio alguno en tanto opere una ley de capitalización excindible por producto, que como se ha supuesto es la que efectivamente actúa (ver ecuación [17] del capítulo anterior). Si no operara una ley de capitalización excindible por producto no sería dable aceptar, sin más, que las prestaciones a los asegurados se consideren como primas negativas. Véase al respecto Cantelli, loc. cit., págs. 98 y ss., y Coppini, op. cit., Cap. V.

(6) Por $C^0(x + t_0)$ se entiende el capital al tiempo t_0 para un contrato de seguro emitido a la edad x, con antigüedad de seguro t_0. La antigüedad de seguro no es en consecuencia $x + t_0$. Ver infra "Monto de las utilidades", passim.

$$C^0(x + t_0) = \int_x^{x+t_0} \pi^0(u)\; e^{\int_u^{x+t_0} [\varphi^0(s) + \delta^0(s)]ds} du \qquad [1]$$

donde:

$$\pi^0(u) = \Big[P(u) + P^f(u) + P^F(u) + P^\varepsilon(u)\Big] - f^0(u) - F^0(u) - \qquad [2]$$

$$- \varepsilon^0(u) - S(u) - \alpha^0(u) - \beta^0(u) - \gamma^0(u)\; C(u) - \xi^0(u)\; C(u)$$

$$\varphi^0(u) = \alpha^0(u) + \beta^0(u) + \gamma^0(u) + \xi^0(u) \qquad [3]$$

$$\delta^0(u) = \frac{d}{du} \ln L^0(0, u) \qquad [4]$$

siendo la ley de capitalización excindible por producto.

Corresponde seguidamente verificar la ecuación [1], que resulta de los siguientes pasos:

$$1^0(x + t_0)\; C^0(x, t_0) = \int_x^{x+t_0} 1^0(u)\; P''(u)\; L^0(u, x + t_0)du -$$

$$- \int_x^{x+t_0} 1^0(u)\; f^0(u)\; L^0(u, x + t_0)du -$$

$$- \int_x^{x+t_0} 1^0(u)\; \varepsilon^0(u)\; L^0(u, x + t_0)du -$$

$$- \int_x^{x+t_0} 1^0(u)\; F^0(u)\; L^0(u, x + t_0)du -$$

$$- \int_x^{x+t_0} 1^0(u)\; S(u)\; L^0(u, x + t_0)du -$$

$$- \int_x^{x+t_0} 1^0(u)\; \alpha^0(u)\; L^0(u, x + t_0)du -$$

$$- \int_x^{x+t_0} 1^0(u)\; \beta^0(u)\; L^0(u, x + t_0)du -$$

$$- \int_x^{x+t_0} 1^0(u)\; \gamma^0(u)\; C(u)\; L^0(u, x+t_0)du -$$

$$- \int_x^{x+t_0} 1^0(u)\, \xi^0(u)\; C(u)\; L^0(u, x+t_0)du =$$

$$= \int_{x}^{x+t_0} 1^0(u) \Big[P''(u) - \varepsilon^0(u) - f^0(u) -$$

$$- F^0(u) - S(u) - \alpha^0(u) - \beta^0(u) -$$

$$- \gamma^0(u)\ C(u) - \xi^0(u)\ C(u) \Big] \times$$

$$\times\ L^0(u, x + t_0) du$$

y recordando la ecuación [2] y la expresión $P''(u)$ dada en el párrafo (a) anterior, se tiene

$$1^0(x + t_0)\ C^0(x + t_0) = \int_{x}^{x+t_0} 1^0(u)\ \pi^0(u)\ L^0(u, x + t_0) du \qquad [5]$$

A su vez, conforme a la ecuación [1] del capítulo IV anterior resulta que $1^0(x + t_0)$ viene dado (habida consideración de ser $1^0(x) = 1(x)$), por:

$$1^0(x + t_0) = 1(x)\ e^{-\int_{x}^{x+t_0} [\alpha^0(s) + \beta^0(s) + \gamma^0(s) + \xi^0(s)] ds}$$

y sustituyendo en la ecuación [5] se obtiene:

$$C^0(x + t_0) = \int_{x}^{x+t_0} \frac{1^0(u)}{1^0(x + t_0)}\ \pi^0(u)\ L^0(u, x + t_0) du$$

$$\int_{x}^{x+t_0} \left\{ \frac{1(x)}{1(x)}\ e^{-\int_{x}^{u} [\alpha^0(s) + \beta^0(u) + \gamma^0(s) + \xi^0(s)] ds} \times \right.$$

$$\left. \times\ e^{\int_{x}^{x+t_0} [\alpha^0(s) + \beta^0(s) + \gamma^0(s) + \xi^0(s)] ds} \right\} \pi^0(u)\ L^0(u, x + t_0) du =$$

$$= \int_{x}^{x+t_0} \left\{ e^{\int_{u}^{x+t_0} [\alpha^0(s) + \beta^0(s) + \gamma^0(s) + \xi^0(s)] ds} \right\} \pi^0(u) L^0(u, x + t_0) du$$

que teniendo consideración de la ecuación [3] anterior se transforma en la siguiente

$$C^{0}(x+t_{0}) = \int_{x}^{x+t_{0}} \pi^{0}(u)\, e^{\int_{u}^{x+t_{0}} \varphi^{0}(s)\,ds}\, L^{0}(u, x+t_{0})\,du$$

por la ecuación [3] del capítulo IV anterior se tiene, además,

$$L^{0}(u, x+t_{0}) = e^{\int_{u}^{x+t_{0}} \delta^{0}(s)\,ds}.$$

y sustituyendo en la última de las ecuaciones se obtiene

$$C^{0}(x+t_{0}) = \int_{x}^{x-t_{0}} \pi^{0}(u)\, e^{\int_{u}^{x-t_{0}} \varphi^{0}(s)\,ds}\, e^{\int_{u}^{x+t_{0}} \delta^{0}(s)\,ds}\,du =$$

$$= \int_{x}^{x+t_{0}} \pi^{0}(u)\, e^{\int_{u}^{x+t_{0}} [\varphi^{0}(s)+\delta^{0}(s)]\,ds}\,du$$

que es la [1] c.d.d.

cb) *Modelo mutualista, sea sin valores de rescisión garantizados.*

En las condiciones del párrafo (bb) anterior el capital acumulado será diverso del expresado por la ecuación [1] de este mismo capítulo.

Es conveniente también en este caso hallar la solución primero por un razonamiento directo, a fin de mejor comprender su significado actuarial, para luego comprobarla mediante el desarrollo matemático correspondiente.

La prima de tarifa $P''(u)$ se verá, en las nuevas condiciones, afectada por las cuotas (negativas) de prima correspondientes a los gastos industriales y a las prestaciones garantizadas a los asegurados, *pero no por las devoluciones de capitales acumulados que se efectúen a consecuencia de rescisiones,* ya que estas sumas son determinadas como resultado de la gestión y en tal manera que correspondan al capital total acumulado por el individuo que se retira de la colectividad [7]; esto equivale, para el resultado de la gestión aseguradora, a considerar que el contrato rescindido no perteneció nunca a la cartera y, en consecuencia, la tasa de eliminación que efectivamente operará en la colectividad va a ser igual a $\varphi_1^0(u) = \alpha^0(u) + \beta^0(u)$ que es independiente de las tasas $\gamma^0(u)$ y $\xi^0(u)$, las cuales no influirán en nada el resultado de la gestión.

Lo anterior se deduce inmediatamente como corolario de la teoría de las tablas de mutualidad, que determinan el capital acumulado en función de una *tasa ficticia de eliminación* definida por (ver capítulo IV, ecuación [15] y nota [15]):

$$f^x(t) = \alpha(t) + \beta(t) + \gamma(t)\,[1 - G(t)] + \xi(t)\,[1 - E(t)]$$

donde $\gamma(t)$ y $\xi(t)$ son causas de rescisión y $G(t)$ y $E(t)$ las alícuotas de capital acumulado devueltas al producirse una rescisión. Es evidente que de ser $G(t)$, o bien $E(t)$, un valor unitario desaparece la causa $\gamma(t)$, o la $\xi(t)$, como factor determinante del capital acumulado.

En consecuencia, el capital acumulado al tiempo t_0 por el modelo mutualista bajo observación, vendrá dado por la ecuación siguiente:

$$C_1^0(x + t_0) =$$

$$= \int_x^{x+t_0} P^0(u)\, e^{\int_u^{x+t_0} \varphi_1^0(s)ds}\; e^{\int_u^{x+t_0} \delta^0(s)ds}\, du \qquad [6]$$

donde:

$$P^0(u) = P''(u) - f^0(u) - F^0(u) - \varepsilon^0(u) - S(u) - \alpha^0(u) - \beta^0(u) \qquad [7]$$

$$\varphi_1^0(u) = \alpha^0(u) + \beta^0(u) \qquad [8]$$

$$\delta^0(u) = \frac{d}{du} \ln L^0(0, u)$$

siendo la ley de capitalización excindible por producto.

---

(7) Esta particular condición, sea la de no hacer detracción o extorsión alguna sobre los capitales acumulados por motivo de rescisión, es una de las impuestas en (bb).

La demostración de la ecuación [6] se obtiene mediante los siguientes pasos:

$$1^0(x+t_0)\, C_1^0(x+t_0) = \int_x^{x+t_0} 1^0(u) \Big[P''(u) - f^0(u) - F^0(u) - \varepsilon^0(u) - S(u) - \alpha^0(u) - \beta^0(u)\Big] L^0(u, x+t_0)du - \int_x^{x+t_0} 1^0(u)\Big[\gamma^0(u) + \xi^0(u)\Big]C^0(u)\; L^0(u, x+t_0)du$$

$$1^0(x+t_0)\, C_1^0(x+t_0) = \int_x^{x+t_0} 1^0(u)\; P^0(u)\; L^0(u, x+t_0)du - \int_x^{x+t_0} 1^0(u)\; G^0(u)\; C^0(u)\; L^0(u, x+t_0)du \qquad [9]$$

y esta ecuación es del mismo tipo que la [11] del capítulo IV anterior, sustituyendo los valores de $P^x(u)$ y $G^x(u)$ allí indicados por los dados por las ecuaciones siguientes:

$$P^0(u) = P''(u) - f^0(u) - F^0(u) - \delta^0(u) - S(u) - \alpha^0(u) - \beta^0(u)$$
$$G^0(u) = G(u) \cdot \gamma^0(u) + \xi^0(u)\; E(u) = \gamma^0(u) + \xi^0(u)$$

ya que $G(u) = E(u) = 1$.

A la ecuación [9], mediante pasajes como los empleados para la solución de la [11] del capítulo IV, corresponde una solución del tipo de la [17] de aquel mismo capítulo, sea:

$$C_1^0(x+t_0) = \int_x^{x+t_0} P^0(u)\; e^{\int_u^{x+t} \varphi_1(s)ds}\; e^{\int_u^{x+t_0} \delta^0(s)ds}\, du$$

con $\varphi^1(s)$ dada por la ecuación [8] anterior, c.d.d.

Monto y estructura de las utilidades.

a) *Variación de la notación utilizada.*

Mediante el modelo desarrollado en los párrafos anteriores de este capítulo es posible resolver los problemas planteados en el presente estudio, sea la determinación del monto de la utilidad y la estructura productora de utilidades de los diversos contratos.

