Las aplicaciones de la matemática actuarial analítica

Por el Prof. RODOLFO MASCIOTTI

La matemática actuarial analítica es aquel Ramo de la matemática actuarial que calcula los valores actuariales en el continuo en forma exacta sirviéndose tan sólo de funciones exponenciales, en base a la introducción de particulares medias de tipos instantáneos de mortalidad (tanto medio, tanto central, tanto uniforme).

Dado que la función exponencial es una función analítica, la matemática actuarial expresada en forma exacta por medio de la misma, permite la aplicación directa del cálculo analítico a todas las fórmulas actuariales, con los desarrollos y las simplificaciones facilitadas por el cálculo analítico, y, por lo tanto, justifica para dicha matemática actuarial, expresada de esta forma, el nombre de matemática actuarial analítica.

La relativa teoría se encuentra expuesta por extenso en nuestro libro *La Mathématique actuarielle analytique.*

La nueva matemática actuarial permite expresar todas las primas y todas las reservas de las varias formas de seguros por medio de particulares medias y tipos de mortalidad, consideradas constantes para la duración de cada contrato y, por lo tanto, para cada par de valores x y n, permitiendo expresar toda la matemática actuarial en esta forma para cada problema, tratado en el continuo, llegando a soluciones muy sencillas y elegantes.

Dado que, por otro lado, se puede usar una fórmula especial para el paso de las anualidades continuas a las discontinuas y viceversa, del tipo

$$a_{x,\overline{n|}} = k\ \bar{a}_{x,\overline{n|}}$$

está claro que todos los problemas del discontinuo (siendo todas las primas y las reservas expresables por medio de anualidades, según está demostrado en la página 86 del libro citado) pueden ser transferidas al continuo, encontrando aquí su solución sencilla y práctica y ser después transportada otra vez al discontinuo, y con ello la solución encontrada, que es la misma también en este campo.

De esta forma, la teoría ayuda de veras a la práctica, facilitando un instrumento de análisis que de otra forma no podría ser empleado.

La fórmula de transferencia de las anualidades continuas a las discontinuas se demostrará a continuación.

Vamos a indicar antes las definiciones y los procedimientos prácticos de cálculo de los nuevos promedios de tipos de mortalidad, introducidos por la matemática actuarial analítica, advirtiendo que sus valores numéricos nos sirven tan sólo para algunas aplicaciones, asimismo, numéricas, y además para darnos cuenta de su marcha, mientras que su definición teórica sirve para el planteamiento teórico, resuelto de una vez para siempre, en el libro citado, de algunos problemas, asimismo, teóricos, de técnica actuarial de fundamental importancia.

LOS TIPOS FIJOS DE MORTALIDAD

Los nuevos tipos medios de mortalidad, y los nuevos promedios introducidos por la matemática actuarial analítica, fijos para cada par x y n, además del tipo medio conocido $\mu_{x,\overline{n}|}$ dado por ($E_x^n = v_{x,\overline{n}|}$; $\delta = \log(1 + i)$)

$$e^{-(\mu_{x,\overline{n}|} + \delta)n} = v_{x,\overline{n}|}$$

son el tipo centralizado $\mu^{\delta}_{x,\overline{n}|}$ dado por

$$\bar{a}_{\overline{n}|}(\mu^{\delta}_{x,\overline{n}|} + \delta) = \bar{a}_{x,\overline{n}|}$$

y el tipo uniforme $\bar{\bar{\mu}}^{\delta}_{x,\overline{n}|}$ dado por

$$e^{-(\bar{\bar{\mu}}^{\delta}_{x,\overline{n}|} + \delta)n} = \frac{1}{n}\,\bar{S}_{x,\overline{n}|}$$

Los dos tipos son intercambiables, siendo $\bar{a}_{x,\overline{n}|} = v_{x,\overline{n}|}\,\bar{S}_{x,\overline{n}|}$;

bastando, en general, adoptar uno solo de ellos, si bien en Vida Entera hace falta aplicar el primero $\mu^{\delta}_{x,\,\overline{w-x|}}$ no pudiendo aplicar el otro, $\overline{\overline{\mu}}^{\delta}_{x,\,\overline{w-x|}}$.

