«El problema de las reservas técnicas en los seguros no-vida (*)

Dr. Hans BUHLMANN

1. El propósito de este trabajo

Antes de hablar de propósito, deberíamos de comentar sobre el título. Hemos debatido sobre si hablar de «reservas en los seguros no-vida» o de «reservas en los seguros de accidentes». El intento descrito aquí es válido, posiblemente con algunas modificaciones menores, para todos los seguros no-vida. De otro lado, una base sólida para la reserva de siniestros es necesaria, sobre todo, en los negocios estadísticamente descritos como de cola larga. De aquí que nosotros hayamos decidido restringir nuestra atención a los seguros de accidentes, entendiendo por tales los que se describen en el lenguaje americano como «casualty», lo que nos permite, además, como un beneficio adicional, el usar la terminología estándar común en este sector de la industria del seguro.

Desde los tempranos días del seguro de vida, ha sido entendido que «reservas para pagos futuros por siniestros» (menos recepción futura de primas) tenían que ser calculadas a partir de un modelo probabilístico, describiendo el proceso de la muerte dentro de una población específica. William Morgan (1) ya había hecho tales valoraciones en 1786. Así los cálculos de tales reservas han sido desde entonces un problema principal, sino el problema central, dentro de las labores del actuario de vida. Es bastante extraño que, cuando los actuarios fueron solicitados para poner su habilidad a disposición en el campo de los seguros no-vida, no encontraron necesario tener un modelo probabilístico para la determinación de

(*) Conferencia pronunciada por el autor en el Instituto de Actuarios Españoles el día 14-4-1980. Versión castellana de Zntonio Pardo-Vivero.

La versión original fue publicada por el Boletín de la Asociación de Actuarios Suizos.

las reservas de siniestros. De Vylder (2) es la excepción de la regla, ya que él mismo escribe: «En este artículo, nosotros adoptamos un intento más bien determinístico, pero creemos que el modelo total puede ser probabilizado.» También hemos notado el artículo por Hachemeister (3) en los «Proceedings» del XXI Congreso Internacional de Actuarios. La razón para justificar la ausencia de modelos probabilísticos, conduciendo a técnicas de cálculo de reservas en los seguros de accidentes, puede ser explicada (a cierto nivel), por la moda común en este campo, de suponer que el importe del siniestro individual ocurre súbitamente, incluso si en la práctica puede ser demorado parcialmente, durante largos períodos de tiempo. Este trabajo hace excepción a esta moda y modela el importe del siniestro individual, como un proceso estocástico en el tiempo. Las reservas de siniestros pueden ser así calculadas partiendo de este modelo.

2. El importe del siniestro individual

Sea ${}^{m}Z_{ij}^{(k)}$, el *importe del siniestro individual* que se origina por el siniestro k-ésimo del año de accidenge j (año de ocurrencia j).

El índice superior izquierda (es decir, m) indica el año (llamado el «año de comunicación») en que el siniestro ha sido comunicado por primera vez; el índice primero inferior, a la derecha (es decir, i) corresponde al año de desarrollo.

Se sigue la siguiente convención en cuanto a la numeración:

— El «año de accidente» es un elemento del conjunto (1, 2, 3, 4, 5, ..., n) o, en el «ejemplo estándar», del conjunto (1970, 1971, ..., 1979),

— El «año de comunicación» es un elemento del conjunto (1, 2, 3, ...),

— El «año de desarrollo» es también un elemento del conjunto (1, 2, 3, ...);

con la interpretación que, la numeración del año de comunicación y también aquélla del año de desarrollo, empieza por 1, en el año de ocurrencia del siniestro individual.

En el año de accidente j, N_j, representa el número de siniestros individuales que ocurren. Tomemos uno de ellos, es decir, uno con el número k. La variable $T_j^{(k)}$ indica el año en que este siniestro es comunicado por primera vez. Si $T_j^{(k)}$ toma valores dentro de $m \in N$, entonces este siniestros genera una corriente de pagos:

$$\left({}^{m}Z_{ij}^{(k)}\right)_{i \geqslant m} \cdot {}^{m}Z_{j}^{(k)} = \lim_{i \to \infty} {}^{m}Z_{ij}^{(k)},$$

que denota el *importe del pago final* correspondiente a este siniestro. Obviamente, la serie es escrita como una serie infinita, solamente por conveniencia matemática, y el límite definiendo el importe final del siniestro se alcanza después de un número finito de años (por ejemplo, diez años).