Al desarrollar el modelo en referencia se ha incurrido de propósito en una notación que no es correcta, pero que presentaba ventajas para resolver las distintas ecuaciones. Corresponde, antes de seguir adelante, hacer explícitas las convenciones introducidas y eliminar aquellas que no corresponden al modelo, simplificándolo a la vez con hipótesis adicionales que lo adapten (lo conviertan en "más representativo") a la práctica de las compañías aseguradoras.

En este capítulo se ha supuesto que todos los contratos ingresan al seguro en el año cero (fundación de la compañía) con edad exacta x; y se ha indicado el capital acumulado al tiempo t_0 mediante los símbolos $C(x + t_0)$, $C^0(x + t_0)$ y $C_1^0(x + t_0)$.

Si se compara esta notación con la empleada en el capítulo anterior, es evidente la asimetría, pues conforme a aquélla $C(x + t_0)$ corresponde al capital acumulado por un contrato ingresado con edad cero y antigüedad de seguro $x + t_0$; la misma observación vale para los valores de $C^0(x + t_0)$ y $C_1^0(x + t_0)$ de los párrafos anteriores, respecto a la notación empleada en el capítulo anterior.

Para los desarrollos siguientes de esta sección es conveniente indicar con ${}_1C(x + t_0)$, ${}_1C^0(x + t_0)$ y ${}_1C_1^0(x + t_0)$ las expresiones obtenidas en el presente capítulo y con $C(x + t_0)$, $C^0(x + t_0)$ y $C_1^0(x + t_0)$ a los capitales acumulados obtenidos según el modelo desarrollado en el capítulo anterior; consecuentemente resulta:

$$C(x + t_0) = C(x) + {}_1C(x + t_0)$$
$$C^0(x + t_0) = C^0(x) + {}_1C^0(x + t_0)$$
$$C_1^0(x + t_0) = C_1^0(x) + {}_1C_1^0(x + t_0)$$

Las ecuaciones anteriores indican la modificación que habría de introducirse a los desarrollos de este capítulo para restablecer la simetría con las fórmulas de los capítulos anteriores. Se trata, en fin de cuentas, de la adición de una constante de integración C(x), por lo que $C(x + t_0) = {}_1C(x + t_0)$ [8] excepto una constante de integración; esto

(8) Relaciones semejantes valen para $C^0(x + t_0)$ y $C^0_1(x + t_0)$; $C^0(x)$ y $C_1(x)$.

no afecta en nada los razonamientos y desarrollos del presente capítulo, ya que la asimetría entre ambas notaciones es consecuencia de una traslación aritmética (cambio de origen), que en virtud del principio de Barrow-Torricelli resulta lícita. Esto desde el punto de vista matemático; desde el punto de vista actuarial las cosas presentan un diverso cariz que se analiza a continuación.

Actuarialmente, la corrección indicada significa que un asegurado con edad de ingreso x pagará la misma prima que corresponda a su edad alcanzada para un asegurado con edad de ingreso cero, pero deberá cubrir al ente asegurador el capital C(x) que habría acumulado de pertenecer al grupo desde la edad cero. Si el valor de C(x) resultara cero, nada debería cubrir y si negativo, le correspondería percibir un subsidio de ingreso al seguro. Respecto a las tarifas, se tendría una única tarifa en función de edades alcanzadas, pero dependiente de una única edad de ingreso.

Tal esquema representa el modelo usual en una gestión de seguros sociales, con la salvedad de que los capitales acumulados no se cobran o pagan a los asegurados individualmente sino a la colectividad de ellos, pero es totalmente insuficiente para representar una gestión contractual de seguros sobre la duración de la vida humana.

En una gestión contractual de seguros C(x) [9] debe ser siempre igual a cero, siendo x la edad de ingreso, y además las primas a pagar dependerán tanto de la edad alcanzada como de la edad de ingreso, sea que las tarifas resultan ser un funcional de las edades de ingreso, y no pueden referirse a una única edad de ingreso.

Conviene, pues, variar la notación hasta ahora empleada para mejor representar las condiciones de gestión de las compañías de seguros sobre la duración de la vida humana. Al símbolo $C(x + t_0)$ [8] conforme se ha definido en este capítulo corresponderá, en consecuencia, la notación ${}_xC(t_0)$, con la cual se pone en evidencia que el capital acumulado es

---

(9) Ibídem, pág. 45.

función de la edad de ingreso y de la antigüedad de seguro [10].

Las ecuaciones correspondientes al capital acumulado en cada una de las diversas hipótesis hasta ahora estudiadas, resultan ser las siguientes:

Bases de cálculo de primer orden, gestión normal de seguros.

$$ {}_{x}C(t_0) = \int_{x}^{x+t_0} P^{x}(u)\, e^{\int_{u}^{x+t_0} [f^{x}(s) + \delta(s)]\,ds}\, du \qquad [10] $$

Bases de cálculo de segundo orden, gestión normal de seguros.

$$ {}_{x}C^{0}(t_0) = \int_{x}^{x+t_0} \pi^{0}(u)\, e^{\int_{u}^{x+t_0} [\varphi^{0}(s) + \delta^{0}(s)]\,ds}\, du \qquad [11] $$

Bases de cálculo de segundo orden, gestión mutualista de seguros.

$$ {}_{x}C^{0}_{1}(t_0) = \int_{x}^{x+t_0} P^{0}(u)\, e^{\int_{u}^{x+t_0} [\varphi^{0}_{1}(s) + \delta^{0}(s)]\,ds}\, du \qquad [12] $$

b) *Monto de las utilidades.*

ba) *Gestión normal de seguros.*

Si la gestión observada reúne los requisitos indicados en el párrafo (ca) de la sección CAPITAL ACUMULADO de este mismo capítulo, la compañía percibirá como ingresos, pagados por los asegurados con edad de ingreso x y edad alcanzada u, que serán en número de $l^{0}(u)$, la suma $l^{0}(u)P''(u)$ (ver nota [2] de este mismo capítulo); para dicho grupo y en ese momento incurrirá, conforme a las bases de cálculo de primer orden, en los gastos siguientes:

---

[10] La notación usualmente empleada en los textos de matemática actuarial sería la ${}_{t_0}C(x)$.

$$1^{0}(u)\left[f(u)+F(u)+\varepsilon(u)+S(u)+\alpha(u)+\beta(u)+\right.$$
$$\left.+\gamma(u)\,C(u)+\xi(u)\,C(u)\right]^{(11)}$$

En consecuencia, el balance, a ese momento y sin considerar la ley de capitalización, conforme a las bases de cálculo de primer orden, será de:

$$1^{0}(u)\left[P''(u)-f(u)-F(u)-\varepsilon(u)-S(u)-\alpha(u)-\beta(u)-\right.$$
$$\left.-\gamma(u)\,C(u)-\xi(u)\,C(u)\right]=1^{0}(u)\,P^{\times}(u)$$

El desarrollo efectivo de la gestión, por su parte, dará el balance siguiente:

$$1^{0}(u)\left[P''(u)-f^{0}(u)-F^{0}(u)-\varepsilon^{0}(u)-S(u)-\alpha^{0}(u)-\right.$$
$$\left.-\beta^{0}(u)-\gamma^{0}(u)\,C(u)-\xi^{0}(u)\,C(u)\right]=1^{0}(u)\,\pi^{0}(u)$$

y de la diferencia entre ambos balances resultará la utilidad obtenida en ese momento, sin considerar la ley de capitalización, por el grupo observado, que será igual a U(u) y vendrá dada por:

$$1^{0}(u)\left[P^{\times}(u)-\pi^{0}(u)\right]=1^{0}(u)\,\pi'(u)=1^{0}(u)\,U(u) \qquad [13]$$

El total de los contratos ingresados con edad x y que han permanecido en el grupo hasta alcanzar la edad $x+t_0$ habrá acumulado, teniendo consideración de que en la colectividad ha operado una ley de capitalización $L^{0}(x, x+t_0)$, la cantidad $1^{0}(u)\ {}_{x}U^{0}(t_0)$, dada por la ecuación siguiente:

$$1^{0}(x+t_0)\ {}_{x}U^{0}(t_0)=\int_{x}^{x+t_0}1^{0}(u)\,U(u)\,L^{0}(u,x+t_0)\,du=$$
$$=\int_{x}^{x+t_0}1^{0}(u)\left[P^{\times}(u)-\pi^{0}(u)\right]L^{0}(u,x+t_0)\,du$$

(11) Nótese que la población activa debe ser calculada conforme a las bases de cálculo de segundo orden, porque los ingresos provienen de los asegurados *efectivamente* presentes (bases de cálculo de segundo orden) y no de los que teóricamente deberían continuar perteneciendo al grupo.

$$= \int_{x}^{x+t_0} 1^0(u)\ \pi'(u)\ L^0(u,\ x + t_0)du$$

y dividiendo por

$$1^0(x + t_0) = e^{\int_0^{x+t_0} \varphi^0(s)ds}$$

se obtendrá ${}_xU^0(t_0)$, utilidad acumulada correspondiente a cada contrato presente en el colectivo, con edad de ingreso x y antigüedad de seguro t_0, a la que corresponde la ecuación siguiente:

$${}_xU^0(t_0) = \int_{x}^{x+t_0} \frac{1^0(u)}{1^0(x + t_0)}\ \pi'(u)\ L^0(u,\ x + t_0)du =$$

$$= \int_{x}^{x+t_0} \pi'(u)\ e^{\int_u^{x+t_0} [\varphi^0(s) + \delta^0(s)]\,ds} du \qquad [14]$$

de donde resulta que:

$${}_xU^0(t_0) = \pi'{}_xC^0(t_0) \qquad [15]$$

es decir, que la utilidad acumulada por cada contrato es igual al capital acumulado, según las bases de cálculo de segundo orden, por un seguro del mismo tipo, pero con prima de tarifa $\pi'(u) = P^x(u) - \pi^0(u)$, diferencia entre la prima con bases de cálculo de primer y segundo orden del contrato bajo observación.

bb) *Gestión mutualista de seguros.*

Si la gestión observada reúne los requisitos del párrafo (cb) de la sección CAPITAL ACUMULADO de este mismo capítulo, la compañía percibirá por ingresos de tarifa de los asegurados con edad de ingreso x y edad alcanzada u, que serán en número $1^0(u)$, la suma (ver nota [2] de este mismo capítulo): $1^0(u)\ P''(u)$; para ese grupo en ese momento incurrirá, conforme a las bases de cálculo de primer orden en los gastos siguientes:

$$1^0(u) \left[f(u) - F(u) - \varepsilon(u) - S(u) - \alpha(u) - \beta(u) \right]$$

sin que se tenga consideración de las alícuotas de capital acumulado que se devuelven por rescisión o conversión de los contratos, por cuanto a la ocurrencia de esos eventos se devuelve al asegurado el capital *efectivamente* acumulado por su contrato y, en consecuencia, las tasas $\gamma(u)$ y $\xi(u)$ no tienen influencia sobre la prima, por no constituir dichas devoluciones prestaciones que se brinden al asegurado (ver párrafo (cb) de la sección CAPITAL ACUMULADO de este mismo capítulo).