El cálculo práctico de los tipos antedichos puede hacerse por vía indirecta, a condición de que se conozcan los valores actuariales de E^n_x ; $a_{x,\,\overline{n|}}$; $S_{x,\,\overline{n|}}$ (de los cuales se pasan a los $\bar{a}_{x,\,\overline{n|}}$; $\bar{S}_{x,\,\overline{n|}}$ por medio de la fórmula antedicha) empleando un prontuario de matemática financiera en el cual están indicados los valores de v^n; $a_{\overline{n|}}$; $S_{\overline{n|}}$

Para tal fin es suficiente interpolar entre las dos columnas donde figuran en la línea n el valor de E^n_x ya conocido, o bien de $\bar{a}_{x,\,\overline{n|}}$ o de $\bar{S}_{x,\,\overline{n|}}$ (estos últimos dos divididos por i/δ), y encontrar el tipo correspondiente del cual hay que restar δ después de haberlo aumentado de una unidad y haber tomado el logaritmo neperiano del mismo.

El cálculo antedicho puede hacerse también por vía directa, especialmente si no se conocen los valores actuariales E^n_x; $a_{x,\,\overline{n|}}$; $S_{x,\,\overline{n|}}$ por medio de las fórmulas siguientes, las cuales, aproximadas, con excepción de la primera, se sacan del libro citado.

$$\bar{\mu}_{x,\,\overline{n|}} = \frac{1}{n} \log \frac{l_x}{l_{x+n}}$$

$$\mu^{\delta}_{x,\,\overline{n|}} = \frac{\sum_{0}^{n} {}_t\, \bar{\mu}_{x,\,\overline{t|}} \cdot t \cdot (1+i)^t}{\sum_{0}^{n} {}_t\, t \cdot (1+i)^t}$$

o también

$$\mu'^{\delta}_{x,\,\overline{n|}} = \frac{\sum_{0}^{n} {}_t\, \bar{\mu}_{x+n-t,\,\overline{t|}} \cdot t \cdot (1+i)^t}{\sum_{0}^{n} {}_t\, t \cdot (1+i)^t}$$

$$\overline{\overline{\mu}}^{\delta}_{x,\,\overline{n|}} = \frac{1}{n} \log \frac{\frac{i}{\delta} S_{\overline{n|}} (\mu'^{\delta}_{x,\,\overline{n|}} + \delta)}{n} - \delta$$

dado que

$$e^{(\overline{\overline{\mu}}^{\delta}_{x,\overline{n}|} + \delta)n} = \bar{S}_{\overline{n}|\,(\mu'^{\delta}_{x,\overline{n}|} + \delta)}$$

Completando las tablas de supervivencia con los valores de $\bar{\mu}_{x,\overline{n}|}$ y con $\mu^{\delta}_{x,\overline{n}|}$ y $\overline{\overline{\mu}}^{\delta}_{x,\overline{n}|}$ [los tipos $\mu^{\delta}_{x,\overline{n}|}$ y $\overline{\overline{\mu}}^{\delta}_{x,\overline{n}|}$ son prácticamente casi constantes para una misma edad de vencimiento $x + n$, por lo que será suficiente calcular sus valores tan sólo para las distintas edades $x + n$ (acerca de 80 valores), escogiendo oportunamente para cada vencimiento la edad x] se pueden ejecutar todos los pases de los descuentos demográficos E^n y de las anualidades $\bar{a}_{x,\overline{n}|}$ y $\bar{S}_{x,\overline{n}|}$ desde un tipo de interés al otro y desde una tabla a la otra.

En efecto, tenemos

$$v_{x,\overline{n}|} = e^{-(\bar{\mu}_{x,\overline{n}|} + \delta)n}$$

$$\bar{S}_{x,\overline{n}|} = n\, e^{(\overline{\overline{\mu}}_{x,\overline{n}|} + \delta)n}$$

$$\bar{a}_{x,\overline{n}|} = n\, e^{-(\mu_{x,\overline{n}|} - \overline{\overline{\mu}}^{\delta}_{x,\overline{n}|})n}$$

y, por lo tanto, dado que son

$$e^{\Delta\bar{\mu}_{x,\overline{n}|}\,.\,n} = 1 + n\,\Delta\bar{\mu}_{x,\overline{n}|}$$

y

$$e^{\Delta\overline{\overline{\mu}}_{x,\overline{n}|}\,.\,n} = 1 + n\,\Delta\overline{\overline{\mu}}^{\delta}_{x,\overline{n}|}$$

dada la insignificancia de $\Delta\bar{\mu}_{x,\overline{n}|}$ y de $\Delta\overline{\overline{\mu}}^{\delta}_{x,\overline{n}|}$ los coeficientes de paso serán dados:

para

$$v_{x,\overline{n}|} \quad ; \quad (1 + n\,\Delta\bar{\mu}_{x,\overline{n}|})\; e^{\Delta\delta\,.\,n}$$