3. Cantidades derivadas: Total conocido de los siniestros Total final de los siniestros

En el fin de año de desarrollo, i, tenemos como «*Total conocido de los siniestros*» (para el final del año de desarrollo, i):

$$X_{ij} = \sum_{m=1}^{i} \sum_{m=1}^{N_j} I[T_j^{(k)} = m]\ {}^{m}Z_{ij}^{(k)} \doteq \sum_{m=1}^{i} {}^{m}X_{ij}$$

donde:

$$I_A \doteq \begin{cases} 1, & \text{si ocurre } A \\ 0, & \text{si } \textit{no ocurre } A \end{cases}$$

y donde:

$${}^{m}X_{ij} = {}^{N_j}\sum^{k=1} I\ [T_j^{(k)} = m]\ {}^{m}Z_{ij}^{(k)}$$

Total final de los siniestros

$$X_j = \sum_{m=1}^{\infty} {}^{N_j}\sum^{k=1} I\ [T_j^{(k)} = m]\ {}^{m}Z_j^{(k)} \doteq \sum_{m=1}^{\infty} {}^{m}X_j$$

donde

$${}^{m}X_j \doteq {}^{N_j}\sum^{k=1} I\ [T_j^{(k)} = m]\ {}^{m}Z_j^{(k)}.$$

Nuestro interés estará concentrado en la diferencia entre el «Total final de los siniestros» y el «Total conocido de los siniestros». En esencia, el propósito final de este trabajo, es el de evaluar esta diferencia. Permítasenos llamarle «Ajuste correspondiente al total de los siniestros».

Ajuste correspondiente al total de los siniestros (para el final del año de desarrollo i)

$$Y_{ij} = X_j - X_{ij} = \sum_{m=1}^{i} ({}^{m}X_j - {}^{m}X_{ij}) + \qquad \Gamma_{ij}$$

Γ_{ij} es usualmente llamado el ajuste para «siniestros ocurridos pero no suficientemente comunicados» (OPNSC).

Δ_{ij} es comunmente conocido como el ajuste para «siniestros ocurridos pero no comunicados» (OPNC).

Sin embargo, en la práctica (pero no en este trabajo) «siniestros courridos pero no comunicados», es algunas veces también utilizado como sinónimo para el «ajuste correspondiente al total de los siniestros».

El espíritu de nuestra descripción, es de tipo probabilístico (como indicado en el título de la sección n.º 1). De aquí que todas las cantidades descritas mediante letras mayúrculas Z, X, A, Γ, Δ, introducidas hasta ahora, tienen que ser interpretadas como variables estocásticas. En particular Y_{ij}, para todo i y j, son variables estocásticas. En la sección siguiente describiremos nuestras asunciones, en lo que se refiere a las leyes de probabilidad que gobiernan estas variables estocásticas.

4. Las asunciones básicas probabilísticas

Naturalmente, hay muchas estructuras de probabilidad diferentes, que uno puede proponer. La elección que nostros hemos hecho, es el resultado de nuestra lucha para combinar la intuición, con la conveniencia matemática. Algunas de las hipótesis de base podrían ser debilitadas en la práctica. Es, sin embargo, principalmente por razones de claridad expositiva, que preferimos mantenerlas de acuerdo con lo que se dice a continuación:

(H_1) *Distribución del número de siniestros*

N_j, $j=1, 2, 3, \ldots$, son independientes y distribuídas según Toisson con parámetro $V_j v$, donde

V_j es una medida del *volúmen* para el año de accidente j,

v es un parámetro valorado en lo real.

(H_2) *Independencia de la comunicación, frecuencia e intensidad*

Las variables Z, T y N, representan tres clases de variables estocásticas independientes.

(H_3) *Independencia de las experiencias de los años de accidente*

Los acotencimientos definidos en diferentes años de accidente, son independientes.

