

# TRABAJOS DE COLABORACION

# Análisis Espectral de Series Temporales en Economía

## INDICE

	Páginas
I. INTRODUCCION .....	19
CAPITULO I: EL ANÁLISIS ESPECTRAL .....	22
1.1. Consideraciones Generales .....	22
1.2. Aspectos estadísticos del análisis espectral .....	37
1.2.1. Estimación del espectro .....	37
1.2.2. Estimadores espectrales generales .....	43
1.3. Etapas y aspectos fundamentales del análisis espectral ...	50
1.4. Análisis espectral mutuo o cruzado .....	51
1.5. Ventajas e inconvenientes de los procedimientos de análisis de series cronológicas .....	57
CAPITULO II: ANÁLISIS ESPECTRAL DEL FENÓMENO ECONÓMICO.	61
2.1. Análisis y determinación de ciclos económicos .....	62
2.2. Problemas en la estimación de espectros de series cronológicas económicas .....	64
2.3. Consideraciones sobre el espectro de series cronológicas económicas .....	70
2.4. Aplicación del espectro mutuo o cruzado en economía ...	74
CAPITULO III: CONCLUSIONES .....	77
APENDICE: TEORÍA MATEMÁTICA PARA EL ANÁLISIS DE SERIES CRONOLÓGICAS .....	81

# **Análisis espectral de series temporales en economía**

Por JULIO GARCIA-VILLALON

*Este trabajo es, en resumen, una tesis doctoral defendida en la Facultad de Ciencias Políticas, Económicas y Comerciales, de la Universidad de Madrid. Fue dirigida por el Dr. Antonio Lasheras-Sanz, a quien quisiera expresar un profundo agradecimiento por su gran ayuda.*

*Quisiera también dar las gracias a los señores doctores Angel Vegas Pérez, Gonzalo Arnáiz Vellando, Antonio Fernández de Troconiz, Angel Alcaide Inchausti y José Castañeda Chornet, quienes en una u otra forma contribuyeron a este trabajo.*

## I. INTRODUCCION

El análisis de series cronológicas (1) es de gran interés en diversos campos, entre los que podemos citar la Economía, la Ingeniería de Telecomunicación, la Geofísica, etc. Los objetivos del análisis de las series cronológicas varían según el campo elegido. Un objetivo puede

---

(1) Consideramos que es indiferente el empleo de la denominación "series cronológicas" o "series temporales", si bien nosotros utilizaremos preferentemente la primera.

ser la predicción del futuro, basada en el conocimiento completo de un sistema que evoluciona en el tiempo de forma aleatoria, y en el parcial o total conocimiento del pasado de una serie cronológica. En otros casos, puede pretenderse el control de una serie, en la medida que el conocimiento probabilístico nos lo permita. En base a una cantidad limitada de información, como la que suministra una serie cronológica de longitud finita, se trata, en general, de hacer inferencias apoyadas en la teoría de la probabilidad que tiene su origen en la serie, para, luego, analizar su estructura fundamental.

Durante mucho tiempo, los métodos utilizados para el análisis estadístico de series cronológicas no han proporcionado gran satisfacción. Han tenido poco interés práctico; no se conocían con exactitud las condiciones que habían de cumplirse para que fueran válidos; en el aspecto matemático surgían grandes dificultades, a la vez que la eficiencia y potencia de su análisis eran de pequeño alcance...

En las últimas décadas, la teoría del análisis de series cronológicas ha avanzado mucho, gracias al impacto que ha producido en los diversos campos de aplicación y a los avances de la moderna teoría de la probabilidad.

Los progresos logrados en el terreno del análisis de series cronológicas se han debido principalmente a:

1) Un contacto real con las demandas prácticas de empresas, industrias y organismos de todo tipo por parte de los analistas y probabilistas, quienes han inventado, y deberán continuar haciéndolo, nuevas clases de modelos estocásticos, basados en suposiciones verdaderamente reales.

2) Un fructífero desarrollo de métodos estadísticos sencillos y válidos, con base en modelos apropiados, y

3) Las investigaciones teóricas basadas en un fundamento matemático y rigurosamente lógico.

Por nuestra parte, estudiamos el Análisis Espectral en el primer capítulo. Comenzamos con unas Consideraciones Generales, nos extendemos en describir los Aspectos Estadísticos del Análisis Espectral de una sola serie cronológica para referirnos al *Auto-espectro* y de

pares de series para referirnos al *Espectro Mutuo o Cruzado* (1) y, a continuación, mencionamos las ventajas e inconvenientes de los diversos procedimientos de análisis de series cronológicas.

En el capítulo segundo hacemos Aplicación del Análisis Espectral a la Economía. Venos, en primer lugar, los problemas que surgen en la estimación de espectros de series cronológicas económicas, y hacemos, después, referencia a la forma típica del espectro de las mismas. De todo ello deducimos que, en Economía, necesitamos utilizar el Análisis Espectral mutuo o cruzado, razón por la que también de dicho estudio nos ocupamos.

Las Conclusiones, resultado lógico de lo visto en los dos primeros capítulos, figuran en el capítulo tercero.

En el Apéndice recogemos la síntesis de la teoría matemática que se emplea en el estudio del Análisis Espectral de series cronológicas, y finalizamos el trabajo registrando la nutrida Bibliografía que nos ha documentado a lo largo del mismo.

---

(1) En general, la denominación que se ha dado al tipo de espectro que surge, cuando se consideran un par de series cronológicas, es la de "cruzado" o "transversal". Pero creemos es más apropiada la de "espectro mutuo", debida al Profesor Fernández de Trocóniz. Nosotros emplearemos "espectro mutuo" o "espectro cruzado" indistintamente.

## CAPITULO PRIMERO

## EL ANALISIS ESPECTRAL

## 1.1. CONSIDERACIONES GENERALES

Hace ya casi veinte años que Bartlett (M. S.) y Tuckey (J. W.) introdujeron los métodos de estimación espectral. A partir de entonces, no cesan de ampliarse de día en día las aplicaciones del análisis espectral. Concretamente, dentro del campo de la Economía, se están logrando grandes progresos; y de ahí nuestro interés por centrarnos en esta materia.

El análisis espectral ha encontrado algunos obstáculos, tanto para su divulgación como para su aplicación, en los distintos campos en que puede ser utilizado. En primer lugar, ha encontrado resistencia por parte de los estadísticos, debido a la gran dificultad que ofrecen al uso del término frecuencia; por otra parte, constituye otro obstáculo la gran complicación matemática que se ha utilizado en todas las investigaciones que se han publicado sobre el particular. Evidentemente, esto ha dado lugar a que se piense que el "análisis espectral" es muy difícil de comprender y de utilizar, lo que, en realidad, no es cierto, pues los problemas que surgen en el análisis espectral no son más difíciles que los que puedan surgir al estimar una función de densidad de probabilidad, haciendo uso del histograma.

En términos generales, podemos definir el *análisis espectral* como el examen de una función del tiempo,  $X(t)$ , en términos de frecuencia. El punto de partida en cualquier análisis espectral es una función del tiempo,  $X(t)$ , definida en  $0 \leq t \leq T$ . En general,  $X(t)$  presentará fluctuaciones con ciertas propiedades. Pues bien, a  $X(t)$  se la llama *serie cronológica* o *ruído aleatorio*. Por tanto, también se puede decir que el análisis espectral estadístico tiene por objeto la estimación del "espectro" de las series cronológicas observadas.

Entendemos por "*análisis*" de una serie cronológica, la estimación y reconstrucción de las propiedades del proceso generador de una

muestra dada. Se usa el análisis para descubrir o indicar posibles leyes a que las variables pueden obedecer, y permitir así hacer predicciones. Por tanto, tan pronto se haya hecho el análisis, lo que el analista debe intentar, es explicar las leyes y utilizarlas para predecir el futuro.

El análisis espectral se ha desarrollado en base a la denominada *teoría del ruido*. Se ha creído que la exposición del análisis espectral sería más correcta en términos de "caja negra" y "filtro", pero nosotros pensamos que, cuando se trata de desarrollar una teoría de la estimación del espectro, se necesita tener en cuenta la teoría de la aproximación y la teoría estadística. El problema que se presenta al estimar el espectro es un caso especial del problema. ¿Cómo aproximar mejor una función, dados únicamente sus  $M$  primeros coeficientes Fourier?

Algunos autores denominan "*solución de covarianza*" a la teoría del análisis espectral estadístico, pero más generalmente, y nosotros así lo haremos, se denomina *solución espectral*.

Hacemos estudio del análisis espectral de dos tipos. El primero surge cuando se hace referencia a una sola serie cronológica, en cuyo caso surge el *auto-espectro*; y el segundo, cuando consideramos pares de series cronológicas; en este último caso, surge el *espectro mutuo* o *cruzado*. Este último se utiliza principalmente en Economía, para estudiar las interacciones entre dos series cronológicas que surgen en iguales condiciones, o en el caso de que una serie constituya la variable independiente en una función de regresión dinámica y la otra serie la variable dependiente.

La función de autocorrelación muestral es una magnitud particularmente difícil de interpretar, ya que tienden a ser grandes las autocorrelaciones de variables próximas entre sí. En tal situación, puede suceder que el uso de la función de autocorrelación no sea el procedimiento más indicado para representar la realidad claramente. Las soluciones posibles a este problema son:

- a) Dar entrada a parámetros, o
- b) Estudiar las series cronológicas en el dominio de la frecuencia.

Con el fin de aclarar lo anteriormente dicho, consideremos una realización de  $M = 2m$  puntos muestrales y tratemos de ajustar una regresión armónica a los datos utilizando una expresión del tipo:

$$\mathbf{x}_{1t} = a_{10} + \sum_{j=1}^{m-1} (a_{1j} \cos \lambda_j t + b_{1j} \operatorname{sen} \lambda_j t) + a_{1m} \cos \pi t \quad [1.1]$$

$$= a_{10} + \sum_{j=1}^{m-1} c_{1j} \cos (\lambda_j t + \Phi_{1j}) + a_{1m} \cos \pi t \quad [1.2]$$

siendo

$$\lambda_j = \frac{2\pi j}{M}, \quad c_{1j}^2 = a_{1j}^2 + b_{1j}^2$$

$$\Phi_{1j} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( -\frac{b_{1j}}{a_{1j}} \right)$$

El parámetro  $\lambda$  se denomina *frecuencia angular* y es igual a la longitud recorrida alrededor de un círculo de radio unidad en una unidad de tiempo. Una *oscilación o fluctuación alrededor de la media de  $\{X(t)\}$* , puede describirse por su *período  $T$* , que es el tiempo necesario para una oscilación completa. La frecuencia  $\nu$  es el recíproco  $\frac{1}{T}$  del período e igual al número de oscilaciones por unidad de tiempo.

Las observaciones vienen representadas por sinusoides cuyas frecuencias son múltiplos de la frecuencia fundamental  $\frac{2\pi}{M}$ . Denominamos *frecuencia fundamental* a la frecuencia que corresponde a la onda sinusoidal más pequeña que puede ser ajustada a los datos y que recubre un ciclo completo sobre la duración de la realización. Si, como en general se hace, tomamos el intervalo muestral igual a la unidad, la onda más pequeña tiene período  $M$  y frecuencia  $\frac{2\pi}{M}$  radianes por unidad de tiempo. De forma análoga, la onda más amplia corresponde a un período de dos unidades y, por tanto, a la frecuencia  $\frac{2\pi}{2} = \pi$  radianes por unidad de tiempo, ó  $\frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$  ciclos por unidad de tiempo.

Si seguimos el primero de los dos procedimientos indicados anteriormente, la solución del sistema de  $M$  ecuaciones con  $M$  incógnitas nos da:



$$a_{10} = \bar{x}_{10} = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M x_{1t} \quad [1.3_1]$$

$$a_{1m} = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M (-1)^{t-1} x_{1t} \quad [1.3_2]$$

$$a_{1j} = \frac{2}{M} \sum_{t=1}^M x_{1t} \cos \lambda_j t \quad [1.4_1]$$

$$b_{1j} = \frac{2}{M} \sum_{t=1}^M x_{1t} \operatorname{sen} \lambda_j t \quad [1.4_2]$$

La suma de cuadrados de las desviaciones respecto a la media puede ser descompuesta en la forma

$$\sum_{t=1}^M (x_{1t} - \bar{x}_1)^2 = \frac{M}{2} \sum_{j=1}^{m-1} c_{1j}^2 + M a_{1m}^2 \quad [1.5]$$

Suponiendo que no forma parte ningún término armónico y que los  $x_{1t}$  son independientes y normalmente distribuidos, se deduce que  $\frac{M}{2} c_{1j}^2$  se distribuye según una  $\chi^2$  con 2 g. l. (grados de libertad).

La contribución a la varianza muestral del  $j$ -ésimo armónico, viene dada por el término correspondiente  $\frac{1}{2} c_{1j}^2$ . Operando, podemos obtener la expresión:

$$\frac{1}{2} c_{1j}^2 = \frac{2}{M} \sum_{\tau=-m+1}^{m-1} d_{11}(\tau) \cos \lambda_j \cdot \tau \quad [1.6]$$

donde

$$d_{11}(\tau) = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^{M-\tau} x_{1t} x_{1t+\tau} \quad [1.7]$$

es el estimador muestral de la autocovarianza de desplazamientos  $\tau$  incorrelados.

La expresión [1.6] establece la relación existente entre el dominio frecuencia y tiempo, y nos indica que la varianza o potencia en la  $j$ -ésima frecuencia puede escribirse como transformada coseno finita de la función de autocovarianza.

Se denomina *espectro de líneas Fourier* a la representación respecto a  $j$ , de  $\frac{1}{2} c_{ij}^2$ , y es un método de análisis interesante siempre que el fenómeno que estudiemos sea periódico. Podría representarse  $\frac{1}{2} c_{ij}^2$  respecto a  $\lambda_j$ , donde las frecuencias  $\lambda_j$  fueran independientes y no fueran armónicos de cierta frecuencia fundamental; en este caso, el espectro de  $x_{it}$  se llama *espectro de líneas*.

Debido a que muchos fenómenos físicos se interpretan mejor como espectros en el campo continuo, en los que la potencia está distribuida sobre un intervalo continuo de frecuencias, vamos a suponer que la potencia  $\frac{1}{2} c_{ij}^2$  se distribuye de forma uniforme sobre una banda de anchura  $\pm \frac{\pi}{M}$  alrededor de  $\lambda_j$ . La altura sobre la banda vendrá dada por:

$$H_{11}(j\lambda_j) = M c_{ij}^2 / 4\pi = \frac{1}{\pi} \sum_{\tau=-m+1}^{m-1} d_{11}(\tau) \cos \lambda_j \tau \quad [1.8]$$

donde a  $H_{11}(j\lambda_j)$  se le debiera llamar *frecuenciograma*, pero más generalmente se le conoce con el nombre de *periodograma*. El periodograma, como luego veremos, es la densidad espectral donde las autocorrelaciones están reemplazadas por las covarianzas muestrales. Por tanto, el espectro de líneas se reemplaza mediante el *histograma* en el dominio de frecuencia. Si los  $x_{it}$  son observaciones de una serie cronológica estacionaria, al aumentar indefinidamente el número  $M$  de observaciones, el histograma tiende a una curva continua que viene dada por:

$$\sigma^2 f_{11}(\lambda) = \frac{1}{\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} R_{11}(\tau) \cos \lambda \tau \quad [1.9]$$

donde la función  $R_{11}(\tau)$  es la *función de autocovarianza*.

Si hacemos

$$\frac{R_{11}(\tau)}{\sigma^2} = \rho_{11}(\tau),$$

la expresión [1.9] se convierte en

$$f_{11}(\lambda) = \frac{1}{\pi} \left[ 1 + 2 \sum_{\tau=1}^{\infty} \rho_{11}(\tau) \cos \lambda \tau \right] \quad [1.10]$$

donde  $f_{11}(\lambda)$  recibe el nombre de *función de densidad espectral* de la serie cronológica correspondiente.

En base a esto, la varianza o potencia se descompone de forma continua

$$\sigma^2 = \int_0^{\pi} \sigma^2 f_{11}(\lambda) d\lambda \quad [1.11]$$

y, por tanto,  $\sigma^2 f(\lambda) d\lambda$  puede ser considerada como la parte de la varianza que se encuentra entre las frecuencias

$$\left[ \lambda - \frac{1}{2} d\lambda \quad \text{''} \quad \lambda + \frac{1}{2} d\lambda \right]$$

A continuación, incluimos unas representaciones de una serie cronológica y de sus funciones de autocorrelación y de densidad espectral (figs. 1.1 a 1.3).

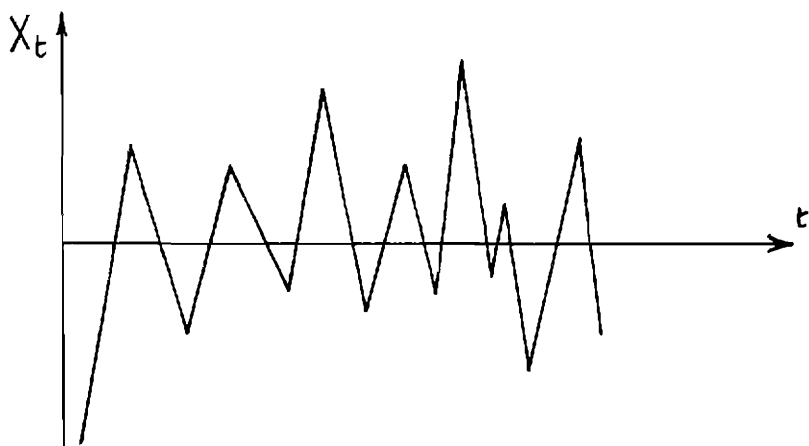


Fig. 1.1.—Serie artificial.

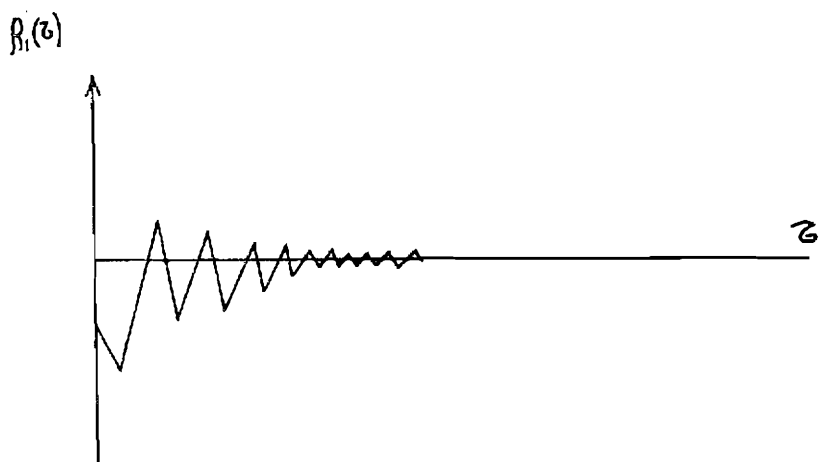


Fig. 1.2.—Funciones de autocorrelación.

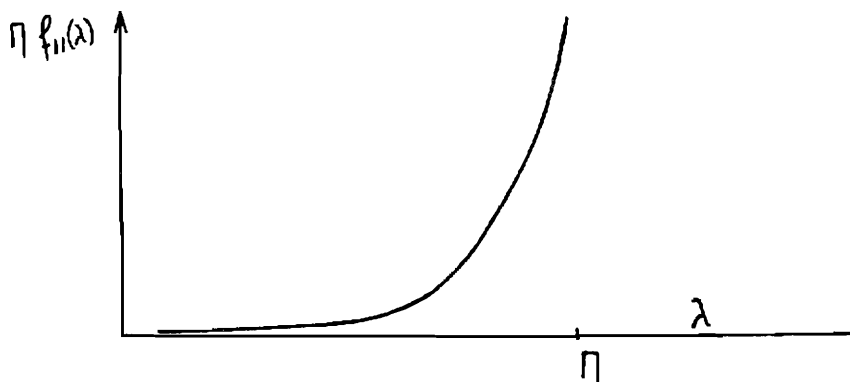


Fig. 1.3.—Funciones de densidad espectral.

Cuando se trate de series completamente oscilantes, el espectro tiene la mayor parte de su varianza concentrada en frecuencias altas, como sucede en el caso que hemos representado. Por el contrario, si las autocorrelaciones fueran grandes y positivas, la serie correspondiente sería bastante suavizada; este tipo de series se caracteriza por un espectro en el que la mayor parte de la potencia o varianza se centra en las frecuencias bajas.

Por ejemplo, para describir el comportamiento de la longitud de una cola por medio de su función de autocorrelación, Morse subrayó la importancia de la estructura de dependencia en el dominio tiempo de un proceso estocástico y describió las desviaciones para el caso de llegadas Poisson, tiempo de servicio distribuido exponencialmente y disciplina en cola "primer llegado, primer servido". Sin embargo, con el fin de conocer lo mejor posible el proceso, es conveniente conocer cuánto tiempo duran las desviaciones y el valor numérico de sus magnitudes relativas. La *función de autocorrelación* y la de *densidad espectral* son las funciones que nos pueden suministrar tal información. La función de autocovarianza  $R_{11}(\tau)$  de un proceso estacionario covariante puede ser expresada en términos de una transformada de Fourier de una función real  $F(\lambda)$  de la forma

$$\begin{aligned} R_{11}(\tau) &= E[X(t) X(t + \tau)] \\ &= \sigma^2 \rho_{11}(\tau) \\ &= \sigma^2 \int_0^{\infty} \cos \lambda \tau \, dF(\lambda) \end{aligned} \quad [1.12]$$

donde la función  $F(\lambda)$  del parámetro  $\lambda$  recibe el nombre de *función de distribución espectral*. En el caso de que  $F(\lambda)$  sea diferenciable, existe una transformación inversa tal que

$$\sigma^2 f_{11}(\lambda) = \frac{2\sigma^2}{\pi} \int_0^{\infty} \rho_{11}(\tau) \cos \lambda \tau \, d\tau, \quad [1.13]$$

donde la *función de densidad espectral*  $f_{11}(\lambda)$ , es la derivada de  $F(\lambda)$ . Las dos expresiones anteriores [1.12] y [1.13] constituyen las relaciones de Wiener-Khintchine.