para

$$\bar{S}_{x,\overline{n}|} \quad ; \quad (1 + n\,\Delta\overline{\overline{\mu}}^{\delta})\; e^{\Delta\delta\,.\,n}$$

para

$$\bar{a}_{x,\overline{n}|} \quad ; \quad \left[1 - n(\Delta\bar{\mu}_{x,\overline{n}|} - \Delta\bar{\bar{\mu}}^{\delta}_{x,\overline{n}|})\right]$$

donde

$$e^{\Delta\delta \cdot n} = \frac{(1+i')^n}{(1+i)^n}$$

Empleando las fórmulas de paso de las anualidades discontinuas a las continuas, las mismas fórmulas valen para las anualidades discontinuas.

PRINCIPALES APLICACIONES TECNICAS DE LA MATEMATICA ACTUARIAL ANALITICA

1) Cálculo electrónico de las reservas técnicas de Balance sin alteración del orden de los contratos en el fichero o en la cinta magnética, cualquiera que sea dicho orden, esto es, sin ninguna selección preventiva. (Procedimiento reservado y todavía no dado a conocer).
2) Cálculo aproximado de las reservas técnicas de Balance, por medio de la edad media de la cartera, para Sociedades y Entidades que no disponen de grandes medios mecanográficos, o bien que quieran efectuar sondajes en grupos separados de contratos. (Véase el principio de la concentración de los contratos en el libro citado, según el cual para cada forma, duración y tiempo que falte para el vencimiento, la edad media x de la cartera, a los fines del total de las reservas

$$_tV^n_{x_0} \sum_1^N C_i = \sum_1^N {_tV^n_{x_i}} \cdot C_i$$

es dada por

$$c^{x_0} = \frac{\sum_{i=1}^{N} c^{x_i} C_i}{\sum_{i=1}^{N} C_i}$$

donde figura la constante de Makeham c y C_i el capital del contrato.

3) Cálculo de todas las primas y reservas por medio tan sólo de los descuentos demográficos E^n_x y las solas anualidades $a_{x,\overline{n}|}$ y $S_{x,\overline{n}|}$ para las operaciones de cartera (reducciones, rescates, transformaciones). (Véase tabla a página 86 del libro citado, que reproducimos al final).

4) Paso de los descuentos demográficos E^n_x y de las anualidades $S_{x,\overline{n}|}$ y $a_{x,\overline{n}|}$ de un tipo de interés al otro y de una tabla a la otra. (Véase el procedimiento indicado antes).

5) Abolición del cálculo de la anualidad (y de los seguros) sobre más cabezas, sin limitación para el número de cabezas, reduciéndolas todas en medida exacta a anualidades sobre una sola cabeza. (Véase el teorema de la cabeza única en el libro ya citado, según el cual la edad de la cabeza única es tal que

$$\bar{a}_{x_0,\overline{n}|\delta_0} = \bar{a}_{x_1, x_2, \ldots, x_s,\overline{n}|\delta}$$

corresponde a la gomprtziana x_0 dada por $c^{x_0} = \sum_1^i c^{x_i}$ y el tipo δ_0 viene dado por $\delta_0 = \delta + (S - 1)\alpha$, donde α y c son las constantes de Makehaim y s representa el número de las cabezas.

6) Introducción del método continuo en cualquier problema del discontinuo con el fin de facilitar y simplificar su solución. (Véase la fórmula anexa de paso de las anualidades continuas a las discontinuas).

FORMULA DE PASAJE DE LAS ANUALIDADES CONTINUAS A LAS DISCONTINUAS Y VICEVERSA

Consideremos la fórmula de Woolhous

$$\bar{a}_x = a_x + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}(\mu_x + \delta)$$

de la cual siendo

$$\bar{a}_{x,\overline{n}|} = \bar{a}_x - v_{x,\overline{n}|}\,\bar{a}_{x+n}$$

se tiene

$$\bar{a}_{x,\overline{n}|} = a_{x,\overline{n}|} + (1 - v_{x,\overline{n}|})\left(\frac{\sigma - \delta}{12}\right) - \frac{\mu_x - v_{x,\overline{n}|}\,\mu_{x+n}}{12}$$

El valor de la última expresión del segundo miembro (calculado con la tabla S. I. M. 1.901-4 %), es de 5/1.000.000 de la primera expresión $a_{x,\overline{n}|}$ para $x = 30$ y $n = 30$, y de 13/1.000.000 para $x = 50$ y $n = 10$, y por lo tanto, del todo insignificante.