(H_4) *Variables estocásticas dentro de un año de accidente*

i) Las secuencias de los importes de siniestros individuales:

$$\left({}^{m}Z_{ij}^{(k)}\right) \quad i \geqslant m, \text{ para } k=1,\ 2,\ 3\ \ldots \text{ son independientes}$$

e idénticamente distribuídas. Por esta razón, el índice k es omitido cuando hacemos la afirmación anterior sobre la distribución de ${}^{m}Z_{ij}$.

ii) $T_j^{(k)}$, $k=1, 2, 3, \ldots$, tienen todas la misma función de distribución $F(t)$, o en notación diferente $p(m)=F(m)-F(m-1)$.

(H_5) *Estabilidad de las tasas de desarrollo de los importes de los siniestros individuales*

$$E\left[{}^{m}Z_{ij}^{(k)} \Big/ \begin{array}{l}\text{dada cualquier tendencia}\\ \text{conduciendo a } {}^{m}Z_{i-1j}^{(k)}=x\end{array}\right]={}^{m}\lambda_{i-1}x$$

es decir, la «tasa de desarrollo» ${}^{m}\lambda_{i-1}$ no depende del año de accidente j.

$$\mathrm{Var}\left[{}^{m}Z_{ij}^{(k)} \Big/ \begin{array}{l}\text{dada cualquier tendencia}\\ \text{conduciendo a } {}^{m}Z_{i-1j}^{(k)}=x\end{array}\right]={}^{m}\sigma^{2}_{i-1}f(x) \begin{array}{l}\text{para alguna}\\ \text{función } f(\bar{x}),\ (f>{}^{\lambda}).\end{array}$$

5. La información estadística

a) Las técnicas para reservar, que se utilizan actualmente en los Seguros de Accidentes, empiezan a partir de un *Triángulo de los siniestros ocurridos*. Digamos que hemos alcanzado el año de desarrollo, n, para el año de accidente 1. Consecuentemente, el triángulo de siniestros ocurridos tiene la forma siguiente:

$$\begin{array}{c|llll}
 & \multicolumn{4}{c}{\text{años de accidente}} \\
\hline
 & X_{11} & X_{12} & \ldots X_{1n-1} & X_{1n} \\
 & X_{21} & X_{22} & X_{2n-1} & \\
\text{años de desarrollo} & X_{31} & X_{32} & & \\
 & \cdot & \cdot & & \\
 & \cdot & \cdot & & \\
 & \cdot & X_{n-12} & & \\
 & X_{n1} & & & \\
 & P_1 & P_2 & \ldots P_{n-1} & P_{1n}
\end{array}$$

donde $X_{ij}=\sum_{m=1}^{i} {}^{m}X_{ij}$ (como se definió en la sección 3), significa el total de los siniestros conocidos correspondientes al año de accidente j, para el final del año de desarrollo i, siendo P_j las primas vencidas en el año j.

Es conveniente utilizar las abreviaturas

X P para tal triángulo

X para el triángulo de los siniestros ocurridos, sin la última línea, correspondiente a las primas vencidas.

b) Introducción de la abreviatura

$$N_{ij} = \sum_{k=1}^{N_j} \left[T_j^{(k)} \leqslant i \right]$$

es decir, *número* de siniestros ocurridos en el año j y conocidos al final del año de desarrollo n; podemos tambien formar un triangulo del número de siniestros ocurridos, como sigue:

años de desarrollo \ años de accidente				
	N_{11}	N_{22}	$\ldots . N_{1n-1}$	N_{1n}
	N_{21}		N_{2n-1}	
	N_{31}			
	.			
	.			
	.	N_{n-12}		
	N_{n1}			
	V_1	V_2	$\ldots . V_{n-1}$	V_n

donde N_{ij} es definido como mas arriba y V_j representa la medida del volumen para el año de accidente j (como definido en la sección 4).

Nosotros usamos las abreviaturas correspondientes así:

N V

y

N

c) Finalmente, necesitamos dividir el triángulo X de acuerdo con los años de comunicación, dentro de varios triángulos.