En el análisis de los procesos estacionarios covariantes, juega un papel muy importante la función de densidad  $f_{11}(\lambda)$  por la información que nos proporciona respecto a la composición de la varianza  $\sigma^2$ , pues

$$\sigma^2 = \sigma^2 \int_0^{\infty} f_{11}(\lambda) d\lambda$$

y, según se ha visto, se puede pensar que  $f_{11}(\lambda)d\lambda$  es la contribución a la varianza  $\sigma^2$  de una pequeña banda de frecuencia angular igual a  $d\lambda$ . Según la relación anterior, podemos pensar que  $\{X(t)\}$  está integrado por un conjunto no numeral de componentes de frecuencia independientes, cuya suma de variaciones cuadráticas medias constituye su varianza.

De forma análoga

$$F(\lambda_0) = \int_0^{\lambda_0} f_{11}(\lambda) d\lambda \quad [1.14]$$

nos da la contribución relativa de las frecuencias angulares en el intervalo  $[0, \lambda_0]$  a la varianza de  $\{X(t)\}$ . La expresión  $[1 - F(\lambda_0)]$  nos indica la contribución relativa a la varianza de las frecuencias angulares mayores que  $\lambda_0$ .

Si

$$T_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0},$$

se puede decir de la cantidad  $[1 - F(\lambda_0)]$  que es la importancia relativa de las oscilaciones o fluctuaciones con período  $T_0$  ó menor. En otras palabras, podemos hablar de la cantidad  $[1 - F(\lambda_0)]$  considerando como la medida de la actividad que se lleva a cabo en el proceso en un intervalo de tiempo  $T_0$ , comparada con la actividad total que tiene lugar en el proceso.

Observemos que el decrecimiento lento de  $\rho_{11}(\tau)$  cuando  $\tau$  crece, indica que el proceso está muy autocorrelado. Si  $\rho_{11}(\tau)$  disminuye lentamente, la densidad espectral tiene que decrecer rápidamente para  $\lambda$  creciente, ya que la integral que forma parte de

$$\sigma^2 \rho_{11}(\tau) = \sigma^2 \int_0^{\infty} \cos \lambda \tau f_{11}(\lambda) d\lambda \quad [1.15]$$

es una integral impropia. Esto nos indica que un proceso altamente autocorrelado consta, en primer lugar, de frecuencias bajas.

La forma de las curvas de autocorrelación y de densidad espectral nos indica la naturaleza de la autocorrelación, pero también nos parece interesante describir la dependencia por medio de un simple número. Para esto, consideramos un proceso hipotético completamente autocorrelado en el intervalo  $[0, \tau^*]$  medido en unidades de tiempo, y totalmente incorrelado fuera de ese intervalo. Es decir, se verifica

$$\rho_{11}(\tau) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \tau \leq \tau^* \\ 0 & \tau^* \leq \tau \leq \infty \end{cases} \quad [1.16]$$

La función de densidad espectral será

$$\begin{aligned} f_{11}(\lambda) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\tau^*} 1 \cdot \cos \lambda \tau \, d\tau + \frac{2}{\pi} \int_{\tau^*}^{\infty} 0 \cdot \cos \lambda \tau \, d\tau \\ &= \frac{2 \operatorname{sen} \lambda \tau^*}{\pi \lambda} \end{aligned} \quad [1.17]$$

De donde, para  $\lambda = 0$ , se obtiene

$$\tau^* = \frac{\pi f_{11}(0)}{2} \quad [1.18]$$

Evidentemente este caso considerado no se da en la práctica, pues no es físicamente realizable. No obstante, el tiempo de correlación  $\tau^*$  nos da alguna idea de la autocorrelación.

A continuación, consideraremos unos ejemplos que nos ayudarán a aclarar las relaciones entre  $\rho_{11}(\tau)$ ,  $f_{11}(\lambda)$  y  $\tau^*$ .

Sea el proceso  $\{X(t)\}$  normal, con media cero, varianza  $\sigma^2$ , y función de autocorrelación (representada en la fig. 1.4):

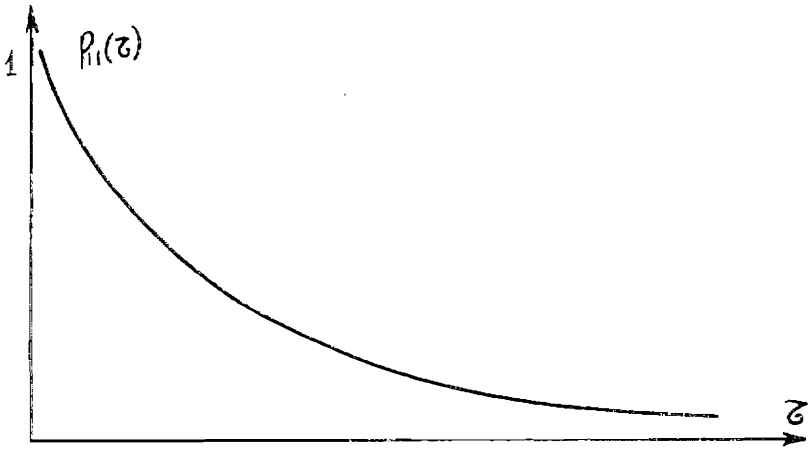


Fig. 1.4.—Representación de la función de autocorrelación  $\rho_{11}(\tau) = e^{-\tau}$

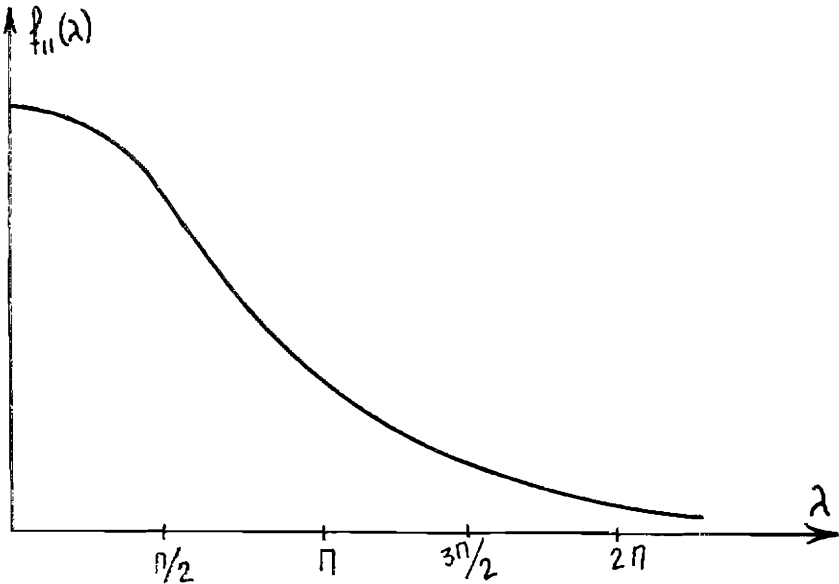


Fig. 1.5.—Representación de la función de densidad espectral

$$f_{11}(\lambda) = \frac{2}{\pi(1 + \lambda^2)}$$



$$\rho_{11}(\tau) = e^{-\tau} \quad , \quad 0 \leq \tau \leq \infty \quad [1.19]$$

La función de densidad espectral correspondiente será

$$\begin{aligned} \hat{f}_{11}(\lambda) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \rho_{11}(\tau) \cos \lambda \tau \, d\tau \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\tau} \cos \lambda \tau \, d\tau \\ &= \frac{2}{\pi(1 + \lambda^2)} \quad , \quad 0 \leq \lambda \leq \infty \quad [1.20] \end{aligned}$$

(véase la fig. 1.5).

El tiempo de correlación  $\tau^*$  sería en este caso

$$\begin{aligned} \tau^* &= \frac{\pi \hat{f}_{11}(0)}{2} \\ &= \frac{\pi \cdot 2/\pi}{2} \\ &= 1 \end{aligned} \quad [1.21]$$

Observemos que, para un determinado valor de  $\tau$ , se verifica

$$\rho_{11}(\tau) \leq \tau^* = 1 \quad [1.22]$$

y que

$$\rho_{11}(\tau^*) = \frac{1}{e} \simeq 0,368$$

Luego  $\tau^*$  es el tiempo medio que ha de transcurrir para que la desviación media cuadrática del proceso consigo mismo presente una desviación de, aproximadamente, el 36,8 por 100.

La expresión de la función de densidad espectral [1.20] nos permite ver que, para frecuencias angulares  $\lambda$  bastante más pequeñas que 1, la función de densidad espectral es relativamente plana.

El tiempo de correlación  $\tau^*$  nos sirve para caracterizar la autocorrelación por un simple número. Los distintos procesos pueden tener funciones de autocorrelación y funciones de densidad espectral diferentes, y, por tanto, cada uno de sus tiempos de correlación no parecerían significar exactamente la misma clase de dependencia en el

tiempo. Sin embargo, esto no siempre es verdad, como veremos más adelante.

Consideremos el proceso  $\{X(t)\}$  de media  $\mu$ , varianza  $\sigma^2$  y tiempo de observación  $[0, T]$ . Utilicemos como estimador de la media

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad [1.23]$$

La varianza de la media muestral será

$$\begin{aligned} \text{Var}(\bar{x}) &= E[x - \mu]^2 \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \left\{ E[x(t)x(s)] - \mu^2 \right\} dt ds \\ &= \frac{\sigma^2}{T^2} \int_0^T \int_0^T \rho_{11}(t-s) dt ds \\ &= \frac{\sigma^2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \rho_{11}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad [1.24]$$

Por otra parte, puesto que

$$f_{11}(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \rho_{11}(\tau) \cos \lambda \tau d\tau$$

y, para  $\lambda = 0$ ,

$$f_{11}(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \rho_{11}(\tau) d\tau, \quad [1.25]$$

tendremos

$$\begin{aligned} &\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \rho_{11}(\tau) d\tau = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \rho_{11}(\tau) d\tau - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \tau \rho_{11}(\tau) d\tau = \pi f_{11}(0) \end{aligned} \quad [1.26]$$

de modo que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T \text{Var}(\bar{x}) = \pi \sigma^2 f_{11}(0) \quad [1.27]$$

Denotando la varianza asintótica de  $\bar{x}$  por  $s$  y teniendo en cuenta que

$$\tau^* = \frac{\pi \hat{i}(0)}{2} \quad [1.28]$$

resultará

$$s = 2 \sigma^2 \frac{\tau^*}{T} \quad [1.29]$$

Si recogemos  $n$  observaciones independientes de una variable aleatoria, con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ , entonces la varianza de la media muestral sería

$$V = \frac{\sigma^2}{n} \quad [1.30]$$

Es decir, si observamos un proceso con un tiempo de correlación  $\tau^*$  para  $T$  unidades de tiempo, sabemos que

$$n = \frac{T}{2 \tau^*} \quad [1.31]$$

observaciones independientes nos darán la estimación de la media.

Esto nos indica que es lo mismo realizar una observación del proceso durante  $2 \tau^*$  unidades de tiempo que realizar un muestreo aleatorio simple de tamaño  $n$ . Por esta razón, y teniendo en cuenta la obtención de estas realizaciones, el  $\tau^*$ , para todos los procesos, es la mitad del tiempo que ha de transcurrir para que, realizando una observación sobre el proceso, esta observación sea equivalente a una observación muestral de tamaño  $n$ .

El análisis de la correlación y la descomposición espectral son dos caminos equivalentes para estudiar los procesos estocásticos estacionarios covariantes, ya que por la relación [1.15] el conocimiento de una de las dos funciones implica el de la otra.

El problema que se plantea es cuál de las dos funciones deberemos utilizar. A esto contestamos que, en cada caso, la utilización de una u otra depende de qué propiedades del proceso  $\{X(t)\}$  queramos ana-

lizar por su importancia para nosotros y de cómo serán mejor descritas estas propiedades.

La función de autocorrelación se fija en la dependencia a lo largo del eje de tiempos; y la función de densidad espectral, al utilizar las oscilaciones para las distintas frecuencias, describe los procesos en términos de la importancia relativa de las diferentes clases de oscilaciones que constituyen las series cronológicas.

Nosotros creemos que, para caracterizar un proceso en términos de contribuciones aditivas independientes, es mejor utilizar el análisis espectral (ya que permite hacer el análisis más fácilmente) que el análisis de la correlación, donde cada valor de la función de autocorrelación es la suma ponderada de las mismas contribuciones.

Después utilizaremos los dos procedimientos de análisis en algún ejemplo para, en cada caso, sacar consecuencias de su mayor o menor eficacia.

También emplearemos el denominado “ruido blanco”, proceso que surge cuando  $\{X(t)\}$  es independiente de su pasado, es decir,

$$\rho(\tau) = \begin{cases} 1 & \tau = 0 \\ 0 & \tau \neq 0 \end{cases} \quad -\infty \leq \tau \leq \infty \quad [1.32]$$

La función de densidad espectral para este proceso será:

$$f_{11}(\lambda) = \frac{1}{\pi} \quad , \quad 0 \leq \lambda \leq \infty \quad [1.33]$$

y la función de distribución  $F(\lambda)$  no está acotada. Vemos que, en el caso particular de ser todas las autocorrelaciones iguales a cero, la densidad espectral es constante o uniforme e igual a  $\frac{1}{\pi}$ . Esto co-

rresponde a una serie completamente aleatoria y puede ser considerada como un *espectro base*, del que todos los espectros pueden ser deducidos, elevando las contribuciones en ciertas frecuencias a costa de reducirlas en otras. La denominación del espectro “ruido blanco” se debió a su parecido con el espectro de luz blanca. El proceso “ruido blanco” es muy útil en general, pero es de particular interés cuando se desea estudiar los efectos de los procesos puramente aleatorios sobre cierto proceso autocorrelado determinado.

## 1.2. ASPECTOS ESTADÍSTICOS DEL ANÁLISIS ESPECTRAL

### 1.2.1. *Estimación del espectro*

Mediante la simulación, podemos observar el proceso  $\{X(t)\}$  de forma continua y sin error. Sin embargo, la estimación de la función de autocovarianza continua de una realización continua de longitud finita  $T$  se hace impracticable debido al tiempo de cálculo empleado. Por tal causa, lo que haremos en la práctica será considerar la sucesión estocástica estacionaria covariante  $\{X_t\}$  correspondiente al proceso  $\{X(t)\}$  para tiempos

$$\Delta t, 2 \Delta t, \dots, n \Delta t$$

donde

$$T = n \Delta t \quad [1.34]$$

Sean  $\mu$  y  $R_\tau$  la media y la función de autocovarianza respectivamente de la sucesión. La amplitud de cada uno de los subintervalos en que se observa el proceso es igual a  $\Delta t$ .

La elección del intervalo muestral tiene gran influencia sobre la cantidad y calidad de información que el investigador puede deducir de una realización muestral de longitud fija. Como las fluctuaciones estocásticas en los procesos estocásticos tienen lugar generalmente alrededor de la media, lo que conviene es estudiar su duración, ya que las contribuciones de las oscilaciones a los procesos permiten al investigador determinar si una serie temporal se comporta o no aceptablemente. Por ejemplo, en un problema de colas, una serie temporal puede contener fluctuaciones de frecuencia elevadas de período regular o irregular: esto nos podía conducir a rechazar la regla de asignación de servicio que las origina tan pronto nos diéramos cuenta de ello.

Las consideraciones sobre el diseño, basadas en cierto conocimiento a priori respecto a los procesos estocásticos, juegan un papel importante en la determinación de un intervalo muestral adecuado. Efectivamente, esto se puede llevar a cabo, porque el investigador tiene generalmente cierta idea sobre qué clase de fluctuaciones merece estudiarse.

En la estimación del espectro de un proceso estocástico continuo, surge un problema cuando la realización muestral consta de observaciones uniformemente espaciadas. Si una serie cronológica es recogida a intervalos de  $\Delta t$ , entonces la frecuencia  $\pi/\Delta t$  es de la que, aproximadamente, podemos obtener mayor información. A esta frecuencia se la denomina *frecuencia Nyquist*. Al leer una serie cronológica a intervalos  $\Delta t$  se pierde la información directa para frecuencias superiores a la Nyquist, la que, por ser  $2\pi$  radianes = 1 ciclo, puede denotarse por  $\frac{1}{2} \Delta t$  ciclos por unidad de tiempo. Puesto que necesitamos al menos dos puntos para ajustar una frecuencia a la onda sinusoidal más rápida que pasa por los puntos de los datos, será como se muestra en la figura (1.6), es decir,  $\pi/\Delta t$  radianes por unidad de tiempo. Superpuesta sobre la frecuencia Nyquist se ha dibujado una onda sinusoidal con dos veces su frecuencia, en cuanto le corresponde a los puntos de los datos. Sin embargo, estas dos no se distinguen en dichos puntos.

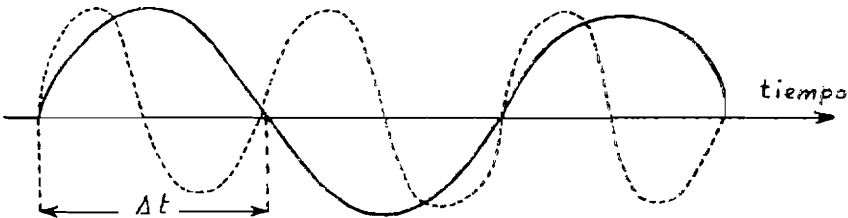


Fig. 1.6.—Aliasamiento.

Puesto que ninguna información de  $X(t)$  se logra entre los puntos de los datos, no tenemos medios para estimar directamente la amplitud de las frecuencias superiores a la Nyquist. Por tanto, puesto que  $2\lambda_N$  no se distingue de la frecuencia Nyquist  $\lambda_N$  en lo que corresponde a los datos, lo que realmente se puede medir respecto a la frecuencia  $\lambda_N$  no es  $f_{11}(\lambda_N)$ , sino la última confundida con todas las frecuencias que no son distinguibles de  $\lambda_N$ . En términos generales, si  $f_{11}(\lambda)$  es la función de densidad espectral correspondiente a  $X(t)$ , entonces la densidad espectral  $f_{11}^*(\lambda)$  de la realización muestral viene dada por

$$f_{11}^*(\lambda) = \sum_{\tau=0}^{\infty} \left\{ f_{11}\left(-\frac{2\pi\tau}{\Delta t} + \lambda\right) + f_{11}\left(\frac{2\pi\tau}{\Delta t} - \lambda\right) \right\} \quad [1.35]$$

Lo que nos dice que el espectro muestral se obtiene doblando el espectro no muestral en los múltiplos pares  $\frac{2\pi\tau}{\Delta t}$  de la frecuencia

Nyquist  $\frac{\pi}{\Delta t}$  y sumando estas contribuciones en el intervalo  $(0, \lambda_N)$ .

Esto es lo que se llama *aliasamiento*.

El significado práctico del aliasamiento es que los picos en el espectro de potencia para frecuencias menores que  $\frac{1}{2}$  ciclos por unidad de tiempo pueden ser debidos a causas que operan muy por encima del intervalo de la frecuencia observable. El único criterio que se puede emplear para decidir si el aliasamiento es problema, es si los picos observados tienen explicación admisible; si no, se debe buscar una explicación en las frecuencias altas. Ahora bien, puesto que todos los picos considerados tienen la interpretación simple de la estacionariedad, el aliasamiento no parece ser gran problema.

En todo problema práctico, debemos considerar tres frecuencias:

1) La frecuencia  $\lambda_1$  para la cual la función respuesta de frecuencia de la realización cae alrededor del 1 al 2 por 100 de su valor mínimo.

2) La frecuencia  $\lambda_2$  para la cual la potencia total en  $X(t)$  fuera de  $\lambda_2$  es del orden del 1 % al 2 %, y

3) La mayor frecuencia disponible  $\lambda_3$ , de interés para nuestro estudio.

Lo ideal sería elegir  $\Delta t$  de forma que  $\lambda_3 = \frac{\pi}{\Delta t}$ , es decir, fuera la frecuencia Nyquist y, por tanto, no se leería entre ellas (la Nyquist y la  $\lambda_3$ ) ninguna frecuencia de interés. Sin embargo, si  $\lambda_2 > \lambda_3$  y  $f_{11}(\lambda)$  es grande cuando  $\lambda > \lambda_3$ , entonces habrá dificultades que se superarían por medio del aliasamiento. Si  $\lambda_2$  es conocida con cierta exactitud, el aliasamiento podría evitarse.

Por otra parte, si  $\lambda_2$  es mucho mayor que  $\lambda_3$ , esto significaría que el muestreo a intervalos más cortos es realmente necesario. En este caso, sería necesario filtrar la serie cronológica y asegurarse que la traza registrada tiene muy poca potencia sobre  $\lambda_3$ .

Un artificio que resulta útil algunas veces, si  $\lambda_2$  es conocida casi con exactitud, es elegir  $\Delta t$  de forma que  $\frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_3) = \frac{\pi}{\Delta t}$ . Así evitamos el uso del prefiltro y el aliasamiento, puesto que, si

$\lambda_2 > \lambda_3$ , todas las frecuencias entre  $\frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_3)$  y  $\lambda_2$  aparecerán en el espectro aliasado entre  $\lambda_3$  y  $\frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_3)$ , dejando las frecuencias de interés entre 0 y  $\lambda_3$  sin tocar.