Recordando que

$$1 - v_{x,\overline{n}|} = 1 - e^{-(\bar{\mu}_{x,\overline{n}|} + \delta)n}$$

$$\bar{a}_{x,\overline{n}|} = \frac{1 - e^{-(\mu^{\delta}_{x,\overline{n}|} + \delta)n}}{\mu^{\delta}_{x,\overline{n}|} + \delta}$$

tenemos

$$\frac{a_{x,\overline{n}|}}{\bar{a}_{x,\overline{n}|}} = 1 - \frac{\mu^{\delta}_{x,\overline{n}|} + \delta}{12} \cdot \frac{1 - e^{-(\bar{\mu}_{x,\overline{n}|} + \delta)n}}{1 - e^{-(\mu^{\delta}_{x,\overline{n}|} + \delta)n}} (\sigma - \delta)$$

y puesto que

$$\Delta\mu = \mu^{\delta}_{x,\overline{n}|} - \bar{\mu}_{x,\overline{n}|} \qquad \text{y} \qquad e^{n\,\Delta\mu} = 1 + n\,\Delta\mu$$

tenemos

$$\frac{a_{x,\overline{n}|}}{\bar{a}_{x,\overline{n}|}} = 1 - \frac{\mu^{\delta}_{x,\overline{n}|} + \delta}{12} (\sigma - \delta)$$

porque

$$1 - e^{-(\bar{\mu}_{x,\overline{n}|} + \delta)n} = 1 - e^{-(\mu^{\delta}_{x,\overline{n}|} + \delta)n} - n\,\Delta\mu\, e^{-(\mu^{\delta}_{x,\overline{n}|} + \delta)n}$$

y el último término, multiplicado por

$$\frac{\mu^{\delta}_{x,\overline{n}|} + \delta}{12} \quad \frac{\sigma - \delta}{1 - e^{-(\mu^{\delta}_{x,\overline{n}|} + \delta)n}}$$

es del orden de pocas diezmilésimas (para $n = 40$) y, por lo tanto, sin importancia respecto a la unidad.

Sin embargo, el tipo centralizado $\mu^{\delta}_{x,\overline{n|}}$ es prácticamente casi invariable para una misma edad al vencimiento (tabla S. I. M. 1.901-4 % para $x = 25$ y $n = 30$, $\mu^{\delta} = 0{,}014$; para $x = 35$ y $n = 20$, $\mu^{\delta} = 0{,}014$; para $x = 45$ y $n = 10$, $\mu^{\delta} = 0{,}016$ (1), y levemente variable para grupos de edad a vencimientos escalonados de diez en diez años.

Tomando, por lo tanto,

$$K_{x+n} = 1 - \frac{\mu^{\delta}_{x,\overline{n|}} + \delta}{12} (\sigma - \delta)$$

tenemos

$$\frac{a_{x,\overline{n|}}}{\bar{a}_{x,\overline{n|}}} = K_{x+n}$$

con K_{x+n} levemente variable para cada decenio de edad al vencimiento y, con menor aproximación, con K constante si se toma por el mismo el valor relativo a la edad al vencimiento medio $x + n = 60$.

(1) Véase R. MASCIOTTI: «Un procedimiento matemático para la variación del tipo de interés». Actas del Congreso Internacional de los Actuarios. París, 1937.

TABLA

TABLA

De las primas y de las reservas de las principales formas de seguro expresado tan sólo por medio de descuentos (E^n_x) y anualidades $(\bar{a}_{x,\overline{n}|}$ y $\bar{S}_{x,\overline{n}|})$.

FORMA	PRIMAS UNICAS	PRIMAS ANUALES	RESERVAS POR AÑOS
C.D.	$v_{x,\overline{n}|}$	$\dfrac{1}{\bar{S}_{x,\overline{n}|}}$	$\dfrac{\bar{S}_{\overline{t}|}}{\bar{S}_{\overline{n}|}}$
T.	$v_{x,\overline{n}|}\, d^0_{x,\overline{n}|}$	$\dfrac{d^0_{x,\overline{n}|}}{\bar{S}_{x,\overline{n}|}}$	$\bar{d}^0_{x,\overline{n}|}\dfrac{\bar{S}_{x,\overline{t}|}}{\bar{S}_{x,\overline{n}|}} - \bar{d}^0_{x,\overline{t}|}$
T.C.	$\bar{I}_{x,\overline{n}|}\,\bar{a}_{x,\overline{n}|} - n\, v_{x,\overline{n}|}$	$\bar{I}_{x,\overline{n}|} - \dfrac{n}{\bar{S}_{x,\overline{n}|}}$	$t - n\dfrac{\bar{S}_{x,\overline{t}|}}{\bar{S}_{x,\overline{n}|}} + (\bar{I}_{x,\overline{n}|} - \bar{I}_{x,\overline{t}|})\bar{S}_{x,\overline{t}|}$
C.A.t.	$\dfrac{1}{\delta}\left[1 - \dfrac{v_{x,\overline{n}|}}{v^n}(1 + v^n d^0_{x,\overline{n}|})\right]$	$1 - \dfrac{\bar{S}_{\overline{n}|}}{\bar{S}_{x,\overline{n}|}}$	$\bar{S}_{\overline{t}|} - \bar{S}_{\overline{n}|}\,\dfrac{\bar{S}_{x,\overline{t}|}}{\bar{S}_{x,\overline{n}|}}$