${}^{m}X$ $m = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

que explícitamente escritos tienen la forma siguiente:

$$
\begin{array}{l}
m-1 \left\{ \begin{array}{ccccccc}
0 & 0 & 0 & \dots\dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots\dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots\dots & 0 & 0 & 0
\end{array} \right. \\
\quad {}^{m}X_{m1} \quad {}^{m}X_{m2} \quad {}^{m}X_{m3} \quad \dots\dots {}^{m}X_{mn+1-m} \\
\quad mX_{m+11} \quad {}^{m}X_{m+12} \quad \dots\dots \\
\quad \dots\dots {}^{m}X_{n-12} \\
\quad mX_{n1}
\end{array}
$$

En lo que sigue, estamos considerando la situación donde todos los triángulos:

X/P $\quad$ ${}^{m}X$ $\quad$ $m=1, 2, 3, \dots,$ $\quad$ N/V $\qquad$ son dados.

Basados sobre esta información, necesitamos valorar (por cada año de accidente j) el *Ajuste para el total de los siniestros*, es decir, la variable aleatoria $Y_{n-j+1,j}$ ajustada para el desarrollo desde la diagonal hacia abajo.

6. El ejemplo Standard

Los ejemplos explícitamente numéricos que siguen, serán utilizados a través del resto del trabajo. Se refieren a los años de accidente $j=1970$, 1971, ..., 1979 con desarrollos hasta el final de 1979.

a) N/V triángulo

N_j es Poisson con parámetro $V_j v$, donde $v=0{,}1128$.
y

$$
\begin{aligned}
V_{1970} &= 800 \\
V_{1971} &= 1.000 \\
V_{1972} &= 700 \\
V_{1973} &= 600 \\
V_{1974} &= 500 \\
V_{1975} &= 700 \\
V_{1976} &= 900 \\
V_{1977} &= 1.200 \\
V_{1978} &= 1.600 \\
V_{1979} &= 2.000
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ll}
m-1 \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right. &
\overbrace{\begin{array}{ccccccc}
0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0
\end{array}} \\
& \begin{array}{llll}
{}^{m}X_{m1} & {}^{m}X_{m2} & {}^{m}X_{m3} & \cdots\cdots {}^{m}X_{mn+1-m} \\
mX_{m+1l} & {}^{m}X_{m+12} & \cdots\cdots & \\
\cdots\cdots & {}^{m}X_{n-12} & & \\
mX_{n1} & & &
\end{array}
\end{array}
$$

En lo que sigue, estamos considerando la situación donde todos los triángulos:

X/P $\quad$ m_X $\quad$ $m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$ $\quad$ N/V $\quad$ son dados.

Basados sobre esta información, necesitamos valorar (por cada año de accidente j) el *Ajuste para el total de los siniestros*, es decir, la variable aleatoria $Y_{n-j+l,\,j}$ ajustada para el desarrollo desde la diagonal hacia abajo.

6. El ejemplo Standard

Los ejemplos explícitamente numéricos que siguen, serán utilizados a través del resto del trabajo. Se refieren a los años de accidente $j=1970$, 1971, ..., 1979 con desarrollos hasta el final de 1979.

a) N/V triángulo

N_j es Poisson con parámetro $V_j v$, donde $v=0{,}1128$.
y

$$
\begin{aligned}
V_{1970} &= 800 \\
V_{1971} &= 1.000 \\
V_{1972} &= 700 \\
V_{1973} &= 600 \\
V_{1974} &= 500 \\
V_{1975} &= 700 \\
V_{1976} &= 900 \\
V_{1977} &= 1.200 \\
V_{1978} &= 1.600 \\
V_{1979} &= 2.000
\end{aligned}
$$

La distribución del momento de la comunicación, se da como sigue:

$$\begin{array}{ll} p(1) = {}^{\lambda}{}_{,}{}^{\alpha} & p({}^{\theta}) = {}^{\lambda}{}_{,}{}^{\lambda\,\varepsilon} \\ p(\phi) = {}^{\lambda}\phi & p({}^{\kappa}) = {}^{\lambda}{}_{,}{}^{\lambda\,\varepsilon} \\ p({}^{\alpha}) = {}^{\lambda}{}_{,}1^{\;\varepsilon} & p({}^{\gamma}) = {}^{\lambda}{}_{,}{}^{\lambda}\phi \\ p({}^{\beta}) = {}^{\lambda}{}_{,}1 & p({}^{\zeta}) = {}^{\lambda}{}_{,}{}^{\lambda}\phi \\ p({}^{\varepsilon}) = {}^{\lambda}{}_{,}1 & p(1\,{}^{\lambda}) = {}^{\lambda}{}_{,}{}^{\lambda}1 \end{array}$$