Para llevar a cabo la estimación del espectro vamos a suponer que elegimos  $\Delta t$  como intervalo muestral apropiado y, sin pérdida de generalidad, lo igualamos a la unidad. Entonces, el número de observaciones es igual a la longitud muestral de realización muestral  $T$ . A continuación, investigaremos los efectos de las longitudes de las realizaciones finitas del espectro. Para ello, si

$$g(\lambda) \equiv \sigma^2 f(\lambda) \quad [1.36]$$

es el espectro de frecuencia angular  $\lambda$ , y tenemos una sucesión estocástica  $\{X_t\}$  que se presenta a intervalos unitarios, entonces resulta

$$g(\lambda) = \frac{1}{\pi} \left[ 2 \sum_{\tau=1}^{\infty} R_{\tau} \cos \lambda \tau + R_0 \right] \quad , \quad 0 \leq \lambda \leq \pi \quad [1.37]$$

viniendo dados los coeficientes de Fourier por las expresiones

$$R_{\tau} = \int_0^{\pi} g(\lambda) \cos \lambda \tau \, d\lambda \quad , \quad \tau = 0, 1, \dots \quad [1.38]$$

Consideremos ahora la aplicación de una función de ponderación  $k_M(\tau)$ , llamada núcleo, a la función de autocovarianza tal que

$$g^*(\lambda) = \frac{1}{\pi} \left[ 2 \sum_{\tau=1}^{\infty} K_M(\tau) R_{\tau} \cos \lambda \tau + R_0 \right] \quad [1.39]$$

Teniendo en cuenta la expresión de  $R_{\tau}$ , la función anterior la podemos expresar de la forma siguiente



$$\begin{aligned}
 g^*(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \left\{ 2 \sum_{\tau=1}^{\infty} K_M(\tau) \left[ \int_0^{\pi} g(\omega) \cos \omega \tau \, d\omega \right] \cos \lambda \tau + \right. \\
 &\qquad \qquad \qquad \left. + \int_0^{\pi} g(\omega) \, d\omega \right\} \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} g(\omega) \left[ 2 \sum_{\tau=1}^{\infty} K_M(\tau) \cos \omega \tau \cos \lambda \tau + 1 \right] d\omega \quad [1.40] \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} g(\omega) \left[ \sum_{\tau=1}^{\infty} K_M(\tau) \cos (\omega + \lambda) \tau + \right. \\
 &\qquad \qquad \qquad \left. + \sum_{\tau=1}^{\infty} K_M(\tau) \cos (\omega - \lambda) \tau + 1 \right] d\omega.
 \end{aligned}$$

Haciendo

$$\mu_M(\omega) = \frac{1}{\pi} \left[ 2 \sum_{\tau=1}^{\infty} K_M(\tau) \cos \omega \tau + 1 \right] \quad [1.41]$$

$$K_M(\omega, \lambda) = \frac{\mu_M(\lambda + \omega) + \mu_M(\omega - \lambda)}{2} \quad [1.42]$$

resulta

$$g^*(\lambda) = \int_0^{\pi} g(\omega) K_M(\omega, \lambda) \, d\omega \quad [1.43]$$

La función espectral  $g^*(\lambda)$  es una media ponderada del verdadero espectro donde el núcleo de ponderación  $K_M(\omega, \lambda)$  viene dado por la expresión [1.42]. También vemos que la función  $\mu_M(\omega)$  es la transformada de Fourier coseno de la función de ponderación  $K_M(\tau)$ .

Como la realización muestral es de longitud finita  $T$ , podemos estimar, a lo más  $T - 1$  autocovarianzas. Supongamos que realmente conocemos las  $M$  primeras autocovarianzas. Entonces lo natural sería reemplazar el límite superior del operador suma en la expresión [1.37]

por  $M$ . Esto lleva consigo el elegir una función de ponderación del tipo

$$K_M(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau = 1, 2, \dots, M \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad [1.44]$$

Por tanto, podemos calcular una media espectral

$$g^*(\lambda) = \frac{1}{\pi} \left[ 2 \sum_{\tau=1}^M R_\tau \cos \lambda \tau + R_0 \right] \quad [1.45]$$

El correspondiente núcleo promedial para la expresión [1.44] es

$$K_M(\omega, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\text{sen} \left[ \left( M + \frac{1}{2} \right) (\omega + \lambda) \right]}{\text{sen} [(\omega + \lambda)/2]} + \frac{\text{sen} \left[ \left( M + \frac{1}{2} \right) (\omega - \lambda) \right]}{\text{sen} [(\omega - \lambda)/2]} \right\} \quad [1.46]$$

Una vez obtenido  $K_M(\omega, \lambda)$ , podemos calcular la  $g^*(\lambda)$ . Pero debemos tener en cuenta que, si  $g(\lambda)$  cambia rápidamente con  $\lambda$ , debido a cambios en  $K_M(\omega, \lambda)$ , entonces  $g^*(\lambda)$  no es muy representativa de  $g(\lambda)$ . En tal caso, se nos presenta el problema de cómo elegir la función de ponderación  $K_M(\tau)$  de modo que el correspondiente núcleo promedial  $K_M(\omega, \lambda)$ , concentre su ponderación lo más estrechamente posible alrededor de  $\lambda$  y de forma que  $g^*(\lambda)$  represente lo mejor posible a  $g(\lambda)$ . Muchos investigadores se han dedicado a resolver el problema de elección de una función de ponderación, pero aún no se ha resuelto completamente tal problema.

Otra cuestión que se plantea al emplear una función de ponderación unitaria en las  $M$  primeras autocovarianzas es que la varianza de tal estimador espectral es independiente del tamaño muestral y el estimador necesita ser consistente para que los resultados sean significativos.

### 1.2.2. Estimadores Espectrales Generales

Utilizaremos como estimador de la función de autocovarianza

$$\hat{R} = \frac{1}{T-\tau} \sum_{t=1}^{T-\tau} (x_t - \bar{x})(x_{t+\tau} - \bar{x}) \quad [1.47]$$

donde

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_t \quad [1.48]$$

Nuestros promedios espectrales estimados son

$$\hat{g}^*(\lambda) = \frac{1}{\pi} \left[ 2 \sum_{\tau=1}^M K_M(\tau) \hat{R}_\tau \cos \lambda \tau + \hat{R}_0 \right] \quad [1.49]$$

La potencia de resolución <sup>(1)</sup> de un núcleo de ponderación particular mejora tanto más cuantas más autocovarianzas se usen en el procedimiento de estimación. Desgraciadamente, la estabilidad (varianza) de los estimadores decrece (crece) cuantas más autocovarianzas son usadas. Es decir, con objeto de mejorar el análisis, se reduce la estabilidad para una realización muestral de longitud fija. Es, pues, necesaria una compenetración entre el análisis y la estabilidad.

Utilizando la función sugerida por Bartlett

---

(1) Por *resolución* entendemos la cantidad de distorsión del espectro, lo que no es evidentemente lo mismo que *anchura de banda*, aunque esté relacionado con ella en cierta forma. La noción de anchura de banda de una ventana espectral juega un papel importante en el análisis espectral. La anchura de banda  $\beta(A)$  de una ventana espectral se define como la longitud de la base de un rectángulo que tiene el mismo área y la misma altura máxima que la gráfica de la ventana espectral  $A(\lambda)$ ; en símbolos

$$\beta(A) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) d\lambda}{\max_{\lambda} [A(\lambda)]}$$

La frecuencia  $\lambda_0$ , tal que  $A(\lambda_0) = \max_{\lambda} |A(\lambda)|$  se denomina *frecuencia del pico* de la ventana espectral  $A(\lambda)$ .

$$K_M(\tau) = 1 - \frac{\tau}{M} \quad , \quad \tau = 1, 2, \dots, M - 1 \quad [1.50]$$

el núcleo de ponderación correspondiente será

$$K_M(\omega, \lambda) = \frac{1}{2 \pi M} \left\{ \frac{\text{sen}^2 [M(\omega + \lambda)/2]}{\text{sen}^2 [(\omega + \lambda)/2]} + \right. \\ \left. + \frac{\text{sen}^2 [M(\omega - \lambda)/2]}{\text{sen}^2 [(\omega - \lambda)/2]} \right\} \quad [1.51]$$

Esta función de ponderación es aconsejable utilizarla en lo que respecta al análisis y estabilidad para los propósitos corrientes, porque logra mejores resultados que las funciones de ponderación de Tuckey y Parzen y, además, nos permite estimar la varianza de la media muestral con gran facilidad, pues basta tener en cuenta la expresión ya obtenida,

$$\begin{aligned} \text{Var}(\bar{x}) &= E[\bar{x} - \mu]^2 = E[\bar{x}]^2 - \mu^2 \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \left\{ E[x(t) x(s)] - \mu^2 \right\} dt ds \\ &= \frac{\sigma^2}{T^2} \int_0^T \int_0^T \rho(t - s) dt ds \\ &= \frac{\sigma^2}{T} \int_0^T \left( 1 - \frac{\tau}{T} \right) \rho(\tau) d\tau \end{aligned}$$

La elección del número de desplazamientos  $M$ , por estar íntimamente relacionada con la longitud de la realización muestral y la trayectoria de tiempo real del proceso, nos proporciona la compenetración entre el análisis y la estabilidad.

La potencia de concentración de un núcleo de ponderación particular viene medida por su *anchura de banda*, la que, como ya se ha indicado en nota a pie de página es la longitud de la base de un rectángulo que tiene por área la misma del núcleo y por altura la máxima de

dicho núcleo. La anchura de banda nos mide el grado de concentración del núcleo de ponderación de la frecuencia para la que un estimador espectral está siendo deducido. Para la ventana de Bartlett, la anchura de banda en la amplitud de banda media es

$$\beta(\lambda) = \frac{2\pi}{M} \quad [1.52]$$

y viene medida en radianes. Por *amplitud de banda media* nos referimos al intervalo de frecuencia, excluyendo los puntos extremos 0 y  $\pi$ .

Para determinar la velocidad de cambio del espectro verdadero se elige una anchura de banda adecuada para analizar el espectro. Puesto que esta información es defectuosa, el análisis se hace como sigue: estimamos el espectro para diferentes valores de  $M$  con el fin de encontrar una anchura de banda lo suficientemente estrecha para que  $\hat{g}^*(\lambda)$  sea un estimador adecuado del verdadero espectro; después, si suponemos que la serie fundamental es gaussiana, la elección de la anchura de banda determina el número aproximado de posibles estimadores equiespaciados. La ventana de Bartlett permite aproximadamente  $M/3$  estimadores independientes, lo que significa que los estimadores son aproximadamente independientes, si difieren al menos en  $\pi/M/3$  radianes ó  $3/2M$  ciclos.

La independencia es una propiedad muy interesante en la estimación espectral y contrasta con la naturaleza estadística del correlograma, donde los estimadores del correlograma están tan correlados con todos los demás que ocultan el verdadero comportamiento de las series cronológicas. Este contraste es importante, ya que se pueden deducir estimadores espectrales aproximadamente independientes que dependen de las propiedades estadísticas de las series cronológicas. Constituye este método un camino considerablemente más simple para obtener las propiedades estadísticas de los estimadores de correlogramas.

Los estimadores espectrales aproximadamente independientes pueden ser deducidos para un tamaño muestral limitado. Sin embargo, para que exista incorrelación en los estimadores del correlograma ha de operarse en términos asintóticos.

Si  $\{X(t)\}$  es Gaussiano multivariante y el espectro verdadero varía más lentamente que el núcleo de ponderación en la proximidad de  $\lambda$ , entonces,

$$\text{Var} [g^*(\lambda)] \simeq \frac{2\pi}{T} g^2(\lambda) \int_0^\pi K_M^2(\omega, \lambda) d\omega \quad [1.53]$$

y, además,

$$\frac{\hat{g}^*(\lambda)}{g(\lambda)} = \frac{\frac{1}{\pi} \left[ 2 \sum_{\tau=1}^M K_M(\tau) \hat{R}_\tau \cos \lambda \tau + \hat{R}_0 \right]}{\frac{1}{\pi} \left[ 2 \sum_{\tau=1}^{\infty} R_\tau \cos \lambda \tau + R_0 \right]} = \chi_n^2 \quad [1.54]$$

$$n = \frac{T}{\pi \int_0^\pi K_M^2(\omega, \lambda) d\omega} \quad [1.55]$$

Suponiendo que el intervalo muestral es lo suficientemente pequeño como para que no exista diferencia apreciable entre las varianzas del proceso  $\{X(t)\}$  y de la sucesión  $\{X_t\}$  podemos tomar la varianza asintótica de la media estimada de  $\{X_t\}$  que sea igual a

$$V = 2 R_0 \tau^*/T \quad [1.57]$$

$$V = \pi g(0)/T \quad [1.58]$$

Tomamos como estimador de  $V$

$$\hat{V} = \pi \hat{g}^*(0)/T \quad [1.59]$$

que se distribuye como una  $\chi_n^2$  siendo

$$n = \frac{T}{\pi \int_0^\pi K_M^2(\omega) d\omega} \simeq \frac{2T}{M} \quad [1.60]$$

Si  $\{X(t)\}$  es gaussiano, la variable aleatoria

$$\frac{x - \mu}{\sqrt{V^{1/2}}} \quad [1.61]$$

tiene una distribución gaussiana con media cero y varianza la unidad. Además, el estadístico

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\hat{V}^{1/2}} \quad [1.62]$$

se distribuye según la  $t$  — Student con, aproximadamente,  $\frac{2T}{M}$  grados de libertad, lo que es una simplificación muy interesante en la contrastación de hipótesis.

Observemos que la normalidad de  $\bar{x}$  se deduce de la suposición gaussiana de  $\{X_t\}$ . Si no hiciéramos esta hipótesis, no se podría aplicar el Teorema Central del Límite, ya que las  $\{X_t\}$ , al estar correladas, no son independientes, condición necesaria para aplicar el Teorema mencionado, y, por tanto, no se podría contar con la normalidad asintótica de  $x$ , a no ser que se impusieran otras condiciones.

La hipótesis de normalidad nos suministra una base conveniente para contrastar la hipótesis acerca de la media muestral  $x$ .

Para contrastar la diferencia de medias de dos muestras de poblaciones diferentes, Cochran y Cox sugieren un contraste que equivale en el campo del análisis espectral al siguiente:

Sean  $n_1$  y  $n_2$  el número de grados de libertad de

$$\frac{\pi \hat{g}_1^*(0)}{T_1} \quad y \quad \frac{\pi \hat{g}_2^*(0)}{T_2} \quad [1.63]$$

respectivamente, y  $t_1$ ,  $t_2$  los valores críticos de la  $t$ -Student para  $n_1$  y  $n_2$  grados de libertad respectivamente. Aproximadamente, los niveles de significación para

$$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\pi \hat{g}_1^*(0)/T_1 + \pi \hat{g}_2^*(0)/T_2}} \quad [1.64]$$

vienen dados por

$$t' = \frac{w_1 t_1 + w_2 t_2}{w_1 + w_2} \quad [1.65]$$

donde

$$w_1 = \sqrt{\pi \hat{g}_1^*(0)/T_1} \quad [1.66]$$

y

$$w_2 = \sqrt{\pi g_2^*(0)/T_2} \quad [1.67]$$

Es muy conveniente tener presente que, incluso a pesar de las suposiciones establecidas, Cochran y Cox han indicado que el estadístico resultante aproximadamente se distribuye según una t-Student. Por tanto, hay que tener mucho cuidado con la aplicación de este contraste.

Otra cuestión interesante que describiremos, es la contrastación de las diferencias entre dos espectros.

Se ha demostrado por Priestley que, tratando a  $\frac{\hat{g}^*(\lambda)}{g(\lambda)}$  como una  $\chi^2$ , tiende lentamente a la normalidad de  $\{X(t)\}$ . Por otra parte,

$$\text{Var} \left\{ \log \left[ \hat{g}^*(\lambda) \right] \right\} \simeq \psi(M, T) \quad [1.68]$$

donde

$$\psi(M, T) = \frac{2M}{3T} \quad [1.69]$$

es la amplitud de banda media para el núcleo de ponderación de Bartlett. La distribución del estadístico

$$\frac{\hat{g}^*(\lambda)}{g(\lambda)} \quad [1.70]$$

según la  $\chi^2$  tiende a la normal para un número creciente de grados de libertad. Operando con

$$\log \left[ \hat{g}^*(\lambda) \right]$$

en lugar de con

$$\hat{g}^*(\lambda)$$

como variante gaussiana, se introduce menos sensibilidad a la suposición gaussiana para  $\{X_t\}$ .



Para comparar dos espectros, consideramos estimadores independientes, bien definidos, y los comparamos en cada una de las frecuencias para las que se ha elaborado un estimador.

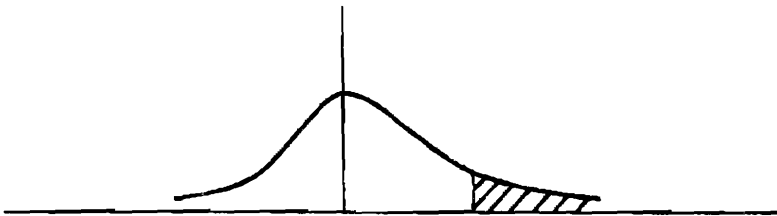
Supongamos que

$$\log \left[ \hat{g}_i^*(\lambda) \right] \simeq N \left\{ \log \left[ g_i(\lambda) \right], \psi_i(M_i, T_i) \right\}, \quad i = 1, 2, \dots \quad [1.71]$$

de modo que

$$\log \left[ \hat{g}_1^*(\lambda) / \hat{g}_2^*(\lambda) \right] \simeq N \left\{ \log \left[ g_1(\lambda) / g_2(\lambda) \right], \psi(M_1, T_1) + \psi(M_2, T_2) \right\} \quad [1.72]$$

Lo que a nosotros nos interesa es establecer si  $g_1^*(\lambda)$  es o no significativamente mayor que  $g_2^*(\lambda)$ . La suposición gaussiana nos permite efectuar un contraste de hipótesis significativo con una sola cola



La estimación espectral introduce cierta clase de sesgo debido al proceso de ponderación a través del espectro. Si el espectro real cambia rápidamente con el de ponderación, esta clase de distorsión será corriente. Para combatir esta distorsión se utiliza el procedimiento del *preblanqueo* (1), que consiste en tomar las diferencias de ponderación en lugar de nuestras observaciones originales. El espectro estimado de esta serie es considerablemente más halagüeño que el espectro del ori-

---

(1) Para nuestros fines, podemos definir un *filtro* como una serie de operaciones aritméticas utilizadas para transformar los datos antes de su análisis. El uso de tales operaciones para filtrar potencias a bajas frecuencias se llama *preblanqueo*.

ginal y, por tanto, el promedio espectral tiene lugar sobre un espectro más uniforme. Para obtener el espectro original, se divide este espectro modificado en cada frecuencia por la *función de transferencia* que corresponde al esquema de la diferencia ponderada en el dominio temporal. Esto da lugar al espectro en forma apropiada. En esencia, se hace uso del hecho de que, si tomamos diferencias en una serie, en el dominio temporal, esto se corresponde con una división de su función de frecuencia por una función de transferencia correspondiente al procedimiento de tomar diferencias. Como resultado importante de lo dicho anteriormente tenemos la reducción del sesgo en los estimadores.

Conviene tener presente que, para lograr un buen análisis, es necesario utilizar un número adecuado de desplazamientos; en cambio si tuviéramos preblanqueados los datos, se necesitarían muy pocos desplazamientos para llevar a cabo el mismo análisis.

### 1.3. ETAPAS Y ASPECTOS FUNDAMENTALES DEL ANÁLISIS ESPECTRAL

Resumiendo, diremos que el análisis espectral es una técnica estadística de muchísimo interés. Las etapas que se deben seguir en el diseño o análisis, así como los aspectos que consideramos más destacados, son

1) Es muy importante conocer la relación existente entre el espectro estimado y el que nos interesa. La mayoría de los errores graves pueden haberse introducido antes de comenzar las consideraciones estadísticas. Por tanto, la interpretación del espectro está dictada casi en su totalidad por consideraciones no estadísticas.

2) La principal característica de la estimación espectral es que puede utilizarse cierta clase de ventana con una anchura de banda considerablemente mayor que  $1/n$  donde  $n$  es el número total de observaciones.

Aún no se tiene completa seguridad respecto a lo que constituye una buena forma espectral, es decir, una forma que tenga las mejores propiedades.

3) Hacemos ahora consideraciones sobre el análisis:

a) Calcular las autocovarianzas, después de eliminar una media, y posiblemente, una tendencia lineal. Fijado  $n$ , lo que se necesita es seleccionar el número de desplazamientos.

b) Existen tres métodos de lograr esto:

1. Dibujar la función de autocovarianza superior a 25-30 por 100 del tamaño muestral total y determinar un punto de truncación razonable empíricamente.

2. Especificar una anchura de banda para la ventana espectral elegida, teniendo cuidado de que haya bastantes grados de libertad por estimar.

3. Elegir el número de desplazamientos  $M$  según un criterio de error cuadrático medio, utilizando algún conocimiento de  $f_{11}(\lambda)$  obtenido de 1) ó de un análisis espectral piloto.

c) Por consideraciones de diseño,  $n$  puede determinarse teniendo en cuenta las cuatro etapas que siguen:

1) Selección de un núcleo o ventana.

2) Selección de los grados de libertad que requiera el estimador.

3) Selección de la anchura de banda que se requiere; determinación del número de desplazamientos  $M$ .

4) Una vez determinados  $f_{11}(\lambda)$  y  $M$ , se puede determinar el tamaño de la muestra  $n$ .

Por último, para basar el espectro en algunas elecciones de  $M$ , se sugiere tener libertad para el cálculo de las ordenadas espectrales en cualquier frecuencia.

#### 1.4. ANÁLISIS ESPECTRAL MUTUO O CRUZADO

Para lograr una medida más cuantitativa de la pérdida de frecuencia para frecuencias estacionales, así como para responder a la pregunta de si se ha introducido, por el proceso de ajuste, cualquier deformación temporal (cambios de fase), es necesario hacer uso de la técnica conocida con el nombre de análisis espectral mutuo o cruzado.

Supongamos que las series cronológicas  $X_1(t)$  y  $X_2(t)$  surgen de un mismo estado y queremos ver cómo están correlacionadas. En el *dominio tiempo* esta descripción nos la proporciona la función de *correlación mutua o cruzada* de la muestra  $R_{(12)\tau}$  pero se interpreta más fácilmente por el *espectro mutuo o cruzado*.