En consecuencia, el balance, según las bases de cálculo de primer orden, será $1^o(u)\ P'(u)$ y vendrá dado por:

$$1^o(u)\left[P''(u) - f(u) - F(u) - \varepsilon(u) - S(u) - \alpha(u) - \beta(u)\right] = \\ = 1^o(u)\ P'(u)$$

El desarrollo efectivo de la gestión, por su parte, dará el resultado siguiente:

$$1^o(u)\left[P''(u) - f^o(u) - F^o(u) - \varepsilon^o(u) - S(u) - \alpha^o(u) - \beta^o(u)\right] = \\ = 1^o(u)\ P^o(u)\ ^{(12)}$$

y la diferencia de ambos balances será la utilidad en ese momento, sin considerar la ley de capitalización, para el grupo observado, que se indicará con $U^o(u)$ y vendrá dada por:

$$1^o(u)\left[P'(u) - P^o(u)\right] = 1^o(u)\ \pi_1^o(u) = U^o(u) \qquad [16]$$

mediante pasajes del todo similares a los empleados en (ba) anterior resulta que la utilidad correspondiente a cada contrato presente en el colectivo, con edad de emisión x y antigüedad de seguro t_0, vendrá expresada por ${}_xU_1^0(t_0)$ a la que corresponde la ecuación:

$${}_xU_1^0(t_0) = \int_x^{x-t_0} \pi_1^0(u)\ e^{\int_u^{x+t_0} [\varphi_1^0(s) + \delta^0(s)]ds} du = \\ = \pi_1^0,\ {}_xC_1^0(t_0) \qquad [17]$$

(12) Ver ecuación [7] y párrafo (cb) de la sección "Capital acumulado", ambos de este mismo Capítulo.

d) *Conclusión.*

Los resultados anteriores indican que el problema de las utilidades acumuladas por una gestión aseguradora, o, lo que es lo mismo, el de la divergencia entre bases de cálculo de primer y segundo orden, constituye un caso particular de la teoría de las tablas de mutualidad (o de los capitales acumulados).

Mediante la aplicación de ella le es posible al actuario determinar la *cuantía* de las utilidades y la *estructura productora de utilidades* de cada contrato.

A lo primero *(cuantía)* dan respuesta las ecuaciones [18] y [19] y las que de ellas se siguen; a lo segundo *(estructura productora de utilidades)*, los valores $\pi'(u)$ y $\pi_1^0(u)$.

El modelo de tablas de mutualidad además de las ventajas de su generalidad irrestricta [14], ofrece la de su simetría con los resultados de la ciencia económica.

Ya en la nota [4] del capítulo III se indicó que el cálculo económico requiere una revisión permanente del plan económico utilizando los resultados "ex post" de planes anteriores; un plan económico no es racional si se lleva adelante sin considerar los resultados efectivos de planes anteriores. Es evidente que toda acción humana procede de acuerdo con este principio y que no sería por virtud de la teoría de las tablas de mutualidad que las compañías aseguradoras iban a conformarse a él. Ciertamente que desde siempre han conformado su actuar al principio económico.

Pero no basta con que el principio económico informe (subjetivamente) el plan para que éste resulte (objetivamente) conforme a él. Porque para la conformidad objetiva es necesario disponer de instrumentos de cálculo económico que sean aptos para reflejar los resultados "ex post" de los planes. Ahora bien, las $\pi^1(u)$ y $\pi_1^0(u)$ son precisamente instrumentos de este tipo y la teoría de las tablas de mutuali-

---

[14] En el curso del desarrollo de la teoría se han introducido —con el único objeto de simplificar la exposición y mantenerla dentro de las necesidades de la práctica aseguradora— limitaciones que pueden levantarse sin mayor dificultad.

dad resulta, en consecuencia, un aporte tan importante, para una compañía aseguradora, como el empleo de una unidad monetaria o de una adecuada técnica contable; herramienta indispensable para administrar racionalmente la gestión de seguros.

La técnica actuarial no puede detenerse en el punto en que comprueba que se ha producido utilidad, y evaluar la gestión conforme a bases de cálculo de primer orden.

Ello equivaldría a suponer que aquellas bases son representativas del desarrollo efectivo de la gestión; pero si se han producido utilidades es clara indicación de su no representatividad, que de otro modo ninguna utilidad se habría producido (salvo la motivada por desviaciones aleatorias, de la que se tratará más adelante en el capítulo VI); la utilidad (o pérdida) están, sin embargo, allí para hacer dudar a la técnica actuarial y poner en entredicho las bases de cálculo de primer orden. Desoír esta "alarma" y continuar adherido a aquellas bases, es contradicción del principio de actividad (objetivamente) racional.

Se hace en consecuencia necesario revisar las funciones biométricas y la ley de capitalización para evaluar las causas productoras de la utilidad. Esta revisión es posible como un subproducto o caso particular de la teoría de las tablas de mutualidad. Basta al respecto con reflexionar que considerando ser las alícuotas de capital acumulado que se devuelven a los eliminados constantemente iguales a cero, el modelo desarrollado se transforma en uno de determinación de frecuencias de eventos asignados. El mismo Cantelli (loc. cit.), efectuó la demostración en lo relativo a la determinación de probabilidades independientes en el sentido de Karup, que resultan un caso particular de la teoría de las tablas de mutualidad. Mediante la generalización de esa teoría que aparece en Coppini (loc. cit. cap. V), resulta que la determinación de frecuencias para eventos asignados, en las hipótesis más generalizadas posibles (poblaciones circulares abiertas), continúa siendo un caso particular de dicha teoría.

El modelo hasta ahora desarrollado es, no obstante su generalidad, insuficiente, pues él supone la determinación de utilidades en el período estadístico $(0, T_0)$ o lo que es lo mismo, la presencia de cada contrato desde su edad de ingreso para determinar la utilidad acumulada: los contratos deberían ser, en consecuencia, observados durante el período $(x, x + t_0)$, donde x representa la edad de ingreso.

La práctica usual no puede tolerar tal vínculo, pues las observaciones se efectúan en períodos (T_0, T_1) y sobre contratos con lapsos de edad $(x + t_0, x + t_1)$. A fin de adaptar el modelo a tales condiciones se hace necesario introducirle variaciones, a las que se dedicará el capítulo siguiente, en el cual se derivarán —como casos particulares— los modelos de Ottaviani y Höckner relativos a la participación de los asegurados en las utilidades.

Antes de finalizar el presente capítulo conviene resaltar que el planteamiento y primera solución a los problemas en estudio se debe, hasta donde llega mi conocimiento de los antecedentes de este tema, a Sheppard Homans, actuario de la Mutual Life Insurance Company de Estados Unidos de América, quien —en 1863 [15]— lo resolvió mediante su conocida fórmula contributiva que separa la utilidad en (a) utilidad de interés, (b) utilidad de mortalidad y (c) utilidad de recargo industrial. Para el caso de un seguro mixto, por ejemplo, emitido a la edad x, la utilidad en al año de edad $(x + t, x + t + 1)$ viene dada, conforme a la fórmula contributiva de Homans, por la ecuación siguiente [16]:

$$U_{t+1} = \left[{}_tV''_x + P''_{\overline{x:n|}} (1 - \varepsilon) - f\right] (i' - i) + \\ + (q_{x+t} - q'_{x+t}) (1 - {}_tV''_x) + \\ + \left[(\varepsilon - \varepsilon') P''_{\overline{x:n|}} + (f - f')\right] (1 + i')$$

donde los términos del segundo miembro representan, respectivamente, la utilidad de interés, mortalidad y recargo industrial.

---

(15) On the equitable distribution of surplus. Sheppard Homans, Journal of the Institute of Actuaries, Vol. XI, pág. 121, 1863 (¿1864?).

(16) Ver Cultrera, loc. cit., Capítulo III, párrafo 5, pág. 336. Los símbolos con apóstrofo representan bases de cálculo de segundo orden.

Capítulo VI

ANALISIS ESTRUCTURAL DE LAS UTILIDADES METODOS DE PARTICIPACION DE HOCKNER Y OTTAVIANI

Análisis estructural de las utilidades.

Las ecuaciones [15] y [17] y las que de ellas se siguen, desarrolladas en el capítulo anterior permiten, como se dijo allí, determinar tanto la cuantía como la estructura productora de utilidades de los contratos observados; tienen, no obstante, el inconveniente apuntado de requerir la observación de los contratos durante el entero período de permanencia al colectivo observado. Además, la utilidad no es deducible directamente de un balance a que proceda la compañía en un período estadístico, pues es necesario construir un juego de tarifas, a base del costo acumulado tontinariamente [1], para determinar la utilidad acumulada por cada póliza, según edad de emisión y antigüedad de seguro.

Por otra parte, es norma usual de las compañías aseguradoras proceder a valuaciones periódicas de los contratos vigentes, acreditando a cada uno de ellos el capital acumulado que corresponda según edad de emisión y antigüedad de seguro, conforme a bases de cálculo de primer orden que se juzgan representativas del desarrollo de la gestión en el período estadístico siguiente a la fecha de valuación. Tal práctica hace depender las utilidades acumuladas en una fecha T_1 del desarrollo efectivo de la gestión en (T_0, T_1) y del capital acumulado en la fecha T_0. Este resultado diferirá del correspondiente al período $(0, T_1)$ en función de la diver-

[1] A este costo acumulado hacen corresponder los actuarios norteamericanos el símbolo ${}_nU_x$.

gencia entre capital acreditado a la fecha T_0 y capital acumulado en el período $(0, T_0)$ [2].

Los usos mencionados obligan a proceder a un estudio más detallado del esquema hasta ahora desarrollado, a fin de convertirlo en un instrumento aplicable a la práctica cotidiana de las compañías aseguradoras.

Antes de proceder a las modificaciones conducentes es conveniente señalar que el modelo desarrollado es, no obstante las "objeciones" apuntadas, de grande utilidad para el actuario, que lo puede utilizar al momento de preparar las tarifas de la compañía para determinar "a priori" los dividendos futuros, por encima de aquéllos garantizados que otorgue mediante las funciones S(u); es en particular útil en aquellos países en que las regulaciones administrativas imponen a las compañías las bases de cálculo de primer orden, como es el caso de los Estados Unidos de América (ver Sección 2 del Apéndice, in fine), pues permite evaluar los resultados futuros de la gestión mediante métodos más económicos que los usualmente utilizados para el cómputo de "asset shares", que suelen valorarse mediante un desarrollo "año a año" (con bases de cálculo de segundo orden) de la gestión aseguradora.

Conforme resulta de la ecuación [17] del capitulo anterior, en el año T_0 de fundación de la compañía el capital acumulado por los contratos que ingresaron en el año cero con edad x y que forman parte del grupo observado a la fecha T_0 (con antigüedad de seguro t_0), será igual al capital acumulado según las bases de cálculo de primer orden aumentado con las utilidades acumuladas en el período estadístico $(0, T_0)$, lo que suma

$$ {}_xC_1^0(t_0) = {}_xC_1(t_0) + \pi_1^0\, {}_xC_1^0(t_0) = {}_xC_1(t_0) + {}_xU^0(t_0) \qquad [1] $$

y en consecuencia:

$$ {}_xU_1^0(t_0) = \pi_1^0\, {}_xC_1^0(t_0) = {}_xC_1^0(t_0) - {}_xC_1(t_0) \qquad [2] $$

(2) Si hubiera resultado un superávit respecto a las bases de cálculo de primer orden a utilizar en (T_0, T_1), la divergencia puede ser causada por el hecho mismo de haber declarado y repartido dividendos.

y este valor (que corresponde a una gestión mutualista) será igual a cero en los casos siguientes: (a) cuando las bases de cálculo de primer y segundo orden coincidan totalmente; (b) cuando las bases de cálculo de primer y segundo orden coincidan globalmente, y (c) cuando se hubieren distribuido, al tiempo T_0 las utilidades acumuladas por cada contrato.

Considérese seguidamente el resultado de la gestión en el período de observación (T_0, T_1) con $0 < T_0 < T_1$, dentro del cual (a la fecha T_1) los contratos alcanzan la antigüedad de seguro t_1 ($> t_0 > 0$) habiendo ingresado con edad x al tiempo cero (fundación de la compañía).