b) ^{m}X triángulos

El importe individual del siniestro, $^{m}Z_{mj}$, y su desarrollo, es logarítmico normal, es decir, siendo ḿas precisos:

$$\log {}^{m}Z_{mj} \sim \mathcal{N}(\mu_m + (j-1\,{}^{\zeta\kappa\lambda})\,1n(1+\delta),\ \sigma_0^2)$$

y la distribución de $^{m}Z_{ij}$ dada la historia $({}^{m}Z_{mj}, \ldots, {}^{m}Z_{i-lj})$, sigue:

$$\log {}^{m}Z_{ij} \sim \mathcal{N}(\gamma_{i-1} + \log {}^{m}Z_{i-lj},\ \gamma_{i-l}\sigma^2)$$

La media condicionada de $^{m}Z_{ij}$ dada la historia $({}^{m}Z_{mj}, \ldots, {}^{m}Z_{i-lj})$ es

$${}^{m}Z_{i-lj}\, e^{\gamma_{i-l}\left(1+\frac{\sigma^2}{\phi}\right)} \doteqdot {}^{m}Z_{i-lj}\lambda_{i-l}$$

y la varianza condicionada es:

$$({}^{m}Z_{i-lj})^2 e^{\gamma_{i-l}(\phi+\sigma^2)}(e^{\gamma_{i-l}\sigma^2} - 1) \doteqdot ({}^{m}Z_{i-lj})^2 \sigma_{i-l}^2$$

(de donde, $f(x) = x^2$, en este caso; véase sección 4).

Obsérvese que

$$\begin{array}{lll} {}^{m}\lambda_{i-l} \doteqdot \lambda_{i-l} & \text{independiente de } m & \text{en el ejemplo} \\ {}^{m}\sigma_{i-l}^2 \doteqdot \sigma_{i-l}^2 & \text{independiente de } m & \text{Standard} \end{array}$$

De otro lado, tenemos para los valores iniciales en el año de comunicación m

$$E[{}^{m}Z_{mj}] = e^{\mu_m + \frac{\sigma_0^2}{\phi}}(1+\delta)^{j-1970} \doteqdot c_m(1+\delta)^{j-1970}$$

y

$$\mathrm{Var}\,[{}^{m}Z_{mj}] = c_m^2(1+\delta)^{2j} - \phi(e^{\sigma_0^2} - 1).$$

c) Simulación: Los valores siguientes han sido elegidos para los parámetros bajo b).

	$\delta=0,05$		$\sigma^2=10$		$\sigma_0^2=1$
m	μ_m	γ_m	λ_m	c_m	$E[{}^mZ_{1970}]$
1	1	0,018	1,114	4,482	7,319
2	1,2	0,015	1,094	5,474	8,024
3	1,2	0,013	1,081	6,050	8,107
4	1,4	0,011	1,068	6,686	8,295
5	1,5	0,009	1,055	7,389	8,576
6	1,6	0,007	1,043	8,166	8,957
7	1,65	0,005	1,030	8,585	9,056
8	1,7	0,003	1,018	9,025	9,243
9	1,73	0,001	1,006	9,300	9,356
10	1,75	—	—	9,488	9,488

i) Obsérvese que de la asunción (H_5) tenemos:

$$E[{}^mZ_j]=c_m(1+\delta)^{j-1970}\prod_{i\geqslant m}\lambda_i.$$

ii) Nótese que en la tabla anterior δ, σ^2, σ_0^2, μ_m e y_m pueden ser elegidos libremente, donde λ_m, c_m y $E({}^mZ_{1970})$ dependen únicamente de aquellos parámetros elegidos libremente.