Supongamos que  $x_{2t}$  tiene una expresión armónica de la forma

$$x_{2t} = a_{20} + \sum_{j=1}^{m-1} c_{2j} \cos(\lambda_j t + \Phi_{2j}) + a_{2m} \cos \pi t \quad [1.73]$$

utilizando

$$a_{2j} = \frac{2}{M} \sum_{t=1}^M x_{2t} \cos \lambda_j t \quad , \quad \Phi_{2j} = \arctan \left( - \frac{b_{2j}}{a_{2j}} \right)$$

$$b_{2j} = \frac{2}{M} \sum_{t=1}^M x_{2t} \sin \lambda_j t \quad , \quad c_{2j} = \sqrt{a_{2j}^2 + b_{2j}^2}$$

Podemos estimar las *amplitudes*  $C_{2j}$  y las *fases*  $\Phi_{2j}$  de la fórmula

$$D_{2j} = a_{2j} - i b_{2j} = C_{2j} e^{+i\Phi_{2j}} = \frac{2}{M} \sum_{t=1}^M x_{2t} e^{-i\lambda_j t} \quad [1.74]$$

Llamamos a  $D_{2j}$  *amplitud compleja*.

El periodograma de  $x_{2t}$  puede escribirse ahora como

$$\frac{1}{2} D_{2j} \bar{D}_{2j} = \frac{1}{2} |D_{2j}|^2 \quad [1.75]$$

donde la barra representa el complejo conjugado.

El *espectro de líneas Fourier mutuo o cruzado* entre  $X_1(t)$  y  $X_2(t)$  se define por

$$\frac{1}{2} D_{1j} \bar{D}_{2j} = \frac{1}{2} c_{1j} c_{2j} e^{-i(\Phi_{2j} - \Phi_{1j})} \quad [1.76]$$

Este espectro contiene información de dos clases:

Por una parte, el *espectro de líneas de amplitud*  $\left( \frac{1}{2} C_{1j} C_{2j} \right)$ , mide el producto de las amplitudes de las ondas sinusoidales para la frecuencia  $\lambda_j$ , y, por otra parte, el *espectro de líneas fase*  $[\Phi_{2j} - \Phi_{1j}]$  mide el cambio de fase entre las dos ondas cosenoidales.

Podemos reemplazar éste por el *periodograma mutuo o cruzado normalizado*

$$H_{12}(\lambda_j) = \frac{M D_{1j} \bar{D}_{2j}}{4 \pi} = \frac{1}{\pi} \sum_{\tau=-M+1}^{M-1} d_{12}(\tau) e^{-i\lambda_j \tau} \quad [1.77]$$

Este periodograma mutuo normalizado es ahora complejo, por lo que, tanto la parte real como la imaginaria, son histogramas. La [1.77] muestra que el periodograma mutuo o cruzado es la transformada Fourier de la función de covarianza-compleja  $d_{12}(\tau)$ . Cuando el número de observaciones  $M$  aumenta,  $\frac{H_{12}(\lambda)}{\sigma_1 \sigma_2}$  tiende en media a la *función de densidad espectral mutua o cruzada continua*:

$$f_{12}(\lambda) = \frac{1}{\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \rho_{12}(\tau) e^{-i\lambda\tau} \quad [1.78]$$

Hemos visto que ésta consta de parte real y parte imaginaria y, por tanto, podemos poner

$$\begin{aligned} f_{12}(\lambda) &= h_{12}(\lambda) - i g_{12}(\lambda) \\ &= c_{12}(\lambda) e^{+i\Phi_{12}(\lambda)} \end{aligned} \quad [1.79]$$

donde

$$c_{12}(\lambda) = \sqrt{h_{12}^2(\lambda) + g_{12}^2(\lambda)} \quad [1.80]$$

recibe el nombre de *espectro de amplitud mutuo o cruzado continuo*; y

$$\Phi_{12}(\lambda) = \text{arc tg} \left[ -\frac{g_{12}(\lambda)}{h_{12}(\lambda)} \right] \quad [1.81]$$

el de *espectro fase continuo*. De la [1.81] deducimos que la diferencia fase es cero si  $g_{12}(\lambda) = 0$ , por lo que  $h_{12}(\lambda)$  se llama *in-fase o coespectro*. Análogamente,  $\Phi_{12}(\lambda) = \frac{\pi}{2}$ , si  $h_{12}(\lambda) = 0$ , por lo que a  $g_{12}(\lambda)$  se le llama *espectro de cuadratura o fuera de fase*.

Para calcular  $h_{12}(\lambda)$  y  $g_{12}(\lambda)$ , y, por tanto,  $c_{12}(\lambda)$  y  $\Phi_{12}(\lambda)$ , conocida la función de correlación cruzada  $\rho_{12}(\tau)$ , debe observarse que ésta se puede descomponer como sigue

$$\rho_{12}(\tau) = A_{12}(\tau) + B_{12}(\tau) \quad [1.82]$$

donde

$$A_{12}(\tau) = \frac{1}{2} \left\{ \rho_{12}(\tau) + \rho_{12}(-\tau) \right\} \quad [1.83]$$

y

$$B_{12}(\tau) = \frac{1}{2} \left\{ \rho_{12}(\tau) - \rho_{12}(-\tau) \right\} \quad [1.84]$$

Se deduce de ello que  $A_{12}(\tau) = A_{12}(-\tau)$  es la *parte par* y  $B_{12}(\tau) = -B_{12}(-\tau)$  es la *parte impar* de la función de correlación cruzada. Sustituyendo en [1.78] y agrupando términos, se puede calcular el coespectro y el espectro cuadratura

$$h_{12}(\lambda) = \frac{1}{\pi} \left\{ A_{12}(0) + 2 \sum_{\tau=1}^{\infty} A_{12}(\tau) \cos \lambda \tau \right\} \quad [1.85]$$

$$g_{12}(\lambda) = \frac{1}{\pi} \left\{ 0 + 2 \sum_{\tau=1}^{\infty} B_{12}(\tau) \sen \lambda \tau \right\} \quad [1.86]$$

El espectro base para el análisis espectral cruzado, análogo al ruido blanco para el autoespectro, surge cuando consideramos el caso en que la función de correlación cruzada es cero excepto para  $\tau = 0$ . Esta es la suposición usual que se hace cuando calculamos el coeficiente de correlación ordinario entre dos conjuntos de observaciones. En este caso  $h_{12}(\lambda) = \rho_{12}(0)/\pi$ ,  $g_{12}(\lambda) = 0$  y, por tanto,  $\Phi_{12}(\lambda) = 0$ . Las dos series están en fase y el espectro de amplitud mutuo o cruzado es una constante.

Como en el caso de una variable, el periodograma mutuo o cruzado no es un buen estimador del espectro cruzado puesto que lleva a usar una ventana espectral con anchura de banda muy estrecha. Pueden obtenerse co-espectros y cuad-espectros suavizados de los estimadores  $\hat{A}_{12}(\tau)$  y  $\hat{B}_{12}(\tau)$  de la parte par e impar de la función de correlación mutua o cruzada como sigue:

$$h_{12}(\lambda) = \frac{1}{\pi} \left\{ \hat{A}_{12}(0) + 2 \sum_{\tau=1}^M K(\tau) \hat{A}_{12}(\lambda) \cos \lambda \tau \right\} \quad [1.87]$$

$$g_{12}(\lambda) = \frac{1}{\pi} \left\{ \hat{B}_{12}(0) + 2 \sum_{\tau=1}^M K(\tau) \hat{B}_{12}(\lambda) \sen \lambda \tau \right\} \quad [1.88]$$

donde los  $K(\tau)$  son ponderaciones de la forma

$$K(\tau) = 1 - \frac{|\tau|}{M} \quad \text{''} \quad 0 \leq |\tau| \leq M$$

ó

$$K(\tau) = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \frac{\pi\tau}{M} \right) \quad \text{''} \quad 0 \leq |\tau| \leq M$$

A partir de éstos, podemos formar estimadores de la amplitud cruzada y del espectro fase utilizando la [1.80] y [1.81].

Para llevar a cabo la *estimación de la función de transferencia*, hemos de tener presente que puede acontecer que  $X_1(t)$  y  $X_2(t)$  no surjan de un mismo estado, pero que  $X_2(t)$  sí sea la salida de cierto aparato físico en el que  $X_1(t)$  es la entrada.

Si el sistema es aproximadamente lineal  $X_2(t)$  y  $X_1(t)$  pueden estar relacionadas por medio de una *ecuación de regresión* dinámica

$$x_2(t) = \int_0^{\infty} L(z) x_1(t-z) dz + B(t) \quad [1.89]$$

o, en el campo discreto, por

$$x_2(t) = \sum_{j=0}^{\infty} l_j x_1(t-j) + B_t \quad [1.90]$$

La función de regresión  $L(Z)$  ó  $l_j$  se llama *respuesta impulso* del sistema.

La *ganancia*  $G_{12}(\lambda)$  viene definida por la relación

$$f_{22}(\lambda) G_{12}^2(\lambda) = f_{11}(\lambda) L_{12}(\lambda) \quad [1.91]$$

El *diagrama ganancia* es la representación de  $G_{12}(\lambda)$  respecto a  $\lambda$ .

Una medida de la *diferencia de fase* entre las componentes de frecuencia de dos procesos es  $\Phi_{12}(\lambda) = \arctg \frac{g_{12}(\lambda)}{h_{12}(\lambda)}$ , y su representación respecto a  $\lambda$  ( $0 < \lambda < \pi$ ) se llama *diagrama fase*.

Conocida  $L_{12}(z)$ , la ganancia y fase pueden ser calculadas basándonos en la *función de respuesta de la frecuencia*.

$$R(i\lambda) = G_{21}(\lambda_j) e^{+i\Phi(\lambda)} = \int_0^{\infty} L(Z) e^{-i\lambda z} dz \quad [1.92]$$

En el campo discreto sería

$$r(i\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} I_j e^{-i\lambda_j} \quad [1.93]$$

La función de respuesta de la frecuencia puede ser calculada de

$$R(i\lambda) = H_{12}(\lambda)/H_{11}(\lambda) \quad [1.94]$$

Este estimador tiene la misma desventaja que el estimador periodograma de un auto-espectro, a saber: la anchura de banda de la ventana espectral es demasiado pequeña. Esto puede conseguirse suavizando tanto el numerador como el denominador en [1.94] y el resultado final es:

$$\hat{R}(i\lambda) = \hat{G}_{21}(\lambda) e^{+i\hat{\Phi}(\lambda)} = \frac{s_1 s_2 \hat{f}_{12}(\lambda)}{s_1^2 \hat{f}_{11}(\lambda)} \quad [1.95]$$

donde  $S_1$ ,  $S_2$  son las desviaciones típicas estimadas de  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  respectivamente. Esto conduce al mismo estimador de la fase que vimos antes y a un estimador de la ganancia  $G_{21}(\lambda)$  de la forma

$$\hat{G}_{21}(\lambda) = \frac{s_1 s_2}{s_1^2} \frac{\hat{c}_{12}(\lambda)}{\hat{f}_{11}(\lambda)} \quad [1.96]$$

Puede verse que  $\hat{G}_{21}(\lambda)$  juega el papel de un coeficiente de regresión definido en cada frecuencia  $\lambda$ , puesto que el numerador en la relación [1.95] es la covarianza entre la entrada y salida en la frecuencia  $\lambda$ , y el denominador la varianza de la entrada en la misma frecuencia.

La *coherencia* es una medida de la correlación entre la entrada y salida en cada frecuencia; varía entre 0 y 1, como el cuadrado de un coeficiente de correlación ordinario y viene dada por la expresión

$$L_{12}^2(\lambda) = \frac{c_{12}^2(\lambda)}{\hat{f}_{11}(\lambda) \hat{f}_{22}(\lambda)} \quad [1.97]$$



Si denotamos la ganancia [1.96] de  $X_1(t)$  respecto a  $X_2(t)$  por  $\hat{G}_{21}$  y la ganancia de  $X_2(t)$  respecto a  $X_1(t)$  por

$$\hat{G}_{12}(\lambda) = \frac{s_1 s_2}{s_2^2} \frac{\hat{c}_{12}(\lambda)}{\hat{f}_{22}(\lambda)} \quad [1.98]$$

entonces

$$L_{12}^2(\lambda) = \hat{G}_{21}(\lambda) \hat{G}_{12}(\lambda) \quad [1.99]$$

fórmula análoga a la conocida de que el cuadrado del coeficiente de correlación ordinario es igual al producto de los dos coeficientes de regresión. Si  $X_1(t)$  y  $X_2(t)$  surgen de un mismo estado, es útil representar tanto las ganancias hacia adelante como hacia atrás. Estas serán diferentes, de la misma forma que son diferentes las dos líneas de regresión obtenidas de un diagrama esparcido ordinario.

#### 1.5. VENTAJAS E INCONVENIENTES DE LOS PROCEDIMIENTOS DE ANÁLISIS DE SERIES CRONOLÓGICAS

Ha habido y hay todavía grandes discusiones sobre cuál de los dos procedimientos de análisis de series cronológicas tiene mayor interés; si el de *dominio temporal*, donde aparecen las autocorrelaciones y correlaciones mutuas, o el de *dominio frecuencial*, donde se utilizan los espectros mutuos y espectros en general.

Las autocorrelaciones han jugado un papel muy importante en la teoría sobre series cronológicas; por ejemplo, forman parte directamente de las ecuaciones de estimación para promedios móviles mixtos —los modelos autorregresivos de la forma—

$$\begin{aligned} x_t + \alpha_1 x_{t-1} + \dots + \alpha_k x_{t-k} = \\ = \beta_0 y_t + \beta_1 y_{t-1} + \dots + \beta_m y_{t-m} \end{aligned} \quad [1.100]$$

donde la sucesión  $\{Y_t\}$  es una sucesión de variables aleatorias incorreladas. Obsérvese que, al poderse expresar  $x_t$  como una función lineal de  $Y_t$  —en este caso, un promedio móvil mixto—, la autorregresión

puede considerarse como la salida de un filtro (1) lineal cuya entrada  $Y_t$  es ruido blanco y cuya función de transferencia es una función racional de  $y = e^{i\lambda}$ .

Los econométricos que utilizan en sus trabajos estos modelos critican el uso del espectro en su fundamento, ya que lo que se puede hacer con el espectro en el dominio de frecuencia puede hacerse también con las autocorrelaciones en el dominio temporal. De la relación ya conocida

$$\sigma^2 f_{11}(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{11}(\tau) \cos \lambda \tau \, d\tau$$

se deduce que el conocimiento de las autocorrelaciones del proceso  $\rho_{11}(\tau)$ , es equivalente al conocimiento del espectro de la población  $f_{11}(\lambda)$ . Por el contrario, otros arguyen que el espectro es la magnitud que se debe estimar casi siempre.

Nosotros creemos que, efectivamente, hay algunos casos en que es más fácil determinar las autocorrelaciones que el espectro, pero en muchos otros casos sucede lo contrario, por lo que, en el campo de las aplicaciones, se debe hacer tres consideraciones a la hora de elegir los espectros o autocorrelaciones:

- a) Uso que se da a las cantidades estimadas;
- b) Facilidad en la interpretación física, y
- c) Simplicidad de propiedades muestrales.

En general, las propiedades muestrales del espectro son considerablemente más simples que las de las autocorrelaciones. Sin embargo, hay ciertos casos en que no sucede así. Por ejemplo, si se hicieran criterios de aleatoriedad, empleando autocorrelaciones, en conjuntos de números aleatorios, las propiedades muestrales de las autocorrelaciones en este caso son perfectamente aconsejables. En raras ocasiones se utilizarán espectros para criterios de aleatoriedad, a no ser que nos interesáramos por alternativas de aleatoriedad de naturaleza cíclica y que estos ciclos fueran de interés. Existen situaciones, como en el

---

(1) Definimos ya el "filtro" como una serie de operaciones aritméticas utilizadas para transformar los datos antes de su análisis. Los filtros *lineales* tienen gran importancia en el análisis espectral, ya que el espectro de la salida de un filtro lineal está relacionado de forma simple con el espectro de la serie de entrada.

ajuste de esquemas autorregresivos, donde, si bien las propiedades muestrales de las autocorrelaciones son difíciles, trabajando con las cantidades naturales para emplearlas en estas situaciones, es decir, las autocorrelaciones parciales, las propiedades muestrales se hacen más simples.

Vamos a mencionar algunos ejemplos que surgen con frecuencia, para aclarar algunas de las consideraciones anteriores:

A) Si los objetivos del análisis están regidos por consideraciones tales como el ser aproximadamente lineales los sistemas, el espectro es la contestación al apartado anterior a).

En los estudios de respuesta frecuencia, el empleo de las autocorrelaciones daría lugar a cálculos francamente complicados.

B) Por el hecho de que la predicción se hace en el tiempo, es natural trabajar en estos casos en el dominio temporal.

C) Entendemos por *simular un sistema físico S*, respecto a un cierto conjunto de acciones  $A'$ , la obtención artificial, con la ayuda de un sistema más simple que  $S$ , de las respuestas que daría  $S$  a las acciones  $A'$ . Hoy día, debido al uso de los ordenadores electrónicos, se emplea mucho la simulación de series cronológicas en el campo de la economía, en los sistemas de control balístico, etc. Ultimamente, se viene aplicando con grandes éxitos el análisis espectral en estos casos.

Conviene observar que, si se dispusiese de suficientes datos en estos problemas, dichos datos podrían alimentar directamente la simulación. Sin embargo, la cantidad de los mismos requerida para tales estudios de simulación es tan grande que el costo de su adquisición podría resultar demasiado elevado.

D) En las investigaciones exploratorias, no hay ningún sustituto significativo, basado en consideraciones a priori, para la construcción de modelos de series cronológicas de las que puedan estimarse parámetros físicos significativos. Sin embargo, en la construcción de tales modelos, el análisis empírico, especialmente los análisis espectrales, pueden ser de gran importancia para sugerir posibles modelos.

E) En el caso de análisis de datos económicos, se debe utilizar el análisis espectral mutuo o cruzado.

F) Los tipos de series que se presentan generalmente podemos clasificarlos en tres grupos:

1) Las que presentan propiedades estacionarias de regularidad en periodos largos.

2) Las que son relativamente estacionarias si se examinan en un período de tiempo lo suficientemente corto, y

3) Las que no cumplen las suposiciones de estacionaridad.

Hasta el momento presente, las series pertenecientes al tercer grupo se han venido estudiando mediante el uso de una serie de pasos preliminares para eliminar la componente no estacionaria, antes de realizar un análisis espectral. En algunos casos, se han empleado sistemas de polinomios ortogonales; en otros, se han utilizado filtros digitales para filtrar las tendencias de baja frecuencia y, luego, poder llevar a cabo un análisis espectral en las series residuales.

Nuestra opinión sobre este punto es que aún no se conocen técnicas seguras como para ser aplicadas con eficacia en los casos en que la característica de estacionaridad no se cumpla. El problema que creemos ha de resolverse en estos casos es el de la obtención del filtro óptimo.

## CAPITULO II

## ANALISIS ESPECTRAL DEL FENOMENO ECONOMICO

Hasta hace muy poco tiempo, se ha venido haciendo el estudio de los fenómenos económicos mediante el uso del sencillo modelo matemático llamado "camino aleatorio", obtenido mediante la aplicación del operador diferencia progresiva.

Ahora bien, se ha podido comprobar que el modelo de camino aleatorio no explica ciertos hechos importantes a largo plazo, por tanto, tales hechos deben ser analizados por métodos rigurosos y técnicas estadísticas más apropiadas, cual son los métodos espectrales que recientemente se han empezado a aplicar al campo de la economía con grandes éxitos.

Las componentes de mayor interés para el economista son las pertenecientes al intervalo de baja frecuencia (I), en el cual están concentradas las componentes a largo plazo, pero este intervalo está generalmente influenciado por la llamada tendencia secular (de frecuencia nula) que da lugar al llamado efecto de "fuga". Por tal motivo, procedería eliminar todo efecto de tendencia en media o en varianza, antes de iniciar el estudio de una serie cronológica.

Teniendo en cuenta que los métodos espectrales se han venido aplicando a las series estacionarias, atributo que no poseen las series económicas, parecería inadecuado el uso de los métodos espectrales en economía. Sin embargo, se ha podido comprobar, tanto teórica como prácticamente, que al no cambiar rápidamente en el tiempo la estructura económica subyacente en la serie, los resultados obtenidos mediante el uso del análisis espectral son verdaderamente representativos, tanto en el estudio de una serie económica, como en el de las relaciones entre pares de series económicas.

---

(1) Los conceptos de baja y alta frecuencia que utilizamos aquí, no coinciden en su dimensión con la de los empleados en el campo de la Radio-electricidad.

En base a los conceptos que establecemos al hablar de los procesos estocásticos estacionarios, estar definidos por una función aleatoria afectada de un parámetro que representa el tiempo y al análisis espectral que de ellos se ha realizado en Apéndice, establecemos que la realización muestral de este proceso estocástico estacionario, es una serie cronológica. No obstante, la estimación de este proceso por medio de la serie obtenida, presenta grandes dificultades, ya que esta serie no está generada por un proceso estocástico estacionario, pues representa los hechos históricos de un período dado y no son muestras tomadas de una serie cronológica, ilimitada sin historia. En este caso, el espectro debería ser considerado como un "pseudo-espectro", pero por sencillez, se utiliza generalmente el término "espectro".

Debido a lo expuesto anteriormente, hemos de contentarnos con realizar un análisis de las series económicas que son directamente representativas de una sucesión aleatoria, pero no de una función aleatoria, que es la representación de un proceso estocástico.

Para hacer un análisis de series cronológicas, en primer lugar, debemos determinar la dimensión de la misma, pues un período de observación pequeño, no nos permitiría obtener resultados satisfactorios respecto a la construcción de estimadores.