Mediante pasajes idénticos a los que produjeron la ecuación [17] del capítulo anterior se obtiene el siguiente resultado para la utilidad total acumulada, en una gestión mutualista de seguros, en el período $(0, T_1)$ por los $l^0(x, t_1)$ asegurados con edad de ingreso x y antigüedad de seguro t_1:

$$l^0(x + t_1)\ {}_xU^0_1(t_1) = \int_x^{x+t_1} l^0(u)\ U^0(u)\ L^0(u, x + t_1)du =$$

$$= \int_x^{x+t_0} l^0(u)\ U^0(u)\ L^0(u, x + t_1)du +$$

$$+ \int_{x+t_0}^{x+t_1} l^0(u)\ U^0(u)\ L^0(u, x + t_1)du$$

$$\therefore\ {}_xU^0_1(t_1) = \int_x^{x+t_0} \frac{l^0(u)}{l^0(x + t_1)}\ U^0(u)\ L^0(u, x + t_1)du +$$

$$+ \int_{x+t_0}^{x+t_1} \frac{l^0(u)}{l^0(x + t_1)}\ U^0(u)\ L^0(u, x + t_1)du =$$

$$= \int_x^{x+t_0} e^{\int_u^{x+t_1} \varphi^0_1(s)ds}\ e^{\int_u^{x+t_1} \delta^0(s)ds}\ U^0(u)du +$$

$$+ \int_{x+t_0}^{x+t_1} e^{\int_u^{x+t_1} \varphi^0_2(s)ds}\ e^{\int_u^{x+t_1} \delta^0(s)ds}\ U^0(u)du$$

$$= e^{\int_{x+t_0}^{x+t_0}[\varphi_1^0(s)+\delta^0(s)]ds} \int_x^{x+t_0} e^{\int_u^{x+t_0}\varphi_1^0(s)ds}\, e^{\int_u^{x+t_0}\delta^0(s)ds}\, U^0(u)du +$$

$$+ \int_{x+t_0}^{x+t_1} e^{\int_u^{x+t_1}\varphi_1^0(s)ds}\, e^{\int_u^{x+t_1}\delta^0(s)ds}\, U^0(u)du =$$

$$= {}_{x+t_0}E_1^0(t_1)\ \pi_1^0,\ {}_xC_1^0(t_0) + \pi_1^0\ {}_{x+t_0}C_1^0(t_1)$$

Donde ${}_{x+t_0}E_1^0(t_1)$ indica el valor acumulado a la edad $x + t_1$ por un contrato tontinario a prima única unitaria, suscrito a la edad $x + t_0$ y valorado con bases de cálculo de segundo orden; corresponde el valor ${}_{x+t_0}E_1^0(t_1)\ \pi_1^0,\ {}_xC_1^0(t_0)$ a lo que los actuarios norteamericanos denominan "costo acumulado de los pagos de sobrevivencia, con beneficio de interés y supervivencia" y que designan con el símbolo ${}_{t_1-t_0}U_{x+t_0}$ (3), cuando la prima es anual unitaria, en el caso bajo consideración se trata de una prima única $\pi_1^0\ {}_xC_1^0(t_0)$ pagada al inicio del período (t_0, t_1), pero el modelo de determinación de las utilidades se reduce a uno en función de ${}_{t_1-t_0}U_{x+t_0}$ (ver infra "Modelo de participación en las utilidades de Ottaviani", in fine, pág. 77).

Por su parte el valor $\pi_1^0\ {}_{x+t_0}C_1^0(t_1)$ representa el capital acumulado, en una colectividad en que actúen bases de cálculo de segundo orden, por un contrato con edad de ingreso $x + t_0$ y antigüedad de seguro $t_1 - t_0$, que hubiera pagado las primas $\pi_1^0(u) = P^1(u) - P^0(u)$ (4) correspondientes a la edad de ingreso x.

La utilidad acumulada al tiempo T_1 por un contrato ingresado al tiempo cero con edad x y que haya alcanzado antigüedad de seguro t_1, vendrá dada por la ecuación siguiente:

$$\begin{aligned} {}_xU_1^0(t_1) &= \pi_1^0,\ {}_xC_1^0(t_0)\ {}_{x+t_0}E_1^0(t_1) + {}_{\pi_1^0,x+t_0}C^0(t_1) = \\ &= \pi_1^0,\ {}_xC_1^0(t_1) \qquad [3] \end{aligned}$$

---

(3) Ver, An Introduction to the Mathematics of Life Insurance, Walter O. Menge y James W. Glover; Cap. II, párrafo 16, págs. 35 y 36. The MacMillan Co. N. Y. 5.ª edición, 1949.

(4) Ver ecuación [16] del Capítulo anterior.

y el capital acumulado por dichos contratos al tiempo T_1 será, en consecuencia:

$$ {}_xC_1^0(t_1) = {}_xC_1(t_1) + \pi_1^0, {}_xC_1^0(t_1) \qquad [4] $$

Correspondiendo a las ecuaciones [1] a [4] se obtiene, para el caso de una gestión normal de seguros (aquélla con valores de rescisión y conversión garantizados) las ecuaciones [1'] a [4'] siguientes:

$$ {}_xC^0(t_0) = {}_xC(t_0) + \pi^1, {}_xC^0(t_0) = {}_xC(t_0) + {}_xU^0(t_0) \qquad [1'] $$

$$ {}_xU^0(t_0) = \pi^1, {}_xC^0(t_0) = {}_xC^0(t_0) - {}_xC(t_0) \qquad [2'] $$

$$ {}_xU^0(t_1) = \pi^1, {}_xC^0(t_0) \cdot {}_{x+t_0}E^0(t_1) + \pi^1, {}_{x+t_0}C^0(t_1) = $$
$$ = \pi^1, {}_xC^0(t_1) \qquad [3'] $$

$$ {}_xC^0(t_1) = {}_xC(t_1) + \pi^1, {}_xC^0(t_1) \qquad [4'] $$

Donde,

$$ \pi_1^0(u) = P^1(u) - P^0(u) = \Big[P''(u) - f(u) - F(u) - \varepsilon(u) - $$
$$ - S(u) - \alpha(u) - \beta(u)\Big] - $$
$$ - \Big[P''(u) - f^0(u) - F^0(u) - \varepsilon^0(u) - S(u) - \alpha^0(u) - $$
$$ - \beta^0(u)\Big] = $$
$$ = \Big[f^0(u) - f(u)\Big] + \Big[F^0(u) - F(u)\Big] + \Big[\varepsilon^0(u) - \varepsilon(u)\Big] + $$
$$ + \Big[\alpha^0(u) - \alpha(u)\Big] + \Big[\beta^0(u) - \beta(u)\Big] $$

$$ \varphi_1^0(u) = \alpha^0(u) + \beta^0(u) $$

$$ \pi^1(u) = P^x(u) - \pi^0(u) = \Big[f^0(u) - f(u)\Big] + \Big[F^0(u) - F(u)\Big] + $$
$$ + \Big[\varepsilon^0(u) - \varepsilon(u)\Big] + \Big[\alpha^0(u) - \alpha(u)\Big] + $$
$$ + \Big[\beta^0(u) - \beta(u)\Big] + $$
$$ + C(u)\Big[\gamma^0(u) - \gamma(u)\Big] + C(u)\Big[\xi^0(u) - \xi(u)\Big] $$

$$ \varphi^0(u) = \alpha^0(u) + \beta^0(u) + \gamma^0(u) + \xi^0(u) $$

De las ecuaciones [1] a [4] y las respectivas [1'] a [4'] se concluye que la utilidad acumulada a la fecha T_1 por un contrato observado en el período (T_0, T_1) se compone de una utilidad que podría denominarse de *permanencia activa* producida por la gestión en el período, sea la suma $\pi_1^0 \, , \, {}_{x+t_0}C_1^0(t_1)$ y del valor acumulado a la fecha T_1 por una prima única tontinaria pagada al inicio del período, sea a la fecha T_0, que produce la utilidad que podría denominarse *de capital* sea la suma $\pi_1^0 \; {}_xC_1^0(t_0) \cdot {}_{x+t_0}E_1^0(t_1)$ a la fecha T_1.

Con los elementos adquiridos puede diseñarse un modelo de participación en las utilidades que permita la determinación de éstas mediante la utilización de un instrumental simple y económico. Para tal efecto basta con considerar que los contratos presentes en el colectivo a la época T_0 (con antigüedad de seguro t_0 y edad de ingreso x) han ingresado todos en ese momento al seguro, antedatando en t_0 años sus pólizas, pagando en una sola solución de pago la suma de capital acumulado correspondiente a las bases de cálculo de primer orden que se estiman representativas para el período (T_0, T_1) y comprometiéndose a pagar en ese período la prima relativa a una póliza ingresada con edad x y antigüedad de seguro t_0; dichos contratos serán todos cancelados a la fecha T_1, retirando cada asegurado la alícuota que le corresponda en el capital total acumulado. Esto producirá, a la fecha T_1 de liquidación de los contratos, eventuales excedentes que constituyen la utilidad acumulada en el período (T_0, T_1) de observación [5].

El capital total acumulado a la fecha T_1, para el caso de una gestión mutualista de seguros vendrá dado por la ecuación:

$$
\begin{aligned}
{}_xC_1^0(t_1) &= {}_xC(t_0) \cdot {}_{x+t_0}E_1^0(t_1) + \pi_1^0 \, , \, {}_{x+t_0}C_1^0(t_1) + {}_{x+t_0}U_1^0(t_1) = \\
&= {}_xC_1(t_1) + {}_{x+t_0}U_1^0(t_1) \qquad [5]
\end{aligned}
$$

y, para el caso de una gestión normal de seguros, por la ecuación:

---

(5) Estas hipótesis equivalen a considerar como ingresos de la cartera las reservas completas acumuladas a la fecha T_0 y como egresos de ella las acumuladas a la fecha T_1; el modo de plantear el problema en el texto parece, sin embargo, más aconsejable por su mayor generalidad.

$$ {}_xC^0(t_1) = {}_xC(t_0) \cdot {}_{x+t_0}E^0(t_1) + \pi^1, {}_{x+t_0}C^0(t_1) + {}_{x+t_0}U^0(t_1) = $$
$$ = {}_xC(t_1) + {}_{x+t_0}U^0(t_1) \qquad [5'] $$

En ambos casos el capital total acumulado vendrá dado por el montante acumulado al tiempo T_1 (en una gestión tontinaria con bases de cálculo de segundo orden) por una prima única pagada al tiempo T_0 (cuyo monto aparece en los libros de la compañía como reserva completa de la póliza a esa época), más las utilidades producidas por la gestión en el período estadístico (T_0, T_1).

Con las variaciones apuntadas se superan las objeciones a que estaba sujeto el modelo de tablas de mutualidad, las que se presentaron al final del capítulo anterior; la utilidad puede determinarse mediante la utilización de tablas de mutualidad con la sola observación de la cartera en el período estadístico correspondiente y utilizando los elementos que aparecen en los libros y estadísticas de la compañía para ese mismo período, sin necesidad de recurrir a registros de períodos anteriores.