Con estos valores paramétricos se pueden obtener los doce triángulos siguientes:

N

	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
1	38	37	15	20	13	25	33	47	50	50
2	52	64	28	38	25	35	55	81	80	
3	71	55	43	52	35	47	65	102		
4	82	97	44	57	39	54	80			
5	86	108	54	65	43	62				
6	91	116	60	71	43					
7	96	130	65	72						
8	99	132	68							
9	99	133								
10	99									
	800,00	1000,00	700,00	600,00	500,00	700,00	900,00	1.200,00	1.600,00	2.000,00

X

	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
1	157,46	167,32	69,15	116,93	44,01	118,42	153,78	331,68	438,93	310,47
2	240,25	322,34	136,35	252,90	137,55	164,26	277,68	512,18	860,09	
3	347,35	524,87	276,43	406,32	222,39	275,41	380,70	865,89		
4	407,56	624,92	331,74	524,74	272,82	401,87	573,80			
5	422,61	762,05	421,00	593,48	346,64	507,94				
6	629,02	874,52	501,14	767,00	330,32					
7	654,54	1.186,99	583,34	835,84						
8	725,31	1.260,42	600,50							
9	826,71	1.247,30								
10	776,27									

m_X $m=1$

	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
1	157,46	167,32	69,15	116,93	44,01	118,42	153,78	331,68	438,93	310,47
2	187,64	185,54	59,57	148,18	57,54	114,71	153,77	410,40	562,41	
3	190,88	209,28	83,81	145,23	54,74	120,58	177,49	437,08		
4	197,96	210,75	86,39	180,59	45,83	151,99	177,32			
5	194,91	190,74	80,80	165,17	51,92	155,70				
6	268,98	185,15	81,15	227,99	52,51					
7	235,75	188,23	86,31	296,98						
8	269,10	188,82	82,85							
9	306,00	186,69								
10	297,11									

m_X $m=2$

	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
2	52,61	137,38	77,27	104,72	80,00	49,55	123,91	201,77	297,68	
3	64,02	173,55	82,39	133,14	076,79	58,68	143,69	254,20		
4	70,59	239,46	87,56	136,75	083,78	72,54	141,98			
5	35,24	306,60	076,75	165,99	110,39	79,75				
6	85,60	313,85	076,86	185,12	05,44					
7	82,72	328,38	181,33	193,09						
8	79,77	320,95	136,41							
9	87,46	298,10								
10	86,00									

m_X $m=3$

	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
3	92,44	142,04	110,23	127,95	90,85	96,15	59,32	174,51		
4	79,41	134,98	121,11	186,71	120,44	99,68	82,03			
5	72,21	136,68	126,76	181,62	120,27	90,18				
6	70,97	115,39	138,12	196,21	182,82					
7	64,08	128,58	142,81	170,20						
8	62,82	143,45	134,08							
9	53,85	145,78								
10	57,10									

m_X $m=4$

	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
4	59,69	39,81	36,38	28,89	32,77	77,67	172,47			
5	55,20	44,65	40,24	28,22	22,16	119,87				
6	56,63	59,87	51,79	32,82	20,44					
7	60,14	83,44	84,59	47,77						
8	59,15	102,05	89,17							
9	73,37	92,96								
10	68,48									

m_x $m=5$

	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
3	0	0	0	0	0	0	0	0		
4	0	0	0	0	0	0	0	0		
5	15,05	83,38	96,45	52,48	61,92	62,43				
6	15,90	103,10	105,62	57,59	59,10					
7	17,94	107,18	171,79	51,01						
8	15,61	128,29	95,50							
9	15,41	128,13								
10	14,61									

m_x $m=6$

	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
3	0	0	0	0	0	0	0	0		
4	0	0	0	0	0	0	0			
5	0	0	0	0	0	0				
6	190,93	98,76	47,59	67,31	0					
7	175,13	102,52	37,46	73,94						
8	169,70	116,46	41,56							
9	213,17	100,26								
10	178,85									

$m = 7$

m_X	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
3	0	0	0	0	0	0	0	0		
4	0	0	0	0	0	0	0			
5	0	0	0	0	0	0				
6	0	0	0	0	0					
7	28,79	248,67	29,75	1,96						
8	35,30	292,96	30,13							
9	39,84	274,81								
10	39,97									

$m = 8$

m_X	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
3	0	0	0	0	0	0	0	0		
4	0	0	0	0	0	0	0			
5	0	0	0	0	0	0				
6	0	0	0	0	0					
7	0	0	0	0						
8	23,86	7,47	20,80							
9	25,61	9,27								
10	24,15									