## 2.1. ANÁLISIS Y DETERMINACIÓN DE CICLOS ECONÓMICOS

Considerada una serie económica, procede estimar el espectro de potencia de la serie formada por los tantos anuales de variación de la serie dada, es decir, la serie obtenida mediante preblanqueo de la dada. Los estimadores espectrales nos permitirán determinar las posibles oscilaciones de los diversos ciclos. Son de frecuente uso en las estimaciones espectrales, dentro del campo de la economía, la ventana de Parzen y la de Tuckey-Hanning, por presentar ambas ventajas interesantes y haberse comprobado prácticamente que difieren muy poco los resultados obtenidos al aplicar cada una de éstas.

Tendremos en cuenta, que toda serie estacionaria puede considerarse como resultante de la suma de series estacionarias llamadas componentes a las cuales está asociada una banda de frecuencia y que cada componente es estadísticamente (1) independiente de las demás.

---

(1) Utilizamos el término "estadísticamente" porque se trata de una realización de un modelo y no de éste.

Para determinar las bandas de frecuencia asociadas a cada componente, se divide el intervalo  $(0, \pi)$  en subintervalos mutuamente disjuntos de medida constante. De esta forma, cada una de las  $m$  componentes puede estar reflejada por una frecuencia perteneciente a un intervalo particular.

La determinación de los ciclos económicos, exige remodelar la serie del tanto de variación en los ciclos anuales convenientes. Esta operación se logra mediante filtrado de estas series en una determinada frecuencia.

Para aplicación inmediata de lo expuesto anteriormente a la Economía Española, proponemos el análisis espectral adecuado de las series económicas siguientes:

1. Renta nacional neta.
2. Producto interior bruto.
3. Consumo privado.
4. Inversión interior bruta.
5. Consumo público.
6. Importaciones.
7. Exportaciones.
8. Balanza Comercial.
9. Índice general de precios.
10. Índice de precios de consumo.
11. Índice de precios de producción.
12. Índice de precios de importación.
13. Índice de precios de exportación.
14. Relación real de intercambio.
15. Stock monetario.
16. Reserva de encaje.
17. Dinero en depósitos.
18. Créditos y redescuentos del Banco de España.
19. Préstamos y descuentos de la Banca.
20. Depósito de la Banca.
21. Tanto de redescuento del Banco de España.
22. Producción del sector primario.
23. Producción del sector industrial.
24. Producción del sector comercial.
25. Producción de los sectores industrial y comercial.
26. Mano de obra del sector primario.

27. Mano de obra del sector industrial.
28. Mano de obra del sector comercial.
29. Mano de obra en los sectores industrial y comercial.
30. Mano de obra total; y
31. Evolución demográfica.

## 2.2. PROBLEMAS EN LA ESTIMACIÓN DE ESPECTROS DE SERIES CRONOLÓGICAS ECONÓMICAS

Las series cronológicas económicas, aunque teóricamente pueden ser continuas, en la práctica se observan en intervalos de tiempo discretos.

El primer problema que se plantea en el estudio de series cronológicas económicas es el *aliasamiento*, del que ya se ha hablado en el capítulo anterior, y que no parece constituir un problema difícil para este tipo de series, pues, prácticamente, significa que los picos en el espectro de potencia, para frecuencias menores que  $\frac{1}{2}$  ciclos por unidad, pueden deberse a causas que actúan muy por encima del intervalo de frecuencia observable. Para saber si el aliasado es problema o no, se examina si los picos observados tienen explicación admisible; si no la tienen, se debe buscar la citada explicación en frecuencias altas.

El segundo problema que se plantea en el análisis de series cronológicas económicas es la gran limitación en el número de observaciones disponibles. Por tanto, en el estudio de este tipo de series la potencia de discriminación para frecuencias bajas está limitada por la longitud de la realización. Aparte de lo pequeño que pueda ser el período de observación unitario, observemos que, a pesar de que podamos incrementar la máxima frecuencia observada reduciendo el intervalo entre las observaciones, no podemos aumentar la discriminación para frecuencias bajas por tales medios. Sin embargo, no todas las fluctuaciones en las series cronológicas económicas que nos interesen son de tan larga duración. En particular, la mayoría de las operaciones realizadas sobre series cronológicas económicas semanales, mensuales o trimestrales están diseñadas con el fin de separar las componentes de frecuencia elevada, y hacer estas series más útiles para previsiones económicas a corto plazo, o para valoración de la situación económica



corriente. La existencia o inexistencia de procedimientos para realizar esta función adecuadamente es un problema de gran importancia. Por otra parte, creemos que las componentes de frecuencia elevada son de interés especial y, por tanto, la longitud corta de la mayoría de las series cronológicas económicas no plantea obstáculo en el uso de las técnicas espectrales.

Otra forma de salvar esta dificultad y realizar el estudio de las series económicas sería utilizar el moderno método de simulación de series económicas.

Teniendo en cuenta que, en términos generales, la simulación se refiere a la construcción de una representación simplificada de un proceso o sistema con el fin de facilitar su análisis; en nuestro caso, se refiere a la construcción, en base a la información poseída, de un proceso estocástico gaussiano multivariante cuyo orden sea el número de componentes del análisis propuesto, que se utilizará como elemento simulador para completar la serie. Si bien el método de construir una simulación o representación de un proceso estocástico implica una o más abstracciones del mundo real, la elección está basada tanto en la simplicidad de construcción de este proceso simulador, en orden a su estimación paramétrica, como en la posibilidad de contrastación por el investigador de hipótesis estadísticas.

El proceso a seguir para realizar este estudio, obtenidas las series por simulación, es formar las tablas necesarias que nos proporcionen las bandas de frecuencia que tengan picos locales de los espectros de potencia de las series a analizar, tanto a precios constantes como variables.

Para preblanquear nuevamente las series obtenidas, utilizaremos la diferencia primera ponderada, estableciendo para cada caso los factores de ponderación más adecuados. La obtención del espectro se logra recolorando el estimador espectral previamente obtenido.

En la estimación del espectro de potencia de las series cronológicas económicas, se suele aplicar la llamada *regla general del pulgar*, consistente en que el desplazamiento o retardo máximo no deberá ser mayor de, aproximadamente, el 20 por 100 del número total de observaciones disponibles.

Todas las series cronológicas económicas son reales. Por esta razón, su espectro es simétrico con respecto al origen y sólo necesitamos considerar las frecuencias positivas.

Sabemos que el periodograma clásico es la técnica que corrientemente se emplea para investigar los armónicos de frecuencias cronológicas conocidas y fijas, en la hipótesis de que las series cronológicas en consideración sean estrictamente periódicas, es decir, se repitan cada  $M$  periodos. Si sucediera esto, el espectro de potencia sería una función escalón. Sin embargo, si la serie cronológica no fuera estrictamente periódica, como es el caso de las series económicas, se tendría un espectro de potencia continuo.

Las ordenadas del periodograma son estimadores asintóticamente insesgados del espectro de potencia, en las frecuencias correspondientes, para series cronológicas no estrictamente periódicas, pero no son estimadores consistentes, pues la varianza de las ordenadas del periodograma tiende a  $[\rho_{11}(0) f(\lambda_1)]^2$ . Por esto, *el uso del periodograma clásico no solamente es inapropiado, en economía, sino que conduce a resultados de muy difícil interpretación.*

Luego, en vez de estimar el espectro de potencia para una frecuencia específica, es necesario, para que los resultados sean estadísticamente consistentes, estimar la potencia promedia para las frecuencias en cuestión. Evidentemente, lo que interesaría sería estimar un promedio que reflejase lo mejor posible la potencia para las frecuencias próximas a la que centramos el estimador. Por tanto, consideraremos promedios ponderados de potencia en el dominio frecuencia; estos promedios corresponden a ponderar las autocovarianzas iniciales de las series cronológicas antes de calcular los estimadores espectrales. En el dominio de frecuencia, un esquema de ponderación particular recibe el nombre de *ventana espectral*. La inversa de una ventana espectral es un esquema de ponderación en el dominio temporal para las autocovariantes iniciales y se llama *ventana desplazada*. Se ha investigado bastante dentro del análisis espectral sobre la elección adecuada de la ventana espectral, pero no existe una solución completamente satisfactoria del problema.

Una de las razones por las que se suele utilizar la ventana sugerida por Parzen es por ser siempre positiva. Las potencias altas para frecuencias bajas, presentes en la mayoría de las series cronológicas económicas, pueden producir estimadores *negativos* del espectro para frecuencias más altas y, puesto que el espectro es una varianza, los estimadores *negativos* no son fáciles de interpretar.

Tiene importantes consecuencias para la estimación del espectro el hecho de que solamente los promedios espectrales tienen propiedades

estadísticas de consistencia y que, por tanto, debemos mirar el espectro de una serie cronológica a través de una ventana. La cuestión está íntimamente relacionada con el problema de la no-estacionaridad de muchas series cronológicas económicas. La ventana, a través de la cual miramos el espectro, concentra su ponderación principal muy próximamente a la frecuencia designada, pero no toda la ponderación se concentra así; hay alguna pequeña ponderación en otras frecuencias. Esto quiere decir que las potencias altas para algunas frecuencias deformarán los estimadores espectrales para otras frecuencias, algunas muy distantes de aquellas en las que la potencia alta está presente. Este fenómeno se denomina *fuga en los bordes de la ventana*. Las dos formas importantes de no-estacionaridad en las series cronológicas gaussianas o casi gaussianas son:

- 1) Varianza que cambia con el tiempo, y
- 2) Media que cambia con el tiempo.

El caso de las varianzas variables no es gran problema en las series cronológicas que estudiamos. Se suele utilizar el artificio de dividir las observaciones por una varianza muestral móvil, si aparece la varianza no estacionaria. La varianza variable puede presentar problemas en series cronológicas económicas largas.

Los cambios de la media con el tiempo se denominan generalmente *tendencias*. En toda realización finita de un proceso, las tendencias no se podrán distinguir de las componentes de frecuencias muy bajas. En realidad, la media muestral puede considerarse como un ciclo de frecuencia cero o período infinito. Por tanto, puesto que la mayoría de las series cronológicas económicas presentan tendencia de una u otra clase, el espectro de potencia de una serie cronológica económica típica presentará la potencia muy elevada concentrada en frecuencias próximas a cero, y la potencia próxima a cero en frecuencias altas. Por esto, el problema de fuga es un problema importante en todo intento de analizar sus componentes de frecuencia alta.

Para minimizar los efectos de fugas a través de los bordes de una ventana espectral, idealmente se podría preblanquear la serie de tal manera que el espectro de potencia del resultado fuese lo más plano posible. Naturalmente, si se pudiera hacer perfectamente, esto equivaldría a perfeccionar el conocimiento del espectro de la serie original y sería, por tanto, completamente innecesario el uso de la ventana es-

pectral. Algunos efectos de fuga son inevitables. Respecto a las series económicas, lo mejor sería eliminar la potencia grande solamente para las frecuencias más bajas. Sin embargo, debe tenerse cuidado para no eliminar nada más que las potencias más altas que surgen para frecuencias altas, pues entonces la fuga de esta potencia deformaría mucho nuestro estimador en las frecuencias más bajas. Para eliminar las tendencias y, por tanto, la potencia alta en frecuencias bajas, se emplean las diferencias sucesivas de la forma

$$\Delta^k X(t) = X(t) - K X(t - 1) \quad [2.1]$$

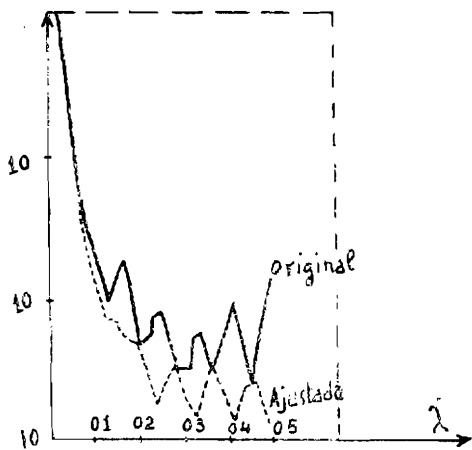


Fig. 2.1.

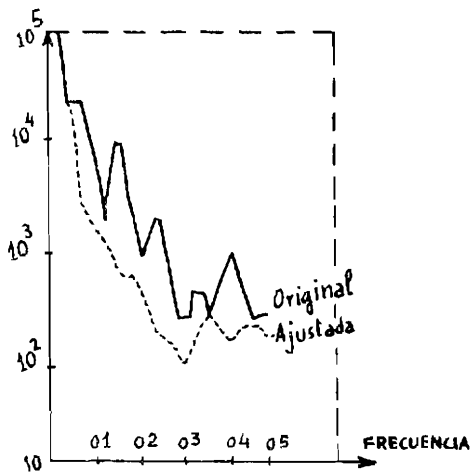


Fig. 2.2.

Espectros de potencia estimados del paro en U. S. A. para cuatro edades distintas.

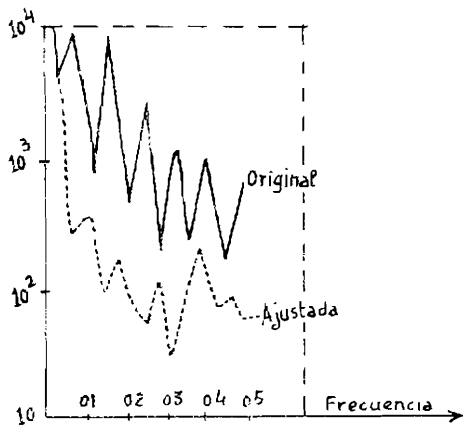


Fig. 2.3.

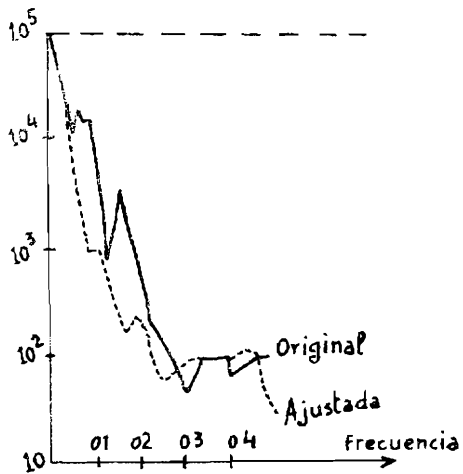


Fig. 2.4.

### 2.3. CONSIDERACIONES SOBRE EL ESPECTRO DE SERIES CRONOLÓGICAS ECONÓMICAS

Ultimamente se han estimado gran cantidad de espectros de potencia, utilizando datos de carácter económico; y, en general, las representaciones gráficas han sido del tipo indicado en las figuras (2.1) a (2.4), que son los espectros de potencia estimados del paro en U.S.A., para distintas edades.

Es conveniente tener presente que muchas de las series estudiadas contienen importantes componentes estacionales y, por tal causa, presentan picos en frecuencias que corresponden a un período de 12 meses y a sus armónicos.

Entonces parece natural pensar que, en términos generales, la forma típica del espectro de las series cronológicas económicas, después de eliminar toda tendencia en media que se presente, así como las componentes estacionales, es la de la figura 2.5.

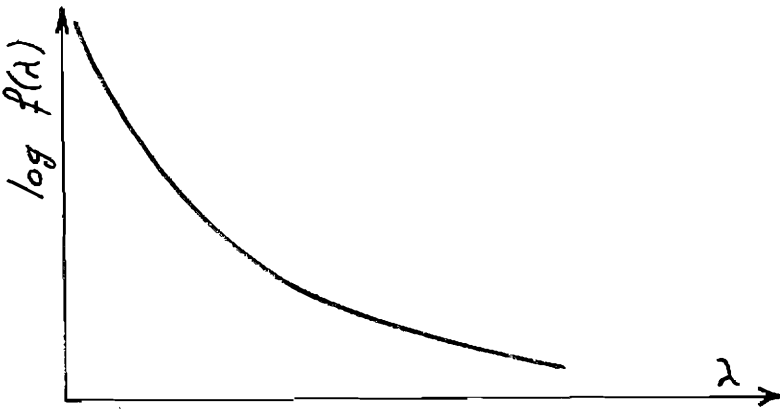


Fig. 2.5.—Forma típica del espectro de series económicas.

Evidentemente, no queremos decir que todas las series cronológicas económicas produzcan estos espectros, ni que de los espectros estimados no se discierna otra cosa que la figura 2.5. No obstante, el hecho de que en la mayoría de los casos se obtenga una figura como la 2.5,

nos hace sugerir que nos encontramos en ciertas implicaciones generales en economía y, posiblemente, que la estimación de espectros de potencia por sí solos no serán una técnica eficaz. Debido a esto, pensamos en los métodos de espectros mutuos o cruzados como en los más importantes y eficaces a la hora de explicar las relaciones entre las variables económicas.

Sabemos que los métodos espectrales se basan en la idea de descomponer un proceso estocástico en componentes ortogonales, cada una de las cuales va asociada a una frecuencia. Tal descomposición es siempre posible en el caso de procesos "estacionarios covariantes". El espectro de potencia recoge la contribución a la varianza total del proceso de las componentes que pertenecen a una determinada banda de frecuencia.

Es muy importante tener presente que los métodos espectrales no requieren la especificación de un modelo, sino que se deducen directamente de la hipótesis de estacionaridad.

Si observamos los gráficos de los espectros de potencia, podemos sacar la conclusión de que las componentes de frecuencias bajas tienen gran importancia.

La mayoría de las series cronológicas económicas contienen importantes *tendencias en media* (1), y son tales tendencias las que aumentan el valor del espectro de potencia en las frecuencias bajas. Y podría pensarse que la forma típica del espectro fuera debida en su mayor parte a la existencia de tales tendencias. La definición que utilizamos de tendencia en media no nos resuelve el problema que nos planteamos, porque, si se estima directamente el espectro de una serie que contenga una tendencia en media, la forma resultante será, casi invariablemente, de forma típica, que se debe a una característica del procedimiento de estimación, denominada en el capítulo anterior por "fuga". Si el espectro real contiene un pico importante en cierta frecuencia, no sólo se incrementará el valor del espectro estimado en las bandas de frecuencia próximas, sino que hasta un 3 por 100 del valor

---

(1) Entendemos por "tendencia en media" aquella tendencia que comprende todas las componentes frecuenciales con una frecuencia igual o menor que  $2\pi/n$ , es decir, a todas las componentes con una longitud de onda igual o mayor que la longitud de la serie.

Esta definición, aun siendo bastante arbitraria, es relativamente precisa e incluye la significación intuitiva de tendencia dada por la mayoría de los analistas de métodos de series cronológicas.

del pico podrá encontrarse en el valor estimado en otras bandas de frecuencia próximas. Esta fuga, aunque representa un pequeño porcentaje del gran valor en el pico, puede, no obstante, introducir sesgos importantes en los estimadores del espectro de tales frecuencias. Dado que la componente que hemos denominado tendencia contribuirá generalmente en mayor proporción a la varianza total de la serie, el valor del espectro en la banda de frecuencia  $\left(0 \leq \lambda \leq \frac{\pi}{2m}\right)$ , si son  $m$  los desplazamientos o retardos utilizados en el procedimiento de estimación espectral, será grande y el efecto de fuga será responsable de que el espectro estimado vaya decreciendo rápida pero suavemente a través de las bandas de frecuencia próximas.

Se deduce de aquí que, si se estima el espectro de potencia de una serie económica que contiene una tendencia importante, es de esperar, con casi completa seguridad, una estimación espectral de "forma típica". Lo que interesa de esta forma típica es la cuestión de si sigue siendo la misma o parecida, cuando se elimina la tendencia en media. Supongamos que la tendencia en media se elimina por medio de filtración o regresión. Se sabe que tales métodos eliminarán la tendencia en media y que el espectro del residuo no presentará sesgo en casi ninguna frecuencia, excepto en el caso de las muy bajas, que, en general, perderán potencia. En las investigaciones que se han hecho, se ha podido ver que el espectro de potencia del residuo es de la forma dibujada en la figura 2.6; es decir, de la forma típica, aparte de la pérdida de potencia en las frecuencias bajas.

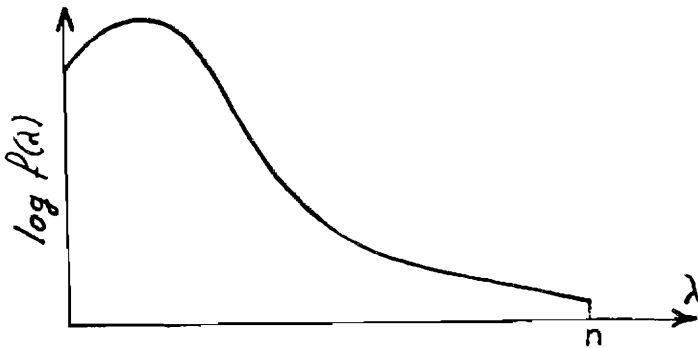


Fig. '2.6.



Aún más: *independientemente de la longitud de los datos disponibles*, se encuentra el mismo contorno básico, siendo también independiente de las dimensiones del punto de truncación utilizado en el procedimiento de estimación o del método utilizado para eliminar la tendencia.

Es posible que el contorno típico no alcance un pico absoluto en alguna frecuencia muy baja, pero, si esto sucede, el pico debe encontrarse en una frecuencia relativamente baja, ya que no se ha encontrado prueba alguna de que exista un punto de inflexión en los estudios de series largas.

Los estudios en que se ha utilizado la técnica del pre-blanqueo, que hace disminuir los sesgos debidos a la fuga, corroboran esta afirmación; y lo mismo sucede con los análisis de datos que no contienen ninguna tendencia en media.

La conclusión, por tanto, es que el contorno espectral típico de una serie económica es como el de la figura 2.5, y que cualquier posible tendencia en media lo que hará será precisamente, acentuar este contorno.

En base a la afirmación anterior, se puede decir que las fluctuaciones a largo plazo en las variables económicas, una vez descompuestas en sus componentes frecuenciales, son tales que las amplitudes de las componentes disminuyen suavemente a medida que decrece el periodo (1). En otras palabras, los sucesos que afectan a la economía durante un largo periodo son más importantes que los que afectan durante un periodo corto. Lo anterior nos indica que, en los espectros de potencia estimados, los picos que corresponden a las bandas importantes de frecuencia se juntan para formar una curva suave y continua.