Para finalizar, debe observarse que antes de decretar una participación en utilidades debe comprobarse si ellas se han debido a una divergencia "real" de bases de primer y segundo orden, o a una divergencia debida al azar, pues en este último caso no debe llamarse a participación en utilidades. Esta observación, no obstante su importancia, carece de aplicación práctica, pues es sabido que a través del reaseguro las compañías aseguradoras suelen cubrir la cantidad llamada "capital de riesgo", con lo que se transforman en entidades financieras gestoras de las "primas de ahorro". Si existen contratos de reaseguro de tal naturaleza, siempre puede llamarse a participación en las utilidades a los asegurados, puesto que el problema de la divergencia entre bases de cálculo de primer y segundo orden, en cuanto que debido a causas "reales" o aleatorias, es problema del reasegurador y no del asegurador.

Para terminar el presente estudio, una vez que se ha mostrado que la participación en las utilidades es determinable mediante el modelo de tablas de mutualidad, no resta más que deducir —como casos particulares— los métodos propuestos por Ottaviani y Höckner.

Modelo de participación en las utilidades de Ottaviani.

Esté bajo observación una cartera del tipo normal, es decir, con valores de cancelación y conversión garantizados, compuesta por contratos que satisfagan todas y cada una de las condiciones siguientes: (a) idéntico tipo de contrato; (b) idéntica estructura de capital asegurado, ver nota [6] infra; (c) igual edad alcanzada, $x + t_1$ al tiempo T_1, y (d) igual antigüedad de seguro t_1 a la fecha T_1.

Introdúzcanse las siguientes HIPOTESIS ADICIONALES:

1) Las causas de eliminación $\gamma(u)$ y $\xi(u)$ sean siempre idénticamente iguales a cero, es decir, que se ignoran las causas de eliminación no dependientes de la duración de la vida;
2) en el período de observación supóngase haya actuado una ley de capitalización a interés compuesto, sea que $\delta^0(s) = \delta^0 = \ln(1 + i_0)$; esta hipótesis es "suficientemente representativa" (ver capítulo I, "Metodología");
3) los componentes del recargo industrial sean independientes de la edad alcanzada y de la edad de emisión y dependan a lo sumo del tipo de contrato (ésta es también una hipótesis, "suficientemente representativa"), en consecuencia:

$$f^0(u) = f^0 \quad ; \quad f(u) = f$$
$$F^0(u) = F^0 \quad ; \quad F(u) = F$$ (igual a cero para todo t mayor que cero, por definición de gastos de adquisición en los que se incurre únicamente para la antigüedad cero de seguro)

$$\varepsilon^0(u) = \varepsilon^0 \quad ; \quad \varepsilon(u) = \varepsilon$$

En tales hipótesis la utilidad del período (T_0, T_1) será, conforme a la ecuación [5'] anterior, la siguiente:

$${}_{x+t_0}U^0(t_1) = {}_xC(t_0) \cdot {}_{x+t_0}E^0(t_1) + \pi^1, {}_{x+t_0}C^0(t_1) - {}_xC(t_1) =$$

$$= {}_xC(t_0)\, e^{\int_{x+t_0}^{x+t_1} [\varphi^0(s) + \delta^0(s)]\, ds} +$$

$$+ \int_{x+t_0}^{x+t_1} \pi^1(u)\, e^{\int_u^{x+t_1} [\varphi^0(s) + \delta^0(s)]\, ds}\, du - {}_xC(t_1) =$$

$$= \frac{(1+i_0)^{-(x+t_0)}}{(1+i_0)^{-(x+t_1)}} \; \frac{l^0(x+t_0)}{l^0(x+t_1)}\; {}_xC(t_0) +$$

$$+ \int_{x+t_0}^{x+t_1} \pi^1(u)\, \frac{(1+i_0)^{-u}}{(1+i_0)^{-(x+t_1)}} \; \frac{l^0(u)}{l^0(x+t_1)}\, du - {}_xC(t_1) =$$

$$= \frac{v_0^{x+t_0}\; l^0(x+t_0)}{v_0^{x+t_1}\; l^0(x+t_1)}\; {}_xC(t_0) +$$

$$+ \int_{x+t_0}^{x+t_1} \pi^1(u)\, \frac{v_0^{u}}{v_0^{x+t_1}} \; \frac{l^0(u)}{l^0(x+t_1)}\, du - {}_xC(t_1) =$$

$$= \frac{D^0(x+t_0)}{D^0(x+t_1)}\; {}_xC(t_0) + \int_{x+t_0}^{x+t_1} \pi^1(u)\, \frac{D^0(u)}{D^0(x+t_1)}\, du - {}_xC(t_1)$$

y teniendo consideración de que $\pi^1(u)$ en las hipótesis hechas resultará dada por:

$$\pi^1(u) = \Big[f^0(u) - f(u)\Big] + \Big[F^0(u) - F(u)\Big] + \Big[\varepsilon^0(u) - \varepsilon(u)\Big] +$$

$$+ \Big[\alpha^0(u) - \alpha\Big] + \Big[\beta^0(u) - \beta(u)\Big] +$$

$$+ C(u)\Big[\gamma^0(u) - \gamma(u)\Big] + C(u)\Big[\xi^0(u) - \xi(u)\Big] =$$

$$= \Big[f^0 - f\Big] + \Big[\varepsilon^0 - \varepsilon\Big] + \Big[\alpha^0(u) - \alpha(u)\Big] +$$

$$+ \Big[\beta^0(u) - \beta(u)\Big]$$

lo que da

$${}_{x+t_0}U^0(t_1) = \frac{D^0(x+t_0)}{D^0(x+t_1)}\; {}_xC(t_0) +$$

$$+ \frac{[f^0 - f] + [\varepsilon^0 - \varepsilon]}{D^0(x+t_1)} \int_{x+t_0}^{x+t_1} D^0(u)\, du +$$

$$+ \int_{x+t_0}^{x+t_1} \left\{ \left[\alpha^0(u) - \alpha(u) \right] + \right.$$

$$\left. + \left[\beta^0(u) - \beta(u) \right] \right\} \frac{D^0(u)}{D^0(x+t_1)} \, du - {}_xC(t_1) \qquad [6']$$

Introdúzcanse a continuación las siguientes HIPOTESIS PARTICULARES:

1.º) El período estadístico de observación es de amplitud anual y comprende a cada contrato donde el momento mismo en que alcanza la edad $x + t$ hasta el momento inmediatamente anterior a la fecha en que alcanza la edad $x + t + 1$;

2.º) al ser eliminado de la colectividad no se paga el capital unitario, sino una suma K_{t+1}, si se es eliminado en el año de edad observado [6];

3.º) las tasas de eliminación $[\alpha^0(u) + \alpha^0(u)]$ y $[\beta(u) + \beta(u)]$ estén sustituídas por las correspondientes tasas q'_{x+t} y q_{x+t}, las cuales operan únicamente al finalizar del año de edad;

4.º) a los supérstites que cumplen la edad $(x + t + 1)$ se les pague una renta de permanencia S_{t+1};

5.º) el valor $D^0(x + t) = \int_0^1 D^0(x + t + u) du = \int_{x+t}^{x+t+1} D(u) du$ se aproxime mediante $D^0(x + t) = v_0^{x+t} \, 1^0(x + t)$, lo que equivale a suponer que los capitales acumulados y las primas ingresan a la cartera —en un único pago— al inicio del año de edad.

---

[6] El modelo de Ottaviani es a este respecto más general que el desarrollado en el texto. Esta mayor generalidad exige que el grupo de contratos observados reúna la condición (b) impuesta al inicio de esta sección a la cartera observada.

Antes de proseguir conviene estudiar una particular dificultad que presenta el modelo de tablas de mutualidad, para aplicar el cual es necesario valorar la ecuación siguiente:

$$\int_{x+t}^{x+t+1} \left\{ \left[\alpha^0(u) + \beta^0(u) \right] - \right.$$

$$\left. - \left[\alpha(u) + \beta(u) \right] \right\} \frac{D^0(u)}{D^0(x+t+1)} \, du =$$

$$= \frac{1}{D^0(x+t+1)} \int_0 \left\{ \left[\alpha^0(x+t+u) + \beta^0(x+t+u) \right] - \right.$$

$$\left. \left[\alpha(x+t+u) + \beta(x+t+u) \right] \right\} D^0(x+t+u) du =$$

$$= \frac{v_0^{x+t}}{D^0(x+t+1)} \int_0 \left(- \frac{1'^0(x+t+u)}{1(x+t+u)} \right) \times$$

$$\times \left(- \frac{1'(x+t+u)}{1(x+t+u)} \right) 1^0(x+t+u) \, v_0^u \, du$$

valor que no es directamente deducible de los datos que componen los balances, exigiendo, como se indicó en el capítulo V, construir un juego de tarifas, con base, eso sí, en la experiencia del período observado únicamente, como se demostró al final de la sección anterior.

El modelo se simplificaría sobremanera si los valores con base en los que se determinara la cuantía y estructura de utilidades pudieran deducirse de ecuaciones dependientes de las mismas bases de cálculo, pues entonces

$$\int_{x+t}^{x+t+1} \left[\alpha^0(u) + \beta^0(u) \right] \frac{D^0(u)}{D^0(x+t+1)} \, du =$$

$$= \frac{v_0^{x+1}}{D^0(x+t+1)} \times$$

$$\times \int_0^1 - \frac{l^{0\prime}(x+t+u)}{l^0(x+t+u)} \, l^0(x+t+u) \, v_0^u \, du =$$

$$= \frac{v_0^{x+t}}{D^0(x+t+1)} \frac{l^0(x+t)}{l^0(x+t)} \int_0^1 - \frac{d}{du} \, l^0(x+t+u) v^u du =$$

$$= \frac{D^0(x+t)}{D^0(x+t+1)} \frac{1}{l^0(x+t)} \int_0^1 - \frac{d}{du} \, l^0(x+t+u) v_0^u du =$$

$$= \frac{D^0(x+t)}{D^0(x+t+1)} \, \bar{A}_{x+t:\overline{1}|} =$$

$$= \frac{D^0(x+t)}{D^0(x+t+1)} \, v_0 q'_{x+t} = \frac{l^0(x+t)}{l^0(x+t+1)} \, q'_{x+t}$$

Tanto Ottaviani como Höckner utilizan una vía que les permita plantear el problema basándose en una ecuación del tipo antes indicado, con el objeto de evitar la necesidad de construir un entero juego de tarifas a primas y bases de segundo orden para determinar la estructura y cuantía de las utilidades para cada periodo estadístico.

Para tal efecto basta, a partir de la ecuación [13] del capítulo anterior y efectuando los desarrollos que llevan hasta la ecuación [6'] de este capítulo, introduciendo las hipótesis simplificativas señaladas en la presente sección, obtener los capitales acumulados, separadamente para bases de cálculo de primer y segundo orden, para luego hallar por diferencia la cuantía de la utilidad y mediante separación de términos en las ecuaciones correspondientes deducir la estructura del beneficio.