V.I.v.	$1 - \delta\, \bar{a}_x$	$\dfrac{1}{\bar{a}_x} - \delta$	$\dfrac{1 - \delta\, \bar{a}_n}{\bar{a}_x}\, \bar{S}_{x,\overline{t}\|} - \bar{d}^0_{x,\overline{t}\|}$
V.I.t.	$1 - \delta\, \bar{a}_x$	$\dfrac{1 - \delta\, \bar{a}_x}{\bar{a}_{x,\overline{n}\|}}$	$\dfrac{1 - \delta\, \bar{a}_x}{a_{x,\overline{n}\|}}\, \bar{S}_{x,\overline{t}\|} - \bar{d}^0_{x,\overline{t}\|}$
M.	$1 - \delta\, \bar{a}_{x,\overline{n}\|}$	$\dfrac{1 + \bar{d}^0_{x,\overline{n}\|}}{\bar{S}_{x,\overline{n}\|}}$	$(1 + \bar{d}^0_{x,\overline{n}\|})\, \dfrac{\bar{S}_{x,\overline{t}\|}}{\bar{S}_{x,\overline{n}\|}} - \bar{d}^0_{x,\overline{t}\|}$
D.M.	$\dfrac{1}{2}\,(1 - \delta\, \bar{a}_{x,\overline{n}\|} + v_{x,\overline{n}\|})$	$\dfrac{1 + \dfrac{1}{2}\, d^0_{x,\overline{n}\|}}{\bar{S}_{x,\overline{n}\|}}$	$\left(1 + \dfrac{1}{2}\, \bar{d}^0_{x,\overline{n}\|}\right) \dfrac{\bar{S}_{x,\overline{t}\|}}{\bar{S}_{x,\overline{n}\|}} - \dfrac{1}{2}\, \bar{d}^0_{x,\overline{t}\|}$
M.C.	$\dfrac{1}{n}\, \bar{I}_{x,\overline{n}\|}\, \bar{a}_{x,\overline{n}\|}$	$\dfrac{1}{n}\, \bar{I}_{x,\overline{n}\|}$	$\dfrac{t}{n} + \dfrac{1}{n}\, (\bar{I}_{x,\overline{n}\|} - \bar{I}_{x,\overline{t}\|})\, \bar{S}_{x,\overline{t}\|}$
T.F.	v^n	$\dfrac{v^n}{a_{x,\overline{n}\|}}$	$\dfrac{v^n}{v_{x,\overline{n}\|}}\, \dfrac{\bar{S}_{x,\overline{t}\|}}{\bar{S}_{x,\overline{n}\|}} - v^n(v^{-1}_{x,\overline{n}\|} - v^{-t})$
C.D. aca t	v^n	$\dfrac{1}{\bar{S}_{\overline{n}\|}}$	$\dfrac{\bar{S}_{\overline{t}\|}}{\bar{S}_{\overline{n}\|}}$

con

$$\bar{d}^{0}_{x,\overline{n|}} = v^{-1}_{x,\overline{n|}} - \delta\, S_{x,\overline{n|}} - 1$$

$$\bar{I}_{x,\overline{n|}} = \frac{\bar{a}_{x,\overline{n|}} - \delta(Ia)_{x,\overline{n|}}}{\bar{a}_{x,\overline{n|}}}$$

La tabla vale también en el campo del discontinuo en medida exacta; es suficiente tomar en la misma a_x en vez de $\bar{a}_x$ $\ddot{a}_{x,\overline{n|}}$ en lugar de $\bar{a}_{x,\overline{n|}}$ · $d = 1 - v$ en lugar de δ e $(Ia)_{x,\overline{n|}}$ en lugar de $(I\bar{a})_{x,\overline{n|}}$