El espectro de potencia estimado tendrá en esencia el contorno correcto, pero, por lo general, contendrá también cierto número de altos y bajos distribuidos a lo largo del auténtico contorno espectral. Una muestra diferente del mismo proceso daría lugar a un espectro estimado similar, pero con los altos y bajos situados en frecuencias diferentes. Este "error muestral" podemos pensar que se debe al hecho

---

(1) Esta ley indica que el espectro no se compone de una serie de picos de magnitud decreciente, que corresponden a cada uno de los ciclos anteriores, sino que es más bien una curva suave y decreciente, sin altos significativos, que corresponden a periodos mayores de doce meses.

de que las muestras son únicamente de longitud finita. Los picos encontrados en los espectros estimados no tienen por qué ser significativos. Supongamos que la muestra es tal que el máximo más visible se encuentra en el espectro de potencia a  $x$  meses, por ejemplo; en tal caso, parece probable que, si se examinan los datos con intención de encontrar un ciclo, el que se encuentre tendrá un período de, aproximadamente,  $x$  meses.

Se ha observado que se pueden encontrar pequeños picos similares en el logaritmo de series económicas, como cotizaciones de bolsa, producción de hierro, etc. Para encontrar tales picos en el logaritmo de la serie, es necesario que contengan generalmente una tendencia importante en varianza, cuyo efecto será hacer borroso cualquier pico pequeño en el espectro. La consideración del logaritmo de la serie, con tal que sea positivo, hace cambiar cualquier tendencia en varianza en tendencia en media, que puede eliminarse por los métodos corrientes.

El hecho de que se dé el mismo pico en varias series, puede parecer que incrementa la significatividad estadística, pero, en realidad, sólo es un reflejo del hecho de que la mayor parte de las series económicas siguen las fluctuaciones a largo plazo de la economía en su conjunto. Encontrar tal pico en las series largas, puede indicar que ésta sea una característica auténtica y permanente de la economía.

#### 2.4. APLICACIÓN DEL ESPECTRO MUTUO O CRUZADO EN ECONOMÍA

Comenzamos por dar unas definiciones que utilizamos a continuación.

Consideradas dos series  $\{X_t\}$  e  $\{Y_t\}$  y descompuestas cada una de ellas en componentes  $X_{jt}(\lambda)$  e  $Y_{jt}(\lambda)$ , si fueran estacionarias,  $X_{jt}(\lambda)$  e  $Y_{jt}(\lambda)$  estarían incorreladas. La posible correlación entre las dos series sería debida a la que pudiera existir entre las componentes de frecuencias correspondientes, es decir, entre  $X_{jt}(\lambda)$  e  $Y_{jt}(\lambda)$ . Las correlaciones entre pares de series cronológicas, no tienen por qué ser independientes de la frecuencia y por tal causa no hay razón para que dos componentes a largo plazo estén igualmente correladas que dos componentes a corto plazo.

Se denomina "coherencia" entre dos series cronológicas  $\{X_t\}$  e  $\{Y_t\}$  en una frecuencia  $\lambda$ , a la medida del cuadrado de la correlación

de las amplitudes de frecuencia  $\lambda$  y viene dada por la función real de frecuencia (1)

$$\frac{|\text{espectro mutuo o cruzado de X con Y}|^2}{(\text{espectro de X})(\text{espectro de Y})}$$

Considerado cualquier par de bandas de frecuencia, una de ellas puede estar retardada con relación a la otra, pero este retardo no tiene por qué ser independiente de la frecuencia, ya que si una serie económica está explícitamente retardada con respecto a otra serie económica, el retardo que afecte a las componentes de baja frecuencia (es decir, a largo plazo) será mayor que el retardo que afecta a las componentes de alta frecuencia (a corto plazo). Este fenómeno se representa por el llamado "diagrama fase". Por medio de este procedimiento, se pueden determinar relaciones entre series económicas un tanto complejas y tomar decisiones respecto a ellas.

La "Influencia" entre los espectros de potencia de dos series económicas, se puede considerar como el valor absoluto del coeficiente de regresión complejo en cada frecuencia.

Como sabemos, el espectro mutuo o cruzado, nos permite determinar la relación entre dos series económicas en términos de frecuencia. Se determina por una especie de promedio temporal de todos los datos utilizados para la estimación. Ante una mutación estructural de la economía, lo que implica un posible cambio de la relación existente entre las variables, cabe preguntarse si el espectro mutuo o cruzado estimado de esta forma puede tener una significación importante. Esta duda queda aclarada, ya que si tenemos datos suficientes, podemos considerar una sucesión de subperíodos de observación y por un promedio móvil aplicado a los datos de éstos, se puede determinar una sucesión de espectros mutuos o cruzados de forma continua. La variación de los espectros así obtenidos nos revelaría la mutación estructural. Por otra parte, si no se pudiera formar la sucesión de subperíodos, el espectro mutuo o cruzado referido al período total sería plenamente significativo siempre que la coherencia fuera lo suficientemente alta.

Creemos que se debe utilizar para la estimación la ventana de Parzen y un filtro lineal apropiado para cada tipo de serie, ya que

---

(1) *Spectral Analysis of Time Series* (Edited by B. Harris). John Wiley, 1967.

en teoría todo filtro lineal es un operador identidad respecto a la coherencia, diferencia de fase e inducción.

Suponemos que sería de interés la aplicación del análisis espectral mutuo o cruzado en los casos siguientes:

— Estimación de la coherencia y diagramas fase entre los diversos índices de precios. En base a estudios de este tipo se sabe que es grande la coherencia existente entre los índices de precios de fabricación e índices de precios de transporte y la coherencia es moderada entre los índices de precios de transporte y minería, así como entre fabricación y minería.

— Estimación de la coherencia entre la serie de los tantos de variación mensual monetaria y la serie de los tantos de variación mensual del papel comercial.

— Estimación de la coherencia entre la serie de los tantos de variación de los salarios y la serie de los tantos de variación de la producción.

— Estimación de las diferencias de fase entre la serie del ahorro anual real y la serie de inversión anual real.

— Estimación de la coherencia y diferencia de fase entre las series de consumo anual y renta nacional anual.

— Estimación de la coherencia y diferencia de fase entre las series de gasto público anual e ingreso público anual.

— Estimación de la coherencia y diferencia de fase entre la serie de Balanza Comercial y la serie que expresa la relación real de intercambio.

En alguno de los casos sugeridos anteriormente se puede presentar el problema de que el estimador de la coherencia proporcione un valor negativo o mayor que la unidad, en cuyo dominio dicha función no está definida, esto es debido a que una de las dos series en estudio tiene muy poca potencia en la banda de frecuencia que se considera. En tales casos, se debe considerar que la coherencia es nula, excepto en el caso de que siendo la coherencia superior a 1, ninguna de las potencias espectrales sea despreciable, y entonces se conviene en igualar la coherencia a la unidad.

Finalmente diremos, que procede contrastar los resultados obtenidos al estudiar las series económicas por medio del modelo llamado "camino aleatorio" con respecto a los resultados que se obtuvieran utilizando el análisis espectral, mediante uso adecuado del análisis espectral mutuo o cruzado entre ambos resultados. Entonces, si la coherencia se aproximara a la unidad, significaría que el resultado obtenido mediante el modelo "camino aleatorio" era representativo.

## CAPITULO III

## CONCLUSIONES

Las propiedades muestrales del correlograma presentan problemas inmanejables, debido a la correlación entre los estimadores. Esta correlación depende de la naturaleza del proceso estocástico mismo y, por tanto, es difícil obtener inferencias del correlograma estimado, cuyas propiedades sólo se simplifican asintóticamente. Por el contrario, las propiedades muestrales del espectro estimado son simples y es relativamente fácil deducir estimadores espectrales independientes. Tal ventaja del espectro estimado nos permite, al utilizarlo, deducir inferencias más representativas respecto al proceso subyacente que si empleáramos el correlograma. Respecto a la precisión de la media muestral, se ha visto que es una parte del análisis espectral que resuelve, al menos parcialmente, la cuestión de medir la estabilidad de este promedio muestral.

Existen principalmente cinco tipos de espectros:

- 1) Espectros de una variable.
- 2) Espectros mutuos o cruzados.
- 3) Espectros de orden superior.
- 4) Espectros múltiples y parciales, y
- 5) Espectros de procesos puntuales,

de los que hemos estudiado y aplicado los dos primeros, por ser de mayor interés práctico en economía. Los espectros de mayor orden, sugeridos por J. W. Tuckey, pueden obtenerse mediante la descomposición de los momentos de mayor orden y no de la varianza. El más importante de los mismos es el *bi-espectro*, que resulta de una descomposición del momento de tercer orden. El bi-espectro es útil en el análisis de series cronológicas que son generadas por planes no lineales y cuyos espectros no son, por ello, fáciles de interpretar. Los espectros parciales y múltiples pueden aplicarse a la investigación de las relaciones de regresión de frecuencia entre una salida y varias entra-

das, de la misma forma que los coeficientes de regresión múltiple ordinaria y parcial.

El análisis espectral se utiliza principalmente en estas dos áreas: para

- 1) sugerir modelos significativos de series cronológicas.
- 2) diseñar sistemas lineales.

En el primer caso, el análisis espectral es aconsejable cuando hay presencia de picos; asimismo, en la variación de espectros con variables, de una serie con respecto a otra; cuando existan causas que den lugar a oscilaciones de alta frecuencia en el sistema económico completamente diferentes de las que producen oscilaciones de frecuencia baja, y sea preciso aplicar filtros digitales; en el empleo de bi-espectros para investigar mecanismos no lineales...

En el segundo caso, la relación básica

$$\sigma_2^2 f_{22}(\lambda) = \sigma_1^2 f_{11}(\lambda) G_{12}^2(\lambda)$$

nos indica que, si la entrada en un sistema lineal tiene como densidad espectral  $f_{11}(\lambda)$  entonces, la salida del sistema tiene un espectro que se obtiene multiplicando el espectro de entrada por un factor proporcional al cuadrado de la influencia del sistema. Lo dicho se puede utilizar cuando sea necesaria la elección de  $G_{12}(\lambda)$  para modificar  $f_{22}(\lambda)$ , así como en el diseño de experimentos, con el fin de escoger el mejor tamaño del bloque; en este último caso deberemos proceder de forma que la frecuencia de la onda cuadrada corresponda a aquella frecuencia para la que la densidad espectral sea mínima.

Un problema práctico de considerable importancia que hemos visto puede tratarse por medio de las técnicas espectrales, es la apreciación cuantitativa de los efectos de un procedimiento de ajuste estacional. Conviene tener presente que el ajuste estacional puede producir tres tipos de efectos, además de la eliminación de la estacionalidad, que son:

- 1) eliminación de componentes que no son estacionales.
- 2) introducción de componentes que no son estacionales, y
- 3) deformación de las relaciones temporales entre las series.

Por el contrario, una de las mayores desventajas del análisis espectral es que se trata de una técnica no paramétrica. Es preciso estimar una función total o un conjunto muy grande, de parámetros, en lugar de un número pequeño de éstos, que es, justamente, la técnica usual

de los estadísticos. Puesto que se estiman tantos parámetros, la eficiencia con que podemos estimar uno cualquiera es limitada.

Hemos estudiado la forma del estimador de una función continua, y considerado la "estabilidad" y "resolución" de los estimadores de modo que, después de representados, tomen la forma de la función de que son estimación. Esto permite al investigador deducir estimadores puntuales y le conduce a deducir inferencias respecto a la forma que constituye un conjunto de estimadores puntuales.

También hemos visto que existen varios contrastes estadísticos muestrales para suavizar los resultados. En realidad, las deducciones de la contrastación de hipótesis y de intervalos de confianza no son más que meras formas de ordenar nuestros resultados para, luego, suavizarlos más cómodamente y deducir con facilidad inferencias.

Los ejemplos que hemos elegido son sencillos y constituyen un camino más fácil para familiarizarse con nuestros propósitos de estudio de las series cronológicas.

Respecto a la descripción hecha de las series cronológicas *económicas* en el dominio frecuencia, se puede concluir que éste es un camino interesantísimo para estudiarlas.

En el estudio de los fenómenos económicos, se ha podido comprobar que el modelo de "camino aleatorio" no explica hechos importantes para el economista como por ejemplo, las componentes de baja frecuencia que reflejan las componentes a largo plazo. Por este motivo, tales componentes deben ser analizadas por métodos más rigurosos y técnicas estadísticas más apropiadas, cual son los métodos espectrales.

Se han presentado con frecuencia inconvenientes para el uso de las técnicas espectrales en economía, entre las que citamos el gran número de observaciones requeridas y la no-estacionaridad de las series económicas. Ahora bien, creemos que el número de observaciones disponible por los economistas no impide un análisis satisfactorio de las componentes de frecuencia alta. La carencia del número preciso de datos que nos impide llevar a cabo un estudio adecuado de la parte de más interés para el economista, puede salvarse mediante el uso del moderno método de simulación de series económicas. Por otra parte, nos parece que mucho del supuesto carácter no-estacionario de las series cronológicas económicas puede resolverse con gran facilidad por medio de la técnica de preblanqueo de la potencia alta para frecuencias bajas.

Por tal causa, consideramos de un interés excepcional en economía, la técnica del preblanqueo.

Además, se ha podido comprobar, tanto teórica como prácticamente que al no cambiar rápidamente en el tiempo la estructura económica subyacente en la serie, los resultados obtenidos mediante el uso del análisis espectral son verdaderamente representativos, tanto en el estudio de una serie económica, como en el de las relaciones entre pares de series económicas.

Entre las componentes de frecuencias altas de las series cronológicas económicas que se han estudiado con éxito mediante las técnicas espectrales son destacables las producidas por estacionalidad. Los modelos estacionales estocásticos que cambian lentamente se revelan en el espectro de una serie cronológica económica según una serie de picos para ciertas frecuencias; la anchura de estos picos depende, esencialmente, de la regularidad del modelo estacional, siendo más estrechos y más pronunciados cuanto más regular sea el modelo.

La variación del espectro mutuo o cruzado que permite determinar la relación entre dos series económicas en términos de frecuencia, apreciadas a través de una sucesión de éstas, resultante de la aplicación a una sucesión de subperíodos de observación, nos revelaría una mutación estructural. Si tal sucesión de sub-períodos de observación no existiera, el espectro mutuo referido al período total sería significativo para una coherencia suficientemente alta.

Además, el espectro mutuo o cruzado puede servir como función de contraste de la interpretación del fenómeno económico, mediante el llamado camino aleatorio frente a la interpretación del fenómeno económico mediante el análisis espectral simple.

Finalmente, diremos que en el análisis de cualquier clase de operación de filtrado, tal como el ajuste estacional, se descubre que la función de respuesta de frecuencia estimada, deducida de los estimadores del espectro de la serie original, y el espectro mutuo entre la serie original y la ajustada estacionalmente, proporcionan el método más útil de análisis en economía.



## A P E N D I C E

### TEORIA MATEMATICA PARA EL ANALISIS DE SERIES CRONOLOGICAS

#### 1. REPRESENTACIONES GRÁFICAS

Vamos a considerar los distintos aspectos del diagrama *vector-rotativo* y su representación espectral.

##### 1.1. *Diagrama vector-rotativo*

Una senoide puede representarse por la proyección del vector-rotativo sobre el eje real y sobre el eje imaginario (fig. 1).

Un vector de longitud  $r$  que gira con frecuencia angular (1) constante  $\lambda_0$  radianes/segundo puede ser interpretado en forma vectorial por el número complejo:

---

(1) El parámetro  $\lambda$  se denomina *frecuencia angular* y es igual a la longitud recorrida alrededor de un círculo de radio unidad en la unidad de tiempo.

$$S(t) = r e^{i\lambda_0 t} = r(\cos \lambda_0 t + i \operatorname{sen} \lambda_0 t) \quad [1]$$

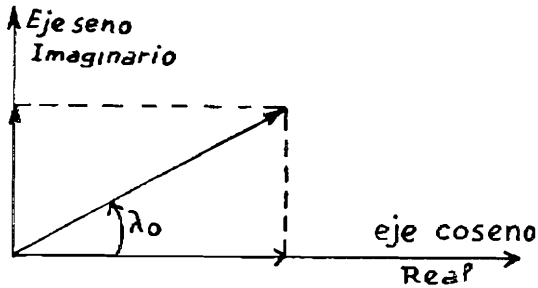


Fig. 1.

Se denomina *componente en fase* del vector a la parte real  $r \cos \lambda_0 t$  y *componente en cuadratura* a la parte imaginaria  $r \operatorname{sen} \lambda_0 t$ .

Una senoide puede también representarse por medio de vectores conjugados. Por ejemplo, una onda coseno puede ser considerada como la resultante de dos vectores conjugados de magnitudes  $r/2$  que giran en direcciones opuestas con frecuencia angular constante  $\pm \lambda_0$  (figura 2).

$$S(t) = \frac{r}{2} [e^{i\lambda_0 t} + e^{-i\lambda_0 t}] = r \cos \lambda_0 t \quad [2]$$

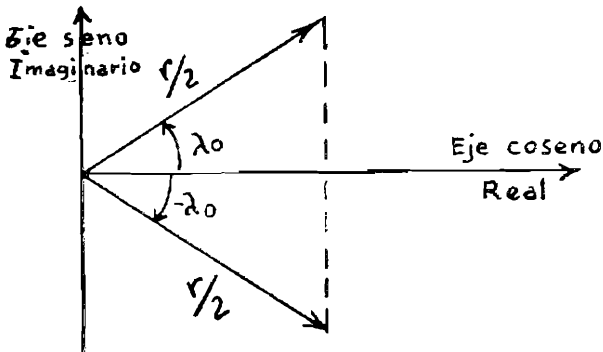


Fig. 2.

De forma análoga, para el seno tendríamos

$$S(t) = \frac{r}{2} [e^{i\lambda_0 t} - e^{-i\lambda_0 t}] = i r \operatorname{sen} \lambda_0 t \quad [3]$$

como indicamos en la figura 3, resultando así como componente en cuadratura  $r \sin \lambda_0 t$ .

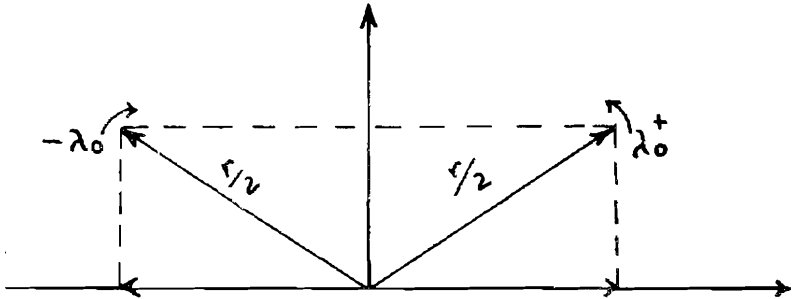
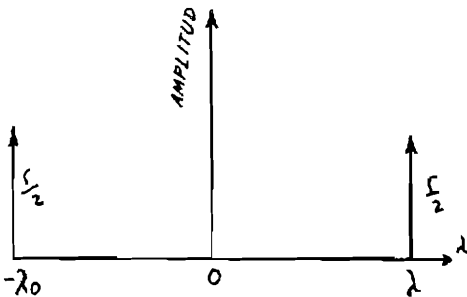
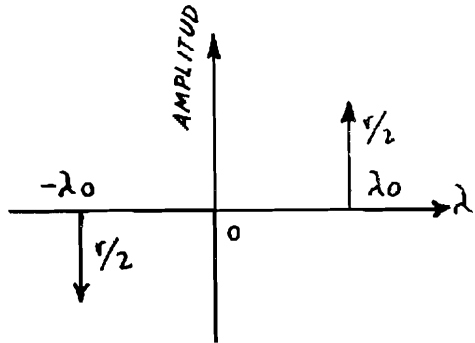


Fig. 3.

### 1.2. Representación espectral de una senoide

Otra de las formas de representar el vector-rotativo es por medio de la característica *frecuencia-espectro*, llevada en una perpendicular al eje de frecuencia. En los casos sinusoidales mencionados anteriormente, su representación gráfica vendría dada por dos líneas espectrales, de forma como se indica en las figuras 4 y 5 respectivamente.

Fig. 4.—Representación espectral de la función  $r \cos \lambda_0 t$ .Fig. 5.—Representación espectral de la función  $r \sin \lambda_0 t$ .

De acuerdo con la figura 4, vemos que la representación asociada a la función  $r \cos \lambda_0 t$  consta de un par simétrico, respecto del eje  $OY$ , de líneas espectrales correspondientes a las frecuencias  $\lambda = \pm \lambda_0$ , con amplitudes iguales a  $r/2$ . La representación asociada a la función  $r \sin \lambda_0 t$  (fig. 5) consta de un par antisimétrico respecto del origen de líneas espectrales correspondientes a las frecuencias  $\lambda = \pm \lambda_0$  con una amplitud  $r/2$ .

Podríamos generalizar lo dicho anteriormente al caso del espectro de una función formada por suma de cierto número de sinusoides  $r_1 \cos \lambda_1 t + r_2 \cos \lambda_2 t + \dots$ . Si las componentes son funciones coseno, el espectro, figura 6, es simétrico respecto a  $OY$ . En el caso componente seno es antisimétrico y su representación será del tipo representado en la figura 7.