Se tendrá conforme a lo anterior, para la utilidad acumulada con bases de cálculo de segundo orden y de primer orden respectivamente:

$$_{x+t}U^0(t+1) = \frac{D^0(x+t)}{D^0(x+t+1)} \, {}_xC(t) -$$

$$- [f^0 + \varepsilon^0] \frac{D^0(x+t)}{D^0(x+t+1)} - \frac{D^0(x+t)}{D^0(x+t+1)} \, v_0 q'_{x+t} K_{t+1} -$$

$$- S_{t+1} - {}_xC(t+1)$$

$$0 = \frac{D(x+t)}{D(x+t+1)}\, {}_xC(t) - (f + \varepsilon)\, \frac{D(x+t)}{D(x+t+1)} -$$

$$- \frac{D(x+t)}{D(x+t+1)}\, v\, q_{x+t} K_{t+1} - S_{t+1} - {}_xC(t+1)$$

estando todos estos valores referidos al final del año de edad y en consecuencia representan la utilidad acumulada a esa fecha por cada uno de los $l^0(x + t + 1)$ contratos que permanecen en el seguro; si se desea conocer el aporte a dicha utilidad efectuado por cada uno de los $l^0(x + t) = l(x + t)$ contratos vigentes al inicio del año de edad, sea el valor ${}_{x+t}\dot{U}^0(t + 1)$, se obtendrá mediante las relaciones siguientes:

$${}_{x+t}\dot{U}^0(t+1) = \frac{l^0(x+t+1)}{l^0(x+t)}\, {}_{x+t}U^0(t+1) = {}_xC(t)\,(1 + i_0) -$$

$$- [f^0 + \varepsilon^0]\,(1 + i_0) - K_{t+1} q'_{x+t} -$$

$$- p'_{x+t} \left\{ S_{t+1} + {}_xC(t+1) \right\} \qquad [7']$$

$$0 = {}_xC(t)\,(1 + i) - [f + \varepsilon]\,(1 + i) -$$

$$- K_{t+1} q_{x+t} - p_{x+t} \left\{ S_{1+t} + {}_xC(t+1) \right\}$$

y restando miembro a miembro las dos ecuaciones anteriores resulta:

$${}_{x+t}\dot{U}^0(t+1) = {}_xC(t)\,[i_0 - i] + \Big\{ [f + \varepsilon]\,(1 + i) -$$

$$- [f^0 + \varepsilon^0]\,(1 + i_0) \Big\} -$$

$$- K_{t+1} q'_{x+t} - \left\{ S_{t+1} + {}_xC(t+1) \right\} +$$

$$+ q'_{x+t}\,[S_{t+1} + {}_xC(t+1)] +$$

$$+ K_{t+1} q_{x+t} + \left\{ S_{t+1} + {}_xC(t+1) \right\} -$$

$$- q_{x+t}\,[S_{t+1} + {}_xC(t+1)] =$$

$$= {}_xC(t)\,[i_0 - i] + [q_{x+t} - q'_{x+t}] \Big\{ K_{t+1} -$$

$$- S_{t+1} - {}_xC(t+1) \Big\} +$$

$$+ \Big\{ [f + \varepsilon]\,(1 + i) - [f^0 + \varepsilon^0]\,(1 + i_0) \Big\} \qquad [8']$$

que es la ecuación hallada por Ottaviani; si se introduce la hipótesis de que el período estadístico lo constituya el intervalo de edad $(x + t, x + t + 1)$, sea un intervalo abierto a la derecha, es inmediato que ${}_xC(t) = {}_tV''_x + P''_x$ capital acumulado más prima que se acaba de pagar a la edad $(x + t)$ y a su vez el valor de ${}_xC(t + 1) = {}_{t+1}V''_x$, reserva terminal a la edad $x + t$. En consecuencia, la ecuación de la utilidad acumulada por cada uno de los $1^0(x + t) = 1(x + t)$ contratos, en el año de edad $(x + t, x + t + 1)$, referida financieramente a la fecha T_1 que corresponde al final del año de edad $x + t + 1$ vendrá dada por:

$$
\begin{aligned}
{}_{x+t}\ddot{U}^0(t + 1) &= ({}_tV''_x + P''_x)\,(i_0 - i) + \\
&+ [q_{x+t} - q'_{x+t}]\,(K_{t+1} - S_{t+1} - {}_{t+1}V''_x) + \\
&+ \Big\{(f + \varepsilon)\,(1 + i) - (f^0 + \varepsilon^0)\,(1 + i_0)\Big\} \qquad [9']
\end{aligned}
$$

La ecuación anterior pone en evidencia que la *utilidad de mortalidad* $(q_{x+t} - q'_{x+t})\,(K_{t+1} - S_{t+1} - {}_{t+1}V''_x)$ puede expresarse en función del capital bajo riesgo; la *utilidad de rendimiento* $({}_tV''_x + P''_x)\,(i_0 - i)$ puede expresarse en función del capital de cobertura $({}_tV''_x + P''_x)$ y la *utilidad de gestión* en función del capital asegurado o de la prima de tarifa, según los sistemas que siga la compañía para determinar f y ε.

Además de los factores indicados existe una utilidad de extorno y un factor de utilidad $F^0 - F$ que nace al inicio del contrato, de los cuales no se tiene consideración explícita en este modelo.

Nótese, asimismo, que las utilidades de rendimiento y de gestión son independientes de la submortalidad; no sucede lo mismo —como ya se hizo notar— en el caso de que la utilidad se determine con base en la ecuación de ${}_{x+t}U^0(t + 1)$, pues en este caso, como es de inmediata comprobación, todos los factores de utilidad son función de la submortalidad, ya que ${}_{x+t}U^0(t + 1) = \dfrac{1}{p'_{x+t}}\,{}_{x+t}\ddot{U}^0(t + 1) = f(q'_{x+t})$.

Antes de pasar a exponer el modelo de Höckner, es conveniente determinar para un contrato dado (un seguro mixto, por ejemplo) la cuantía y estructura de la utilidad mediante el empleo de la teoría de las tablas de mutualidad[7], para dicho efecto es útil escribir en otra manera la ecuación [7']:

$$
\begin{aligned}
{}_{x+t}\ddot{U}^{0}(t+1) &= {}_{x}C(t)\,(1+i_0) - [f^0 + G^0]\,(1+i_0) - q'_{x+t} - \\
&\qquad - p'_{x+t}\;{}_{x}C(t+1) = \\
&= ({}_{t}V'' + P''_{x:\overline{n}|})\,(1+i_0) - [f^0 + \varepsilon^0]\,(1+i_0) - q'_{x+t} - \\
&\qquad - p'_{x+t}\;{}_{t+1}V''_x = \\
&= \left[{}_{t}V''_x + P''_{x:\overline{n}|}(1-\varepsilon^0)\right](1+i_0) - f^0(1+i_0) - q'_{x+t} - \\
&\qquad - p'_{x+t}\;{}_{t+1}V''_x
\end{aligned}
$$

y para $t = 0$, si F^0 es el costo efectivo de adquisición se tendrá, dada que ${}_{0}V''_x = 0$, la siguiente ecuación:

$$
{}_{x}\ddot{U}^{0}(1) = (1-\varepsilon^0)\,(1+i_0)P''_{x:\overline{n}|} - f^0(1+i_0) - q'_x - p'_x\;{}_{1}V''_x
$$

mientras que para $t = n - 1$, habida consideración de ser ${}_{n}V''_x = 1$, resultará:

$$
{}_{x+n-1}\ddot{U}^{0}(n) = ({}_{n-1}V''_x + (1-\varepsilon^0)P''_{x:\overline{n}|})\,(1+i_0) - 1 - f^0(1+i_0)
$$

y la utilidad total, referida a la edad de emisión, resulta:

$$
\begin{aligned}
U &= \sum_{0}^{n-1}{}_{t}\;{}_{t}p'_x\;{}_{x+t}\ddot{U}^{0}(t+1)\,(1+i_0)^{-t-1} = \\
&= \sum_{0}^{n-1}{}_{t}\;{}_{t}p'_x\;{}_{t}V''_x(1+i_0)^{-t} + (1-\varepsilon^0)P''_{x:\overline{n}|}\;{}_{t}p'_x(1+i_0)^{-t} - \\
&\quad - \sum_{0}^{n-2}{}_{t}\;{}_{t+1}p'_x\;{}_{t+1}V''_x(1+i_0)^{-t-1} - /_{n}A^0_x - {}_{n}E^0_x - F^0 - \\
&\quad - f^0\sum_{0}^{n-1}{}_{t}\;{}_{t}p'_x(1+i_0)^{-t} = (1+\varepsilon^0)P''_{x:\overline{n}|}\;\overset{\prime\prime}{a}{}^{0}_{x:\overline{n}|} - A^0_{x:\overline{n}|} - \\
&\qquad - F^0 - f^0\overset{\prime\prime}{a}{}^{0}_{x:\overline{n}|}
\end{aligned}
$$

(7) Ver Cultrera, op. cit., Capítulo III, párrafo 5, pág. 336.

$$\therefore \quad \frac{U}{\ddot{a}^{0}_{x:\overline{n}|}} = (1-\varepsilon^0)P''_{x:\overline{n}|} - \frac{A^0_{x:\overline{n}|} + F^0 + f^0\ddot{a}^0_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}^0_{x:\overline{n}|}} =$$

$$= (1-\varepsilon^0)\left\{P''_{x:\overline{n}|} - \frac{A^0_{x:\overline{n}|} + F^0 + f^0\ddot{a}^0_{x:\overline{n}|}}{(1-\varepsilon)\,\ddot{a}^0_{x:\overline{n}|}}\right\} =$$

$$= (1-\varepsilon^0)\left\{P''_{x:\overline{n}|} - \pi^{0\prime\prime}_{x:\overline{n}|}\right\}$$

y la utilidad acumulada a la edad $x + n$ será en consecuencia:

$$\pi' \ {}_xC^0(n) = U\ddot{a}^0_{x:\overline{n}|}\,({}_nE^0_x)^{-1} = (1-\varepsilon)\,(P''_{x:\overline{n}|} -$$

$$- \pi^{0\prime\prime}_{x:\overline{n}|})\,\ddot{a}^0_{x:\overline{n}|}\,({}_nE^0_x)^{-1} = (1-\varepsilon)\,(P''_{x:\overline{n}|} - \pi^{0\prime\prime}_{x:\overline{n}|})\ {}_nU^0_x$$

donde el último miembro está expresado con la nomenclatura usual entre los actuarios norteamericanos para indicar el costo acumulado de pagos de sobrevivencia (ver supra, página 62).

Método de participación en las utilidades de Höckner.

Para terminar el presente estudio se expone, en resumen, el método de participación en las utilidades de Höckner, conforme a la generalización de Ottaviani.