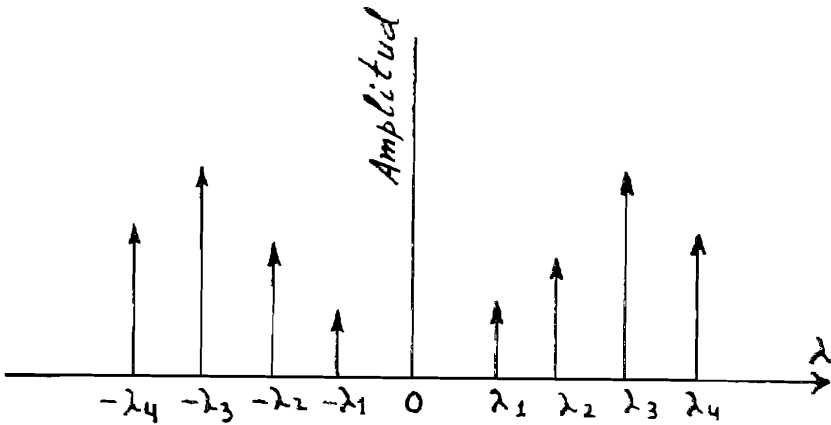


Fig. 6.—Representación del espectro  $\sum_{h=1}^n r_h \cos \lambda_h t$ .

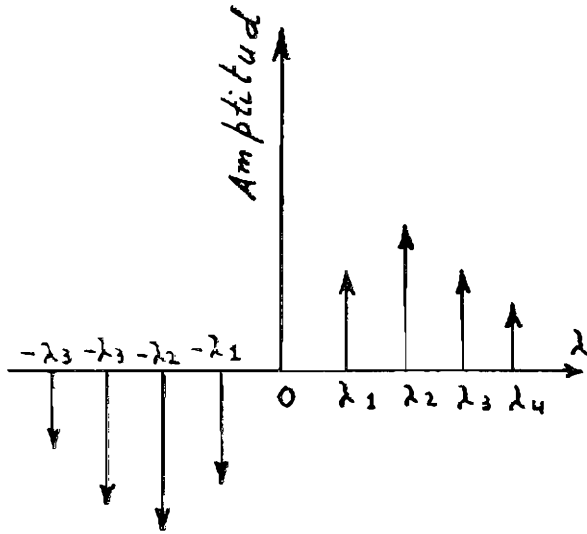


Fig. 7.—Representación del espectro  $\sum_{h=1}^n r_h \text{ sen } \lambda_h t$ .

## 2. SERIES DE FOURIER: ESPECTRO DISCRETO

Si la función periódica de tiempo  $f(t)$  satisface las condiciones de Dirichlet siguientes:

1.  $f(t) = f(t + T)$ , es decir,  $f(t)$  es una función periódica.
2.  $f(t)$  solamente puede tener un número finito de discontinuidades, verificándose

$$\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)| dt < \infty$$

puede representarse en el dominio de las frecuencias por infinitas componentes sinusoidales que constituyen la llamada serie de Fourier de la función  $f(t)$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n \lambda_0 t + b_n \text{ sen } n \lambda_0 t) \quad [4]$$

donde

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad [4.1]$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n \lambda_0 t dt \quad [5]$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \operatorname{sen} n \lambda_0 t dt \quad [6]$$

$\lambda_0 = \frac{2\pi}{T}$  es la frecuencia angular fundamental.

Al dar en la [4.5] el valor  $n = 0$ , se deduce que

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad [7]$$

La amplitud y fase de las componentes de frecuencia vienen dadas por desarrollos en serie de Fourier de la función  $f(t)$ . Para calcular los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$ , por ser  $f(t)$  periódica, es lo mismo integrar en el período  $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$  que en cualquier otro  $(t_0, t_0 + T)$ .

Podemos expresar la función  $f(t)$  en suma de armónicos. Operando en la relación [4], obtenemos

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(n \lambda_0 t - \Phi_n)$$

donde

$$\Phi_n = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b_n}{a_n}$$

En el caso particular de que la función  $f(t)$  sea par o impar, las expresiones del tipo [4] quedan reducidas a una de cosenos o senos respectivamente.

También pueden representarse las series de Fourier como suma de exponenciales:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\lambda_0 t} \\ &= c_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \cos(n\lambda_0 t - \phi_n) \end{aligned} \quad [8]$$

donde

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} (a_n + i b_n) \\ c_{-n} &= \frac{1}{2} (a_n - i b_n) = \bar{c} \quad (\text{complejo conjugado}) \end{aligned}$$

ya que

$$a_{-n} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(-n\lambda_0 t) dt = a_n$$

por ser par la función  $[\cos n\lambda_0 t]$ ; y

$$b_{-n} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(-n\lambda_0 t) dt = -b_n$$

por ser impar la función  $[\sin n\lambda_0 t]$ ; entonces

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\lambda_0 t} dt \quad [9]$$

para

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

El  $c_n$  dado por la expresión [9] en general será complejo y se llama *transformada de Fourier* de la función  $f(t)$ .

El  $c_0 = \frac{a_0}{2}$  es el valor medio de  $f(t)$  en el período  $T$ .

La amplitud del espectro de las componentes de frecuencias viene dada por

$$|c_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad [10]$$

y la fase por

$$\Phi_n = \text{arc tg } \frac{b_n}{a_n} \quad [11]$$

La solución principal de la función periódica  $f(t)$  se puede obtener de la forma siguiente:

$$\text{pral. } f(t) = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt} \quad [12]$$

Esta expresión puede calcularse, teniendo en cuenta la [9]

$$\begin{aligned} \text{pral. } f(t) &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt} \\ &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f(t) \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i n \lambda_0 t} \right] dt} \\ &= \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{i n \lambda_0 t} dt} \\ &= \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n c_{-n}} \\ &= \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2} \\ &= \sqrt{\frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}} \quad [13] \end{aligned}$$



El Teorema de Parseval, expresado por la relación [13] nos dice que el valor principal de una suma de sinusoidales de frecuencias diferentes es independiente de su relación fase, y está determinada solamente por los valores principales de los armónicos. Esto nos indica que la potencia media total  $P_m$  en una función periódica es igual a la suma de las potencias asociadas a las componentes de Fourier individuales.

$$\begin{aligned}
 P_m &= \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt \\
 &= c_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \\
 &= f^2(t) \quad [14]
 \end{aligned}$$

A continuación, citamos algunos ejemplos, que nos interesan, de la aplicación de las series de Fourier al análisis de las ondas periódicas.

#### A. ONDA CUADRADA

La representación de la onda cuadrada de forma simétrica será del tipo indicado en la figura 8, si se toma como origen el centro de la onda. La función correspondiente es par.

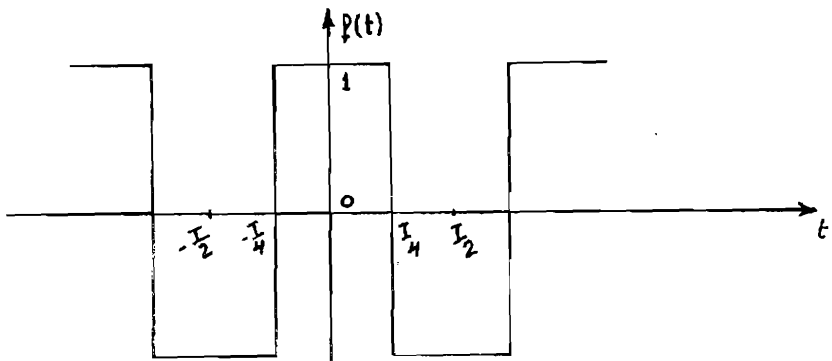


Fig. 8.—Representación de la onda cuadrada de forma simétrica.

$$f(t) = \begin{cases} -1 & -\frac{T}{2} < t < -\frac{T}{4} \\ 1 & -\frac{T}{4} < t < \frac{T}{4} \\ -1 & \frac{T}{4} < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

y

$$f(t + T) = f(t)$$

Por ser la función  $f(t)$  par, y nulo su valor medio, las  $b_n$  son nulas y  $a_0 = 0$ .

Veamos que, en tales casos, las series representantes de  $f(t)$  se reducen a series cosenos.

En efecto,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n \lambda_0 t \, dt \\ &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{-T/4} (-1) \cos n \lambda_0 t \, dt + \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} (+1) \cos n \lambda_0 t \, dt + \\ &\quad + \frac{2}{T} \int_{T/4}^{T/2} (-1) \cos n \lambda_0 t \, dt \\ &= \frac{2/T}{n\lambda_0} \left\{ -[\operatorname{sen} \lambda_0 t]_{-T/2}^{-T/4} + [\operatorname{sen} n \lambda_0 t]_{-T/4}^{T/4} - [\operatorname{sen} n \lambda_0 t]_{T/4}^{T/2} \right\} \\ &= \frac{4}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \end{aligned}$$

y los  $a_n$  serán

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n \text{ par} \\ +\frac{4}{n\pi} & \text{para } n = 1, 5, 9, \dots \\ -\frac{4}{n\pi} & \text{para } n = 3, 7, 11, \dots \end{cases}$$

Así, resultará para la  $f(t)$  la expresión siguiente:

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left[ \cos \lambda_0 t - \frac{1}{3} \cos 3 \lambda_0 t + \frac{1}{5} \cos 5 \lambda_0 t - \dots \right] \quad [15]$$

### B. ONDA TRIANGULAR

Eligiendo convenientemente la situación del origen, la representación vendría dada por la figura 9.

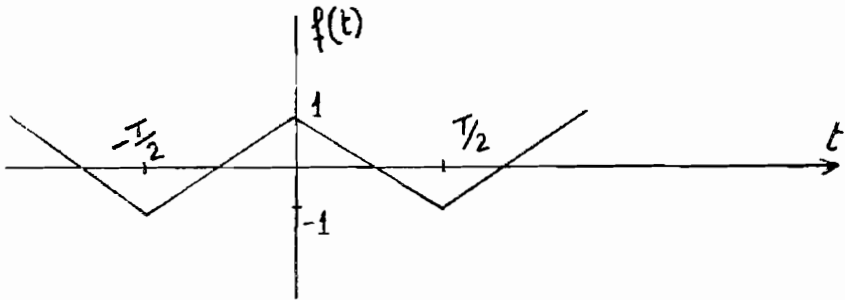


Fig. 9.

y

$$f(t) = \begin{cases} 1 + \frac{4}{T} t & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ 1 - \frac{4}{T} t & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

Puesto que la función  $f(t)$  es par, los  $b_n$  son nulos; y, por ser nulo el valor medio de  $f(t)$ , el  $a_0 = 0$ . Los  $a_n$  vendrán dados por

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n \lambda_0 t \, dt \\ &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 \left( 1 + \frac{4t}{T} \right) \cos n \lambda_0 t \, dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \left( 1 - \frac{4t}{T} \right) \cos n \lambda_0 t \, dt \\
 & = - \frac{16}{T^2} \int_0^{T/2} t \cos n \lambda_0 t \, dt = \frac{4}{\pi^2 n^2} (1 - \cos n\pi)
 \end{aligned}$$

Si damos valores a  $n$ , observamos que la expresión anterior toma la forma.

$$a_n = \begin{cases} \frac{8}{\pi^2 n^2} & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases}$$

y la  $f(t)$  vendrá dada por

$$f(t) = \frac{8}{\pi^2} \left( \cos \lambda_0 t + \frac{1}{3^2} \cos 3 \lambda_0 t + \frac{1}{5^2} \cos 5 \lambda_0 t + \dots \right) \quad [16]$$

#### 4.3. *Correlación, Autocorrelación y Correlación Mutua de Funciones Periódicas*

Consideremos las funciones periódicas  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  de período  $T$ , y sus transformadas de Fourier  $(C_n)_1$  y  $(C_n)_2$  respectivamente. Entonces, se verificará

$$(C_n)_1 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) e^{-in\lambda_0 t} \, dt \quad [17]$$

y

$$(C_n)_2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_2(t) e^{-in\lambda_0 t} \, dt \quad [18]$$

donde

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Fijémosnos ahora en la expresión

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) f_2(t + \tau) dt \quad [19]$$

donde  $\tau$  representa un desplazamiento temporal continuo en el intervalo  $(-\infty, \infty)$ , independiente de  $t$ . La expresión  $R_{12}$  de [19] es de especial interés en el estudio del análisis armónico y recibe el nombre de *Función de Correlación* mutua de las funciones  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$ .

El *teorema de correlación* para funciones periódicas nos dice que la transformada Fourier de  $R_{12}(\tau)$  es  $(\overline{C_n})_1 \cdot (C_n)_2$ , donde por  $(\overline{C_n})_1$  designamos la conjugada de  $(C_n)_1$ .

En efecto,

$$\begin{aligned} R_{12}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) f_2(t + \tau) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_n)_2 e^{in\lambda_0(t+\tau)} \right] dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ (C_n)_2 e^{in\lambda_0\tau} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) e^{in\lambda_0 t} dt \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ (\overline{C_n})_1 \cdot (C_n)_2 \right] e^{in\lambda_0\tau} \end{aligned} \quad [20]$$

Por otra parte, al ser

$$(\overline{C_n})_1 \cdot (C_n)_2 = C_n \quad [21]$$

resulta que la función

$$\begin{aligned} R_{12}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) f_2(t + \tau) dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\lambda_0\tau} \end{aligned} \quad [22]$$

es una función periódica de período  $T$  y con espectro dado por la [21], es decir, [9],

$$\begin{aligned} C_n &= (\overline{C_n})_1 \cdot (C_n)_2 \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_{12}(\tau) e^{-in\lambda_0\tau} d\tau \end{aligned} \quad [23]$$

La relación de Parseval se puede obtener haciendo en [19]

$$f_1(t) = f_2(t) = f(t):$$

$$R_{11}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) f(t + \tau) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 e^{in\lambda_0\tau} \quad [24]$$

y, si luego hacemos  $\tau = 0$ , la [24] se convierte en

$$\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$$

La expresión particular que hemos obtenido en [24] se llama *función de autocorrelación* de  $f(t)$  y se denota  $R_{11}(\tau)$

$$R_{11}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) f(t + \tau) dt \quad [25]$$

El *teorema de autocorrelación* para funciones periódicas nos dice que *la función de autocorrelación y la potencia del espectro de una función periódica son un par de transformadas de Fourier*. Pues, según nos indican las relaciones [26] y [27], obtenidas al llamar  $C_{11}(n\lambda_0)$  a la potencia del espectro  $|C_n|^2$  de la 24 tenemos

$$R_{11}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_{11}(n\lambda_0) e^{in\lambda_0\tau} \quad [26]$$

e, inversamente,

$$S_{11}(n\lambda_0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R(\tau) e^{-in\lambda_0\tau} d\tau = |C_n|^2 \quad [27]$$

De la [24], se deduce que la función de autocorrelación  $R_{11}(\tau)$  es una función par respecto a  $\tau$ , es decir,

$$R_{11}(-\tau) = R_{11}(\tau) \quad [28]$$

lo que nos indica que la serie de Fourier que la representa es una serie de cosenos:

$$\begin{aligned} R_{11}(\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_{11}(n\lambda_0) \cos n\lambda_0\tau \\ &= S(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} S(n\lambda_0) \cos n\lambda_0\tau \end{aligned} \quad [29]$$

y

$$S_{11}(n\lambda_0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R(\tau) \cos n\lambda_0\tau \, d\tau \quad [30]$$

Análogamente, de la definición de función de correlación mutua entre  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$ , se deduce, invirtiendo el orden de las funciones  $f_2(t)$  y  $f_1(t)$

$$R_{21}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_2(t) f_1(t + \tau) \, dt \quad [31]$$

y

$$S_{21}(n\lambda_0) = (\overline{C_n})_2 \cdot (C_n)_1 = S_{12}(n\lambda_0) \quad [32]$$

Luego

$$R_{21}(\tau) = R_{12}(-\tau) \quad [33]$$

Por ser  $R_{12}(\tau)$  una función periódica de la misma frecuencia fundamental que  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  ocurre que

$$R_{12} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_{12}(n\lambda_0) e^{in\lambda_0\tau} \quad [34]$$

y

$$S_{12}(n\lambda_0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_{12}(\tau) e^{-in\lambda_0\tau} d\tau \quad [35]$$

Por otra parte,

$$R_{21}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_{21}(n\lambda_0) e^{in\lambda_0\tau} \quad [36]$$

y

$$S_{21}(n\lambda_0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_{21}(\tau) e^{-in\lambda_0\tau} d\tau \quad [37]$$

Las parejas [34], [35] [36], [37] son pares de transformadas de Fourier para la correlación mutua de dos funciones periódicas de la misma frecuencia fundamental.

#### 4. Transformada de Fourier: Espectro continuo.

Como generalización de la serie de Fourier, en los análisis de sistemas lineales se utiliza la integral de Fourier.

Dada la función de variable real  $t$

$$f(t) = f_1(t) + if_2(t)$$

que satisface la condición

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

se llama transformada de Fourier de  $f(t)$ , y se designa por  $F(i\lambda)$ , a la función definida por

$$F(i\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt \quad [38]$$



Para que esta definición tenga sentido, se precisa que la integral sea convergente.

Se prueba fácilmente que, para las funciones  $f(t)$  periódicas, la integral [38] es divergente, y realmente no tienen transformada Fourier, pero se generaliza la definición, conservando la misma fórmula de definición [38].

Mediante la función "Impulso de Dirac" se llega a una definición generalizada de la que se hablará posteriormente.

Fácilmente se deduce que entre  $f(t)$  y  $F(i\lambda)$  se verifica

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\lambda) e^{i\lambda t} dt \quad [39]$$

La función  $F(i\lambda)$  se llama transformada de Fourier de  $f(t)$  y  $f(t)$  transformada inversa de Fourier de  $F(i\lambda)$ .

En un sistema físico, la  $f(t)$  es una función del tiempo real, y  $F(i\lambda)$  es, en general, una función de variable compleja y puede expresarse de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} F(i\lambda) &= |F(i\lambda)| e^{i\Phi(\lambda)} = a(\lambda) + ib(\lambda) \\ &= c(\lambda) e^{i\Phi(\lambda)} \end{aligned} \quad [40]$$

donde

$$c(\lambda) = \sqrt{[a(\lambda)]^2 + [b(\lambda)]^2} \quad \text{es la amplitud espectral}$$

y

$$\Phi(\lambda) = \text{arc tg } \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} \quad \text{es la fase espectral}$$

En algunas ocasiones, las ecuaciones [38] y [39] se expresan en forma simétrica del modo siguiente:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda \quad [41]$$

$$F(i\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt \quad [42]$$

El par de transformaciones de Fourier [38] y [39] se puede también expresar así:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [a(\lambda) \cos \lambda t - b(\lambda) \operatorname{sen} \lambda t] d\lambda + \\
 &+ \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [a(\lambda) \operatorname{sen} \lambda t + b(\lambda) \cos \lambda t] d\lambda \quad [43]
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 F(i\lambda) &= a(\lambda) + ib(\lambda) = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos \lambda t - i \operatorname{sen} \lambda t] dt \quad [44]
 \end{aligned}$$

Al identificar en estas ecuaciones partes reales e imaginarias, obtenemos:

$$a(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda t dt \quad [45]$$

y

$$b(\lambda) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{sen} \lambda t dt \quad [46]$$

Por ser par la función coseno e impar la función seno, se verifica

$$\begin{aligned}
 a(-\lambda) &= a(\lambda) \\
 b(-\lambda) &= -b(\lambda) \\
 F(-i\lambda) &= \overline{F(i\lambda)}
 \end{aligned}$$

Así pues, para  $f(t)$  real la  $a(\lambda)$  es par; la  $b(\lambda)$  es impar; y, además,

$$F(-\lambda) = \overline{F(\lambda)}$$

La ecuación [33] en tal caso se convierte en

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [a(\lambda) \cos \lambda t - b(\lambda) \operatorname{sen} \lambda t] d\lambda \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [a(\lambda) \cos \lambda t - b(\lambda) \operatorname{sen} \lambda t] d\lambda \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} c(\lambda) \cos [\lambda t + \Phi(\lambda)] d\lambda
 \end{aligned} \tag{47}$$

Si la función  $f(t)$  fuera *par*, de las ecuaciones [4.45] a [4.47] obtendríamos

$$\begin{aligned}
 a(\lambda) &= 2 \int_0^{\infty} f_p(t) \cos \lambda t dt \\
 b(\lambda) &= 0 \\
 f_p(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} a(\lambda) \cos \lambda t dt
 \end{aligned} \tag{48}$$

Es decir, la transformada compleja se reduce a una función real de  $\lambda$ .

Si la función  $f(t)$  fuera *impar*, tendríamos

$$f_{\text{impar}}(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} b(\lambda) \operatorname{sen} \lambda t d\lambda \tag{49}$$

o sea: la transformada  $F(i\lambda)$  se convierte en imaginaria pura.

#### 4.1. Propiedades generales de la Transformada de Fourier

Vamos a estudiar algunos teoremas de las funciones

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda$$

$$F(i\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t} dt$$

y su significación física.

#### A) TEOREMA DE LA SUMA

Si  $F_1(i\lambda)$  y  $F_2(i\lambda)$  son las transformadas de Fourier de  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  respectivamente, entonces

$$f_1(t) + f_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [F_1(i\lambda) + F_2(i\lambda)] e^{i\lambda t} d\lambda \quad [50]$$

relación que nos indica que *el espectro de la suma de dos ondas es igual a la suma de sus espectros individuales.*

#### B) TEOREMA DEL DESPLAZAMIENTO

Si

$$F(i\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t} dt,$$

entonces

$$F(i\lambda)e^{\pm i\lambda t_0} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t \pm t_0)e^{-i\lambda t} dt \quad [51]$$

En efecto:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\lambda)e^{\pm i\lambda t_0} e^{i\lambda t} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\lambda)e^{i\lambda(t \pm t_0)} d\lambda$$

En el aspecto físico, nos indica que, *si el espectro se modifica debido a una entrada  $e^{i\lambda_0 t}$ , entonces la función de tiempo correspondiente es perturbada en  $t_0$*  (1).