Conforme a las bases de cálculo de primer orden la utilidad vendrá dada, como se vió en la sección anterior, por:

$$0 = \frac{{}_tV''_x + P''_x}{p_{x+t}}(1+i) - \frac{f+\varepsilon}{p_{x+t}}(1+i) - K_{t+1}\frac{q_{x+t}}{p_{x+t}} -$$

$$- S_{t+1} - {}_{t+1}V''_x = {}_{x+t}U(t+1)$$

$$\therefore \quad \frac{{}_tV''_x + P''_x}{p_{x+t}}(1+i) = \frac{f+\varepsilon}{p_{x+t}}(1+i) - K_{t+1}\frac{q_{x+t}}{p_{x+t}} -$$

$$- S_{t+1} - {}_{t+1}V''_x \ldots\ldots \qquad [10']$$

y de conformidad con la ecuación [9'] resulta:

$${}_{x+t}U^0(t+1) = ({}_tV''_x + P''_x)\,(i_0 - i) + (q_{x+t} - q'_{x+t})\,(K_{t+1} -$$

$$S_{t+1} - {}_{t+1}V''_x) + (f + \varepsilon)(1 + i) -$$

$$- (f^0 + \varepsilon^0)(1 + i_0) + \frac{q_{x+t} - q'_{x+t}}{p_{x+t}} ({}_tV''_x + P''_x)(1 + 1) -$$

$$- \frac{q_{x+t} - q'_{x+t}}{p_{x+t}} ({}_tV''_x + P''_x)(1 + i) =$$

$$= ({}_tV''_x + P''_x) \left\{ i_0 - \left[i + (1 + i) \frac{q_{x+t} - q'_{x+t}}{p_{x+t}} \right] \right\} +$$

$$+ (f + \varepsilon)(1 + i) - (f^0 + \varepsilon^0)(1 + i_0) +$$

$$+ \left[q_{x+t} - q'_{x+t} \right] \left[({}_tV''_x + P''_x) \frac{1 + i}{p_{x+t}} + \right.$$

$$\left. + K_{t+1} - S_{t+1} - {}_{t+1}V''_x \right]$$

y recordando la ecuación [10'] resulta:

$${}_{x+t}U^0(t + 1) =$$

$$= ({}_tV''_x + P''_x) \left\{ i_0 - \left[i + (1 + i) \frac{q_{x+t} - q'_{x+t}}{p_{x+t}} \right] \right\} +$$

$$+ (f + \varepsilon)(1 + i) - (f^0 + \varepsilon^0)(1 + i_0) +$$

$$+ \left[q_{x+t} - q'_{x+t} \right] \left\{ K_{t+1} \frac{q_{x+t}}{p_{x+t}} + \right.$$

$$+ S_{t+1} + {}_{t+1}V''_x + \frac{f + \varepsilon}{p_{x+t}} (1 + i) +$$

$$\left. + K_{t+1} - S_{t+1} - {}_{t+1}V''_x \right\} =$$

$$= ({}_tV''_x + P''_x) \left\{ i_0 - \left[i + (1 + i) \frac{q_{x+t} - q'_{x+t}}{p_{x+t}} \right] \right\} +$$

$$+ (f + \varepsilon)(1 + i) - (f^0 + \varepsilon^0)(1 + i_0) +$$

$$+ \frac{q_{x+t} - q'_{x+t}}{p_{x+t}} (K_{t+1}\, q_{x+t} +$$

$$+ K_{t+1}\, p_{x+t}) + \frac{q_{x+t} - q'_{x+t}}{p_{x+t}} (f + \varepsilon)(1 + i) =$$

$$\Rightarrow ({}_tV''_x + P''_x) \left\{ i_0 - \left[i + (1+i) \frac{q_{x+t} - q'_{x+t}}{p_{x+t}} \right] \right\} +$$

$$+ K_{t+1} \frac{q_{x+t} - q'_{x+t}}{p_{x+t}} + (f + \varepsilon)(1 + i) \frac{p'_{x+t}}{p_{x+t}} -$$

$$- (f^0 + \varepsilon^0)(1 + i_0)$$

y si se introduce la tasa ficticia de interés definida por la relación:

$$j = i + (1 + i) \frac{q_{x+t} - q'_{x+t}}{p_{x+t}} \qquad [11']$$

resulta:

$${}_{x+t}U^0(t+1) = K_{t+1} \frac{q_{x+t} - q'_{x+t}}{p_{x+t}} + ({}_tV''_x + P''_x)(i_0 - j) +$$

$$+ (f + \varepsilon) \frac{p'_{x+t}}{p_{x+t}} (1 + i) - (f^0 + \varepsilon^0)(1 + i_0) \qquad [12']$$

$$P_{x+t}U^0(t+1) = K_{t+1} \frac{q_{x+t} - q'_{x+t}}{p_{x+t}} + ({}_tV_x + P_x)(i_0 - j) \qquad [13']$$

donde la [13'] expresa la utilidad en una gestión aseguradora a prima pura.

Las utilidades han quedado subdivididas en tres factores:

1) una parte proporcional al capital asegurado y a la submortalidad *(utilidad de suma);*
2) otra proporcional al capital de cobertura ${}_tV''_x + P''_x$ y a la diferencia entre la tasa efectiva de interés y una tasa ficticia definida por la ecuación [11'], que depende de la submortalidad, y
3) otra que depende de los costes de gestión, de la submortalidad y del rendimiento de las inversiones.

Utilidad de suma: es de cálculo inmediato por depender de un factor de submortalidad que se ha calculado y del valor asegurado en el año de edad. Si el factor de submortalidad resultara aproximadamente igual para los *diferentes grupos de contratos,* la utilidad de suma dependerá únicamente del capital asegurado, lo que simplifica el cálculo de su atribución a los distintos contratos.

En la práctica la utilidad de suma resulta casi constante si el contrato de seguro es a capital constante ($K_{t+1} = K$), por razón de que $q_{x+t} - q'_{x+t}$ se puede aproximar con "suficiente exactitud" mediante una relación del tipo

$$q_{x+t} - q'_{x+t} = \alpha p_{x+t} \qquad [14']$$

con α constante, y si la suma asegurada es constante, como es el caso más usual, resultará que la utilidad de suma vendrá dada por:

$$K_{t+1} \frac{q_{x+t} - q'_{x+t}}{p_{x+t}} = \alpha K = \text{constante}$$

lo que simplifica la distribución de utilidades, pues puede considerarse esta utilidad de suma como una prima anual constante pagada para aumentar el capital asegurado.

Utilidad $({}_tV''_x + P''_x)\,(i_0 - j)$*:* la determinación de esta utilidad implica el conocimiento de las reservas individuales ${}_tV''_x$, y es, por lo tanto, de valoración complicada.

Sin embargo $(i_0 - j)$, resulta, en general, un valor pequeño y, además, en los primeros años de seguro la reserva es, usualmente, también pequeña. Por lo tanto, puede determinarse la distribución de esta utilidad mediante métodos "mecánicos", por ejemplo, calculando las utilidades totales, sustrayendo las de suma y distribuyendo la diferencia [8] en función de las primas o del capital asegurado.

Para terminar, el modelo de Höckner, para pólizas dotales a prima pura, es un caso particular del expuesto, cuando se suponga que:

$$q_{x+t} - q'_{x+t} = \lambda p'_{x+t} \qquad \text{para } t = 1, 2, \ldots$$
$$K_{t+1} = 1 \text{ (unidad)} \qquad \text{para } t = 1, 2, \ldots$$

resultando, en consecuencia, un caso particular de la generalización de Ottaviani, haciendo

$$\alpha = \frac{\lambda}{1 - \lambda} = \frac{q_{x+t} - q'_{x+t}}{p_{x+t}}$$

---

(8) En el caso de una gestión a prima de tarifa en esta diferencia estará involucrada también la utilidad de gestión, que se puede expresar como función del capital asegurado o la prima, sin incurrir en mayor error ni invalidar el método propuesto en el texto.

APENDICE

Sección I

Condiciones de excindibilidad de una Ley de Capitalización

Teorema:

"Condición necesaria y suficiente para que una ley de capitalización sea excindible, es que la tasa instantánea de interés no dependa de la época inicial de inversión."

Preámbulo:

En las condiciones de continuidad impuestas en el capítulo IV, resulta ser:

$$L(u, t) = 1 + \int_u^t L(u, s)\ \delta(u, s)ds \qquad [1]$$

y derivando respecto a t resulta

$$\frac{\partial}{\partial t} L(u, t) = L(u, t)\ \delta(u, t)$$

$$\therefore \qquad \delta(u, t) = \frac{1}{L(u, t)} \cdot \frac{\partial}{\partial t} L(u, t)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \ln L(u, t) \qquad [2]$$

e integrando en (u, t):

$$\int_u^t \delta(u, s)ds = \int_u^t \partial s \ln L(u, s) = \ln L(u, t) - \ln L(u, u) =$$

$$= \ln L(u, t)$$

$$\therefore \qquad e^{\int_u^t \delta(u, s)ds} = L(u, t)$$

y en consecuencia la ecuación [1] equivale a la siguiente:

$$L(u,\ t) = 1 + \int_u^t L(u,\ s)\ \delta(u,\ s)ds = e^{\int_u^t \delta(u,\ s)ds} \qquad [3]$$

a) *La condición es necesaria,* en efecto, suponiendo que se verifique la igualdad $L(u, t) = L(u, x) \cdot L(x, t)$, en $u \leqslant x \leqslant t$, se tiene:

$$\ln L(u,\ t) = \ln L(u,\ x) + \ln L(x,\ t)$$

y derivando respecto a t:

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln L(u,\ t) = \frac{\partial}{\partial t} \ln L(u,\ x) + \frac{\partial}{\partial t} \ln L(x,\ t)$$
$$= \frac{\partial}{\partial t} \ln L(x,\ t)$$

y esta igualdad implica, por la ecuación [2],

$$\delta(u,\ t) = \delta(x,\ t)$$

que es válida para todo valor de u, de donde se sigue que la tasa instantánea de interés ha de ser independiente de la época de inversión, c.d.d.

b) *La condición es suficiente,* dado que

$$\delta(u,\ s) = \delta(s)$$

se sigue de inmediato por la ecuación [3] que

$$e^{\int_u^t \delta(s)ds} = e^{\int_u^x \delta(s)ds}\ e^{\int_x^t \delta(s)ds} =$$
$$= L(u,\ x) \cdot L(u,\ t) \qquad \text{c.d.d.}$$

Desde el punto de vista financiero la excindibilidad garantiza un igual montante final al término de un período financiero, con independencia del número de intervalos en que aquél se divida, puesto que vendrá dado por el producto de los montantes de los subintervalos parciales (1).

(1) Vide Tecnica delle Assicurazioni Sociali, Ignazio Messina, Parte I, Capitulo I, párrafos 1 y 2, págs. 12 y ss.; Istituto Nazionale della Previdenza Sociale, Roma, 1951.

Ejemplos:

La ley de capitalización compuesta goza de la propiedad de ser excindible, dicha ley viene dada por la expresión

$$L(s, n) = (1 + i)^{n-s}$$

y en consecuencia:

$$L(0, n) = L(0, u) \cdot L(u, n) = (1 + i)^{u} \cdot (1 + i)^{n-u} = \\ = (1 + i)^{n} = L(0, n) \qquad \text{c.d.d.}$$

En tanto que la ley de capitalización simple,

$$L(s, n) = [1 + (n - s)i]$$

no goza de la propiedad de ser excindible, en efecto:

$$L(0, u) \cdot L(u, n) = [1 + ui]\,[1 + (n - u)i] = \\ = [1 + ni(1 + i) - (ui)^2] \neq (1 + ni) = L(0, n) \qquad \text{c.d.d.}$$

SECCIÓN 2

Diversos criterios para evaluar reservas en los contratos de Seguro sobre la duración de la vida humana

Preámbulo:

Sea $G(t)$ una función definida en (a, b) [1] de la cual dependa la obligación del pago de prima del asegurado al asegurador; sea $M(t)$ una función definida en (c, d) de la cual dependa la obligación de indemnizar al asegurado en caso de ocurrencia del evento protegido; sea, finalmente, $D(t)$ una función definida en $(0, w)$ de la cual dependa la vigencia jurídica del contrato de seguro. Elíjase como origen de medida (cero) el momento en que inicia cada contrato su vigencia jurídica (sea el límite inferior del intervalo $(0, w)$).

En estas condiciones la duración *puramente formal* del contrato se iniciará en el momento 0 (eventualmente menor

[1] Por (a, b) se indica el intervalo cerrado $a \leqslant t \leqslant b$.

que a y c) y terminará en w (eventualmente mayor que b y d). La vigencia *formal* del contrato estará contenida en (a, b) que a su vez estará contenido en (0, w); la vigencia material estará a su vez contenida en (c, d) contenido en (0, w).

Las funciones G, M y D pueden tener —consecuente y necesariamente— puntos comunes en los intervalos de definición, en particular el intervalo de definición de D contiene totalmente los de definición de G y M. Es común, en los seguros de vida contractuales, que los intervalos de las tres funciones sean totalmente coincidentes.

G, M y D expresan, respectivamente, las condiciones a las que se sujeta el pago de primas, la percepción de indemnizaciones (o mejor el derecho a indemnización) y la vigencia jurídica del contrato de seguros; pueden ser tan variadas como la práctica aseguradora estime oportuno y desde el punto de vista teórico no están sujetas a ninguna restricción, excepto la generalísima de hallarse en relación biunívoca con el intervalo de definición, que ha de ser real, y de ser ellas mismas reales (funciones reales de variable real).

Ejemplo:

Un ejemplo puede ser útil para mejor aclarar lo anterior. Un cliente (soltero) suscribe con una compañía aseguradora un contrato de seguro por el cual el asegurador se obliga a lo siguiente: *(a)* si la muerte del asegurado ocurre dentro de los 30 años siguientes a los 10 de tomada la póliza, se pagará a los beneficiarios la suma S; *(b)* si la (futura) esposa del asegurado muere antes de cumplir los 65 años de edad, se pagará al asegurado (o a sus beneficiarios) la suma Y. Por su parte, el asegurado se obliga al pago de la prima anual P siempre que (c) él y su (eventual) esposa estén ambos en vida y ella sea menor de 65 años.

En las condiciones anteriores la vigencia *puramente formal* (o jurídica) del contrato se extiende desde el momento cero (emisión o formación del contrato) hasta transcurridos cuarenta años o cumplimiento de la edad 65 por la (eventual esposa). La vigencia *formal* del contrato (obligación del pago de prima) está definida por la cláusula (c) y se inicia en el momento cero. La vigencia *material* se inicia a los diez años de emitido el contrato (o momento de las nupcias si anterior) y se continúa hasta treinta años después, o cumplimiento de los 65 años de edad de la esposa, lo que ocurra por último.

Modalidades en el cálculo de reservas.

Las reservas pueden calcularse según diversas modalidades, siendo las más usuales las cuatro siguientes que se indican con la terminología usualmente empleada en Europa (continental):

I. *Reserva de Prima Pura* (símbolo ${}_tV$):

El asegurador valora sus obligaciones e ingresos futuros tomando en consideración únicamente costos e ingresos netos de la gestión, sin tener cuenta de los ingresos (gastos) por administración, liquidación, adquisición, etc.

La reserva (prospectiva) resulta ser en consecuencia:

$$V_{D(t)} = A_{M(t)} - P_{G(t)}\ \ddot{a}_{G(t)}$$

En todos los casos de contratos vendidos a prima constante, ésta será función de la particular estructura que posea a la fecha de emisión, es decir:

$$P_{G(t)} = P_{G(o)}$$

En el caso de un contrato de seguro de los denominados vida pagos limitados (sean los que indemnizan a la muerte del asegurado, cuando quiera que ésta ocurra; obligándose el asegurado al pago de primas por a lo sumo n años), se tendrá la siguiente expresión para la reserva prospectiva al tiempo t:

D(t) estará definida en $0 \leqslant t \leqslant w$
M(t) definida en $x \leqslant t \leqslant w - x$
G(t) definida en $0 \leqslant t \leqslant n$ (e igual a cero para todo $t \geqslant n$).

En consecuencia la reserva prospectiva será:

$$ {}_tV_x = A_{x+t} - {}_{/n}P_x \; {}_{/n-t}\ddot{a}_{x+t} \quad ^{(1)} \qquad \text{para } t < n $$

y

$$ {}_tV_x = A_{x+t} \qquad \text{para } t \geqslant n $$

II. *Reserva de Inventario* (símbolo ${}_tV'$).

A la reserva de prima pura se añade otra (símbolo ${}_tV^f$) suficiente para enfrentar los gastos futuros por administración del contrato; los ingresos futuros se valoran con base en una *prima de inventario* (símbolo P′) que es la *prima pura* (símbolo P) aumentada en los costos de administración (2). Para la reserva indicada en el caso anterior, se tendrá: para $t < n$:

$$ {}_tV'_x = A'_{x+t} - {}_{/n}P'_x \; {}_{/n-t}\ddot{a}_{x+t} = (A_{x+t} + f \cdot \ddot{a}_{x+t}) - $$

$$ - \left({}_{/n}P_x + f \frac{\ddot{a}_x}{{}_{/n}\ddot{a}_x} \right) {}_{/n-t}\ddot{a}_{x+t} = $$

$$ = (A_{x+t} - {}_{/n}P_x \; {}_{/n-t}\ddot{a}_{x+t}) + f \left\{ \ddot{a}_{x+t} - \frac{\ddot{a}_x}{{}_{/n}\ddot{a}_x} \; {}_{/n-t}\ddot{a}_{x+t} \right\} = $$

$$ = {}_tV_x + {}_tV^f $$

para $t \geqslant n$

$$ {}_tV'_x = A'_{x+t} = A_{x+t} + f \; \ddot{a}_{x+t} = {}_tV_x + {}_tV^f \quad ^{(*)} $$

III. *Reservas zillmerizadas* (símbolo ${}_tV^{(z)}$).

Las reservas zillmerizadas o de Zillmer (una variante de las cuales lo constituyen las reservas de Zillmer-Höckner o

---

(1) Con ${}_{/n}P_x$ se indica el valor:

$$ {}_{/n}P_x = \frac{A_x}{{}_{/n}\ddot{a}_x} $$

(2). Pero no en los de cobro. A menudo los actuarios franceses gustan de hacer explícita la relación de la prima de inventario a prima de tarifa; se obtiene así una notación ligeramente diversa de la aquí utilizada, pero del mismo contenido y significado. Cfr. Richard, op. cit., págs. 337 y ss.

(*) Para $f \neq 0$, resulta en consecuencia ${}_tV^f \geqslant 0$ y por ende ${}_tV' \geqslant {}_tV$.

método de las x + 1) son reservas de prima pura disminuídas en el monto de la reserva (negativa) necesaria para amortizar los gastos de adquisición del contrato en que ya se ha incurrido (se trata de gastos pre-pagados, sea ya incurridos y liquidados pero no amortizados totalmente). La reserva de ajuste que se sustrae se indica con el símbolo ${}_tV^F$, y es el valor actuarial del saldo insoluto de los costos iniciales de adquisición.

Para efectuar el cálculo de la reserva zillmerizada el método más usual consiste en valorar los ingresos futuros con base en una prima modificada ($P^{(z)}$) y computar los gastos futuros según el método de la reserva de prima pura.

Si se indica con F la tasa unitaria de gastos de adquisición, se tendrá para la prima zillmerizada la siguiente expresión:

$$P^{(z)}_{G(0)} = P_{G(0)} + \frac{F}{\overset{''}{a}_{G(0)}}$$

y, en consecuencia, la reserva zillmerizada vendrá dada por:

$$V^{(z)}_{D(t)} = A_{M(t)} - P^{(z)}_{G(t)} \overset{''}{a}_{G(t)} = A_{M(t)} -$$

$$- \left\{ P_{G(t)} + \frac{F}{\overset{''}{a}_{G(0)}} \right\} \overset{''}{a}_{G(t)} =$$

$$= \left\{ A_{M(t)} - P_{G(t)} \overset{''}{a}_{G(t)} \right\} - \frac{F}{\overset{''}{a}_{G(0)}} \overset{''}{a}_{G(t)} =$$

$$= V_{D(t)} - V^{F}_{D(t)} \therefore V_{D(t)} \leqslant V^{(z)}_{D(t)} \quad (3)$$

IV. *Reserva Completa* (símbolo ${}_tV''$).

Es ésta la única que considera la situación efectiva de la

(3) No parece necesario aclarar nuevamente la simbología mediante la utilización de la notación normal, como se ha dicho anteriormente.

cartera. Para evaluarla se computan ingresos y egresos totales futuros. En consecuencia, su valor viene dado por

$$V''_{D(t)} = V_{D(t)} + V^{f}_{D(t)} + V^{F}_{D(t)} \quad (\text{con } V^{F}_{D(t)} < 0)$$

Es conveniente señalar que conforme al principio financiero rector de los seguros privados, sea el de que *el asegurador ha de ser siempre deudor del asegurado y nunca acreedor,* es indispensable que —para todas las antigüedades de cada contrato— la reserva completa sea siempre no negativa [4].

Es curioso notar que uno de los países en que mayor desarrollo muestra el seguro de vida, los Estados Unidos de América, no observa, por regla general, este principio, sino que mediante una técnica por ellos denominada de los "asset shares" (reserva matemática suficiente parece ser el término español que corresponde con mejor aproximación al sentido americano) establecen una mutualidad en los seguros contractuales, por medio de la cual las antigüedades posteriores subvencionan a las iniciales; se trata —en el fondo— de gestionar los seguros privados, en los primeros años al menos, con criterios propios de los seguros sociales, sea descontando los superávits futuros latentes, para reconocerlos a los asegurados en los años iniciales de cada contrato. Para utilizar un tal método es necesario emplear, como bases de cálculo de primer orden, modelos que no representan la realidad efectiva (supuesta) de la gestión; en tanto que para la elaboración de los "asset shares" se emplea un diverso modelo, estimando este último como más adherente al desarrollo efectivo de la gestión. Esta metodología es evidentemente impropia, desde un punto de vista estrictamente científico, pero es necesaria en aquel país debido a los sistemas de control jurídico a que se encuentran sometidas las compañías aseguradoras, que no les permite elaborar las tarifas conforme a los datos deducidos de la propia experiencia, sino que las

---

(4) No siempre es posible, desgraciadamente, satisfacer este principio, pues a menudo los gastos de adquisición superan con mucho el valor máximo tolerable para obtener una reserva siempre no negativa. Cfr. Cultrera, op. cit., pág. 327, Capitulo XII, párrafo 2.

obliga a bases de cálculo y "valores mínimos" impuestos —por vía de reglamento general— por los comisarios de seguros.

Cuando se utiliza el criterio de restituir al asegurado que rescinde su contrato el valor de la reserva completa no es necesario tomar en consideración los desequilibrios financieros que (eventualmente) puedan producir las rescisiones; en efecto, como se ha demostrado en el capítulo V [5] de este estudio, la teoría de las tablas de mutualidad garantiza que en dichas condiciones las rescisiones no producen ninguna variación en la estructura financiera de la gestión. No sucede lo mismo cuando se devuelven valores diversos de la reserva completa, siendo entonces necesario elaborar un pormenorizado estudio de los desequilibrios financieros inducidos por la rescisión de contratos.

Comparación de reservas.

De lo anterior resulta que el método de valuación de reservas de inventario es el más conservador, siguiéndole el de prima pura y correspondiente al de Zillmer las reservas mínimas.

En cuanto a la reserva completa, que es la suficiente para garantizar la estabilidad y solidez de la gestión, es siempre mayor o igual a la reserva de Zillmer; será mayor, menor o igual a la de prima pura, según que la reserva de inventario sea mayor, menor o igual a la de Zillmer. La reserva completa en todo caso será menor (o igual) a la reserva de inventario, pero nunca mayor.

Lo anterior queda expresado por las desigualdades siguientes:

$$V^{(z)}_{D(t)} \leqslant V_{D(t)} \leqslant V'_{D(t)}$$

$$V''_{D(t)} \gtrless V_{D(t)} \qquad \text{según sea} \qquad V^{f}_{D(t)} \gtrless V^{F}_{D(t)}$$

$$V''_{D(t)} \geqslant V^{(z)}_{D(t)}$$

$$V''_{D(t)} \leqslant V'_{D(t)}$$

[5] En el supuesto de total coincidencia entre bases de cálculo de primer y segundo orden.