Análogamente, si

$$F(i\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t} dt$$

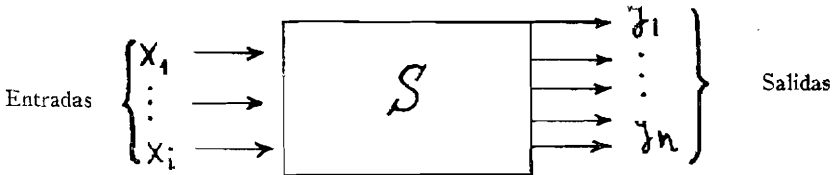
entonces

$$F(i\lambda \pm \lambda_0) = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)e^{\pm i\lambda_0 t}] e^{-i\lambda t} dt \quad [52]$$

Como consecuencia de la [4.52] se obtienen las siguientes transformadas de Fourier

$$\begin{aligned} \text{La de } f(t) \cos \lambda_0 t \text{ es } & \frac{F[i(\lambda - \lambda_0)] + F[i(\lambda + \lambda_0)]}{2} \text{ y la de} \\ f(t) \sin \lambda_0 t \text{ es } & \frac{F[i(\lambda - \lambda_0)] - F[(\lambda + \lambda_0)]}{2i}. \end{aligned}$$

(1) Nos referimos a la entrada a un sistema, entendiendo por tal, un conjunto dinámico; es decir, susceptible de evolución o modificación, compuesto de partes, sometido a una situación donde recibe estimulaciones o "entradas" del sistema (inputs) y emite respuesta o "salidas" (outputs) a estas estimulaciones. En cada instante, un sistema está caracterizado por su estado, es decir, el conjunto de entradas y salidas en ese instante. Véase figura adjunta:



## C) TEOREMA DE DUALIDAD

Si

$$F(i\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t} dt$$

entonces

$$f(\pm i\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F[\mp t]e^{-i\lambda t} dt \quad [53]$$

Es decir, si el espectro de  $f(t)$  es  $F(i\lambda)$ , entonces el espectro de  $F(\pm t)$  es  $2\pi f(\mp i\lambda)$ ; y, si la señal de  $F(i\lambda)$  es  $f(t)$ , entonces la señal de  $f(\pm i\lambda)$  es  $\left(\frac{1}{2} \pi\right) F(\mp t)$ .

## D) INTEGRALES SENO Y COSENO FOURIER

Teniendo en cuenta la definición de transformada de Fourier, se deduce fácilmente

$$\frac{1}{2} [F(i\lambda) + F(-i\lambda)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda t dt \quad [54]$$

$$\frac{1}{2} [F(i\lambda) - F(-i\lambda)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{sen} \lambda t dt \quad [55]$$

Vamos a citar unos ejemplos con el fin de ilustrar la aplicación de las transformadas de Fourier y llevar a cabo las representaciones gráficas correspondientes en el dominio, tiempo y frecuencia respectivamente.

A) Comenzamos con la llamada *señal rectangular*.

La señal rectangular viene definida de la forma siguiente:

$$f(t) = \begin{cases} V & -\tau/2 < t < +\tau/2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Las figuras 10 y 11 son representación de la señal rectangular y de su espectro, respectivamente.

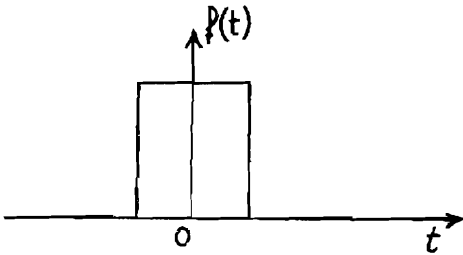


Fig. 10.

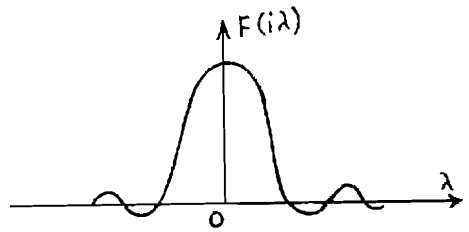


Fig. 11.

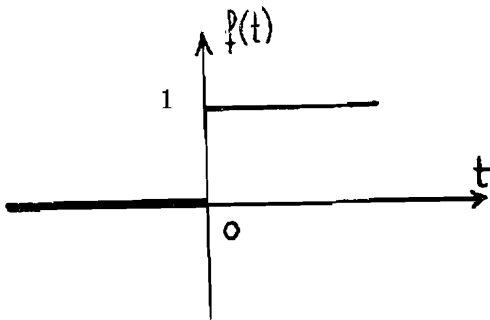
En este caso, se verifica

$$\begin{aligned}
 F(i\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t} dt \\
 &= V \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-i\lambda t} dt \\
 &= V\tau \frac{\text{sen}(\lambda\tau/2)}{\lambda\tau/2}
 \end{aligned}$$

## B) FUNCIÓN ESCALÓN UNIDAD

La función escalón se define así

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



Debido a que esta función no satisface la condición de Dirichlet

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| < \infty$$

calcularemos primero el espectro frecuencia para

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < T \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y después la aproximaremos a la función escalón, haciendo que  $T$  crezca indefinidamente:

$$\begin{aligned} F(i\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t} dt \\ &= \int_0^T e^{-i\lambda t} dt \\ &= \frac{1}{i\lambda} (1 - e^{-i\lambda T}) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \hat{f}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{i\lambda} (1 - e^{-i\lambda T}) e^{i\lambda t} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{i\lambda} e^{i\lambda t} d\lambda - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{i\lambda} e^{i\lambda(t-T)} d\lambda \end{aligned}$$

### C) FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN GAUSSIANA

La forma general para el caso de una variable es

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-t^2/2\sigma^2} \quad [56]$$



$$\begin{aligned}
 F(i\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t} dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t^2/2\sigma^2 + i\lambda t)} dt \\
 &= \frac{e^{-\lambda^2\sigma^2/2}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1/2\sigma^2)(t + i\lambda\sigma^2)^2} dt \quad [57]
 \end{aligned}$$

donde, haciendo el cambio

$$\frac{1}{\sqrt{2}\sigma} (t + i\lambda\sigma^2) = y,$$

tenemos

$$F(i\lambda) = \frac{e^{-\lambda^2\sigma^2/2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = e^{-\lambda^2\sigma^2/2} \quad [58]$$

De aquí se deduce que el espectro de una función de tiempo gaussiana es una función de frecuencia, pero, dada la situación en que se encuentra el  $\sigma^2$  en cada una de las funciones, resulta que a una función de tiempo estrecha  $f(t)$  le corresponde un espectro ancho. Para el caso límite en que  $\sigma$  tienda a cero, la  $f(t)$  tiende a la *Función Delta o Impulso*, es decir,

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} f(t, \sigma) = \delta(t)$$

## 5. Generalidades sobre procesos estocásticos

En este apartado, describiremos brevemente la teoría de las funciones aleatorias estacionarias y daremos algunos ejemplos en los que se hace patente la simplicidad que la función de densidad espectral ofrece para la caracterización de los procesos estocásticos.

El Cálculo de Probabilidades estudia variables aleatorias de número finito de dimensiones. Los modelos obtenidos a partir del cálculo de Probabilidades clásico no permitían estudiar ciertos fenómenos de características dinámicas, tales como la evolución aleatoria de un sistema en el transcurso del tiempo. Por ejemplo, en un almacén de ventas, la evolución del número de clientes presentes en el almacén en un determinado intervalo de tiempo, o las cantidades de agua de un río en el curso de un día, etc.

En cada uno de los ejemplos citados anteriormente, se está en presencia de un *sistema* que evoluciona en el tiempo de forma aleatoria; lo que quiere decir que el sistema está en cada instante en un cierto *estado* y que la sucesión de estados tomados por el sistema y señalados sobre una escala de tiempos cronológicamente está descrita por una ley de probabilidad. Los modelos matemáticos asociados a tales fenómenos se llaman *procesos estocásticos*. La definición en probabilidad y el estudio de estos modelos se enfrentan con numerosas y muy serias dificultades teóricas y prácticas.

Definimos un *proceso estocástico*  $\{X(t), t \in T\}$  como una familia de variables aleatorias indizadas, con un parámetro continuo  $t$  que toma todos los valores del conjunto  $T$ . Para nuestros propósitos vamos a considerar que  $t$  representa el tiempo.

Una *serie cronológica* puede venir definida como el comportamiento observado de un proceso estocástico durante un intervalo de tiempo arbitrario.

Denominamos *realizaciones* a las líneas que se obtienen de observar los correspondientes procesos estocásticos, constituidas por observaciones ordenadas cronológicamente y registradas en intervalos de tiempo de forma continua o discreta.

Uno de los objetivos del estudio de las series cronológicas es la predicción del futuro basada en el conocimiento completo del sistema y en el conocimiento parcial o total del pasado de una serie cronológica; en otros casos, la meta puede ser el control de una serie en la extensión que la estructura de probabilidad permita, en base a una cantidad limitada de información, como la que proporciona una serie cronológica de longitud finita; se necesita hacer inferencias en base al mecanismo de probabilidad que produce la serie y, luego, analizar su estructura fundamental.

Generalmente, para dominio de  $T$  se toma el conjunto de los números reales  $-\infty < t < \infty$  y, en tal caso, a la función aleatoria  $X(t)$  la llamaremos *proceso estocástico*; en los casos en que  $T$  comprenda solamente a los números enteros positivos y negativos, a la  $\{X(t)\}$  la llamaremos *sucesión estocástica*.

En la teoría de los procesos estocásticos, podemos considerar dos clases muy generales de procesos: los estacionarios y los evolutivos. Intuitivamente, un proceso estacionario es aquel cuya distribución permanece la misma al variar el tiempo, debido a que el mecanismo aleatorio que produce el proceso no cambia, al cambiar el tiempo. Un proceso evolutivo es el no estacionario.

Para establecer una definición más formal de estacionariedad, introducimos la noción de conjunto índice lineal.

Un conjunto índice  $T$  se llama lineal si tiene la propiedad de que la suma  $t + \tau$ , de todo par de elementos  $t$  y  $\tau$  de  $T$ , también pertenecen a  $T$ .

Un proceso estocástico  $\{X(t), t \in T\}$ , cuyo conjunto índice  $T$  es lineal, es

1) estrictamente estacionario de orden  $K$ , donde  $K$  es un entero positivo dado, si para todo grupo de  $K$  puntos  $t_1, t_2, \dots, t_K$  pertenecientes a  $T$ , y todo  $\tau \in T$ , los vectores aleatorios  $K$ -dimensionales

$$\left[ X(t_1), \dots, X(t_K) \right], \left[ X(t_1 + \tau), \dots, X(t_K + \tau) \right]$$

están idénticamente distribuidos.

2) estrictamente estacionario si para todo entero  $K$  es estrictamente estacionario de orden  $K$ .

El estudio de los procesos estrictamente estacionarios exige matemáticas sofisticadas, y su interés práctico es mucho menor que el de los que definimos a continuación.

Un proceso estocástico  $\{X(t), t \in T\}$  se llama estacionario covariante, débilmente estacionario o estacionario de segundo orden, si posee momentos de segundo orden finitos, su conjunto índice  $T$  es lineal, la covarianza  $d(t_1, t_2)$  es función únicamente de la diferencia absoluta  $|t_1 - t_2|$  y si coincide con la función  $R_{11}(\tau)$ , llamada función de autocorrelación de  $\{X(t)\}$

$$R(\tau) \equiv E[X(t) X(t + \tau)]$$

El analista rara vez conoce la función de distribución de probabilidad conjunta que caracteriza al proceso. Por ello, centra su atención frecuentemente en los procesos estocásticos estacionarios covariantes, tipo de proceso al que se exige un número de requisitos muy inferior que a los procesos estacionarios en sentido estricto y que suministran la información por medio de una dependencia lineal.

Si consideramos el proceso estocástico covariante con media cero y varianza  $\sigma^2$ , los momentos de segundo orden constituyen la llamada *función de autocorrelación*.

$$\begin{aligned} R_{11}(\tau) &= E[X(t) X(t + \tau)] \\ &= \sigma^2 \rho(\tau) \end{aligned} \quad [59]$$

$$0 \leq \tau \leq \infty \quad \text{y} \quad -\infty \leq t \leq \infty$$

pues se verifica

$$\rho(\tau) = \frac{R(\tau)}{R(0)} = \frac{\mu_{11}}{\sqrt{\mu_{20}\mu_{02}}} = \frac{E[X(t) X(t + \tau)]}{\sqrt{\sigma^2\sigma^2}}$$

y, por tanto,

$$\sigma^2 \rho(\tau) = E[X(t) X(t + \tau)],$$

donde la función  $\rho(\tau)$  ó *coeficiente de autocorrelación* nos mide la dependencia lineal del proceso  $\{X(t)\}$  y su pasado.

Los momentos de segundo orden se expresan bajo las formas siguientes:

$$R(\tau) = E[X(t) X(t + \tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(t) X(t + \tau) d\rho[X(t + \tau)] \quad [60]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X(t) d\rho[X(t)] \int_{-\infty}^{\infty} X(t + \tau) d\rho[X(t + \tau)/X(\tau)] \quad [61]$$

donde la [60] nos da los momentos de segundo orden en función de la probabilidad conjunta; la [61], en términos de las denominadas medias fase; y la [62], en función de las medias temporales

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) X(t + \tau) dt \quad [62]$$

Cuando en los procesos estocásticos covariantes se verifica:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T E \left\{ \left[ X(t + \tau + \nu) X(t + \tau) - R_{11}(\nu) \right] \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[ X(t + \nu) X(t) - R(\nu) \right] \right\} d\tau = 0$$

las medias temporales convergen en probabilidad a las medias fase.  
La función

$$R_{12}(\tau) = E \left[ X_{1k}(t) X_{2k}(t + \tau) \right]$$

se denomina *función de correlación mutua* entre los procesos  $\{X_{1k}(t)\}$  y  $\{X_{2k}(t)\}$ .

## BIBLIOGRAFIA

- ALCAIDE, A.: *Conferencias de Econometría y métodos Estadísticos I. N. E.* Madrid, 1963.
- ANDERSON, T. W.: (1) "On the theory of testing serial correlation", *Skandinavisk Aktuarietidskrift*. 31, 88-116 (1948).  
(2) *Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, New York, 1958.
- ARNAIZ, G.: *Introducción a la Estadística Teórica*. Lex nova, Madrid, 1965.
- BARTLETT, M. S.: (1) "On the theoretical Specification and sampling properties of autocorrelated time series", *Supple. J. Roy. Statist. Soc.*, 8 (1946), 27-41.  
(2) "Periodogram analysis and continuous spectra", *Biometrika*, 37 (1950), 1-16.  
(3) *Stochastic Processes*, Cambridge, 1955.
- BLANC-LAPIERRE, A. and FORTET, R.: *Theorie des donctions aléatoires*, París, 1953.
- BLACKMAN, R. B. and TUCKEY, J. W.: *The Measurement of Power Spectra*, New York, 1958.
- CASTAÑEDA, J.: *Lecciones de Teoría Económica (Consumo, Producción, Precios y Rentas)*, Madrid, 1965.
- CRAMER, H.: (1) "On the Theory of Stationary random processes", *Ann. of Math.* vol. 41 (1940), 215-230.  
(2) "On harmonic analysis in certain functional spaces". *Ark. Mat. Astr. Fys.*, 28B (1942).  
(3) *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton, 1946.  
(4): "A contribution to the theory of strodastic processes". *Proc. Second Berkeley Symposium on Math. Stat. and Probability*, Berkeley, 1951, pp. 329-339.
- DAVIS, H. T.: *The Analysis of Economic Time Series*. Bloomington, Illinois: The Principia Press, 1941.
- BOOB, J. L.: *Stochastic Processes*. New York, 1952.
- DURBIN, J.: (1) "The fitting of time-series models". *Rev. Insti. Int. Statis.* 28; 3, 233. (1950).

- (2) "Efficient estimation of parameters in moving average models". *Biometrika*, Vol. 4, pp. 306-316 (1959).
- FISHER, R. A.: "Tests of significance in harmonic analysis". *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, 125, 54-59 (1929).
- FREIBERGER, W., M. ROSEMBLATT and J. VAN NESS: "Some approximate distributions of cross-spectral estimates for gaussian processes". Report DA-SC-78130/13, Division of Applied Mathematics, Brown University, January 1962.
- GOODMAN, N.: "On the joint estimation of the Spectra, cospectrum and quadrature spectrum of a two dimensional Stationary Gaussian process". Scientific Paper NO. 10, Engineering Statistics Laboratory New York University, 1957.
- GRANGER, C. W. J.: (1) First report of the Princeton economic time series project". *L'industria*, 194-206 (1961).  
 (2): The effect of varying month-length on the analysis of economic time series". *L'industria*, No. 1, 41-53 (1963).  
 (3): *Spectral Analysis of Economic Time Series*. 1964.
- GRENNANDER, U.: (1) "Stochastic processes and statistical inference". *Ark. Mat.* 1, 195-277 (1950).  
 (2) "On empirical Spectral analysis of Stochastic processes". *Ark. Mat.* 1, 503-531 (1951).  
 (3) "Some non linear problems in probability theory", *Probability and Statistics (The Harald Cramer Volume)*, ed. by U. Grenander, Stockholm and New York, 1959.
- GRENNANDER, U. and ROSENBLAT, M.: (1) "On Spectral analysis of stationary time series". *Proc. Mat. Acad. Sci. U. S. A.*  
 (2) "Statistical Spectral analysis of time series arising from stationary Stochastic processes". *Ann. Math. Statistical.*  
 (3) "Comments on Statistical Spectral analysis Skand". *Aktuarietid.*, 3, 182/202 (1953).  
 (4) "Some problems in estimating the Spectrum of time". *Proc. Third. Berkeley Symposium.*  
 (5) *Statistical Analysis of Stationary Time Series*. New York, (1957).
- HALMOS, P. R.: *Measure Theory*, New York, 1950.
- HANNAN, E. J.: "The estimation of seasonal variation". *Australian J. Statist.*, 2, 1-15 (1960).
- HANNAN, E. J.: *Time Series Analysis*. London, 1960.
- HELSON, H. and LOWDENSLAGER, D.: "Prediction Theory and Fourier. Series in Several variables". *Acta Math.*, 99, 165-202 (1958).
- JENKINS, G. M.: "An example of the estimation of a linear open loop transfer function". 1963.

- KOLMOGOROFF, A.: "Sur l'interpretation et extrapolation des suites stationnaires". C. R. Acad. Sci. Paris. Vol. 208, pp. 2043-2045 (1939).
- KENDALL, M. G.: (1) *The Advanced Theory of Statistics*. Vol. II, London, 1946.  
 (2) "Studies in Oscillatory Time Series". Cambridge, 1946.
- LASHERAS, A.: *Teoría Matemática del Seguro*. Dossat, Madrid, 1948.
- MALINVAUD, E.: "Estimation et prevision dans les modèles économiques autorékressifs". Rev. Inst. Statist. 29.2. No. 1 (1961).
- MATTHEWS (R. C. O.): *Ciclo Económico*. Sociedad de Estudios y Publicaciones. Madrid, 1966.
- MORGENSTERN, O.: *International Financial Transactions and Business Cycles*. Princeton, 1959.
- PARZEN, E.: (1) "On consistent estimates of the spectrum of a Stationary time series". Ann. Math. Statist., 28, 329-348 (1957).  
 (2) "Statistical inference on time Series by Hilbert Space Methods, I. Depart. of Statis., Stanford University, Technical Report No. 23 (1959).  
 (3) "Mathematical Considerations in the estimation of Spectra". Tech. Report. 3, Stanford University Statistics Lab. (1960).  
 (4) "Regression analysis of continuous parameter time series". Proc. Fourth Berkeley Symp. Prob. Math. Statist. I, University of California Press (1961).  
 (5) "An approach to time series analysis". Ann. Math. Statist. 32, 951-989 (1961).
- QUENOUILLE, M. H.: "*The analysis of multiple time series*". London: Charles Griffin and Co., New York (1957).
- RICE, S. O.: "Mathematical analysis of random noise". Bell System Technical Journal, 23; pp. 282-332 (1944), and pp. 46-156 (1956).
- ROSENBLANTT, M.: "Statistical analysis of Stochastic processes". Probability and Statistics (The Harald Crámer Volume). Ed. U. Grenander, Stokholm: Almqvist-Wiksell pp. 246-275 (1959).
- RUDRA: "A method of discrimination in time series analysis". Sankya, Vol. 15, pp. 9-34 (1955).
- SLUTSKY, E.: "The summation of random causes the source of cyclic processes". Econométrica, 5, 105 (1927-1937).
- TINBERGEN, J.: (1) *An econometric approach to business cycle problems*. Paris: Hermaum et Cie (1937).  
 (2) "Statistical testing of business cycle theories. II Business cycles in the United States of America, 1919-1932". Geneva: League of Nations, 1939.  
 (3) "*Business Cycles in the United Kingdom, 1870-1914*". Amsterdam: North Holland Second Edition, 1956.



- (4) "Econometric business cycles research". *Rev. Econ. Studies*, 7, 73-90 (1940).
- TROCONIZ, A. FDZ. DE: *Estadística Teórica*, Bilbao, 1966.
- TUCKEY, J. W.: "An introduction to the measurement of Spectra", in *Probability and Statistics*, ed. by U. Grenander. Stockholm (1959).
- TUCKEY, J. W.: "The estimation of (power) Spectra and related quantities", in *On Numerical approximation*, ed. by R. E. Langer, Madison, Wisconsin (1959).
- TUCKEY, J. W.: "A Survey of Sampling from Contaminated distributions", *Contributions to Probability and Statistics*, ed. by I. Olkin et al.: Stanford (1960).
- VEGAS, A.: (1) *Matemática para Economistas*, Dossat (1948).  
(2) *Estadística Actuarial* (próxima a aparecer), Madrid.
- WIENER, N.: "The Theory of prediction". *Modern Mathematics for Engineers* (Series 1) ed. by E. F. Beckenback (1956).
- WHITTLE, P.: *Hypothesis Testing in Times Series Analysis*. Uppsala (1951).
- WHITTLE, P.: *Appendix to Second edition of Stationary Time Series*, by H. Wold, Stockholm (1954).
- WIENER, N.: *The Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series*. New York (1949).
- WOLD, H.: *Time Series and demand analysis*. *Sankhya*, 11, 205-216 (1951).  
(2) *Stationary Time Series*. Second Edition, 1954. Stockholm.