$m = 9$

m_x	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0		
5	0	0	0	0	0	0				
6	0	0	0	0	0					
7	0	0	0	0						
8	0	0	0							
9	0	12,10								
10	0									

$m = 10$

m_x	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
3	0	0	0	0	0	0	0	0		
4	0	0	0	0	0	0	0			
5	0	0	0	0	0	0				
6	0	0	0	0	0					
7	0	0	0	0	0					
8	0	0	0							
9	0	0								
10	0									

7. Valoración del ajuste para el total de los siniestros

La valoración de reservas en los Seguros de Vida, se ha convertido en una técnica standard tal, que su significado puede haber sido olvidado por el Actuario práctico que hace las valoraciones como una parte de su rutina periódica. Por esta razón, nosotros necesitamos recordar al lector que las valoraciones no significan, ni más ni menos, que tomar el valor esperado de la variable aleatoria que describe la corriente de pagos futuros, posiblemente descontada por interés. Naturalmente, los valores esperados siempre tomarán en cuenta la última información disponible. En términos de teoría de la probabilidad, esto significa tomar la esperanza *condicionada*, dada la última información disponible.

La valoración del Ajuste para el total de los siniestros sobre la diagonal:

$$Y_{n-j+1,j} = P_{n-j+1,j} + \Delta_{n-j+1,j}$$

queda descrita así, más bien fácilmente, como el problema de encontrar la esperanza condicionada:

$$E\left[\, Y_{n-j+1,j} \Bigg/ \begin{array}{l} \boxed{{}^{m}X} \quad (m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \\ \boxed{N} \end{array} \right]$$

$$= E\left[\, \Gamma_{n-j+1,j} \Bigg/ \begin{array}{l} \boxed{{}^{m}X} \quad (m=1,\ 2,\ \ldots) \\ \boxed{N} \end{array} \right]$$

$$+ E\left[\, A_{n-j+1,j} \Bigg/ \begin{array}{l} \boxed{{}^{m}X} \quad (m=1,\ 2,\ \ldots) \\ \boxed{\bar{N}} \end{array} \right]$$

Un cálculo lineal hacia adelante con esperanzas condicionadas, nos lleva desde la definición de $\Gamma_{n-j+1,j}$, $\Delta_{n-j+1,j}$ a la fórmula:

$$\text{(I)}\quad E\left[\underbrace{\Gamma_{n-j+1,\,j}}_{\tilde{n}} \Big/ \begin{array}{l} \boxed{{}^{m}X} \ (m=1,\ 2,\ \ldots) \\ \boxed{N} \end{array}\right] = \sum_{m=1}^{\tilde{n}} \underbrace{\left(\prod_{i \geq \tilde{n}} {}^{m}\lambda_i - 1\right)}_{{}^{m}H_{\tilde{n}} - 1} {}^{m}X_{\tilde{n}j} = \sum_{m=1}^{\tilde{n}} ({}^{m}H_{\tilde{n}} - 1)\,{}^{m}X_{\tilde{n}j}$$

$$\text{(II)}\quad E\left[\underbrace{\Delta_{n-j+1}}_{\tilde{n}} \Big/ \begin{array}{l} \boxed{{}^{m}X} \ (m=1,\ 2,\ \ldots) \\ \boxed{N} \end{array}\right] = \sum_{m=n+1}^{\infty} p(m)\,E[{}^{m}Z_j] \cdot V_j \cdot v$$

I y II son las «valoraciones» para siniestros ocurridos y no suficientemente comunicados y para siniestros ocurridos pero no comunicados, respectivamente.

Obsérvese que como en las «valoraciones» del Seguro de Vida, en el sentido usado aquí, se establece el centro de gravedad sólo para obligaciones futuras. Si uno necesitase tener información concerniente a las posibles fluctuaciones, se podrán también calcular las varianzas (y posiblemente momentos de orden superior) de las variables aleatorias en cuestión. Pero nos parece importante señalar que tales consideraciones son solamente hechas cuando se calculan, por ejemplo, las reservas de siniestros ordinarias, pero *no* para el cálculo de las reservas de siniestros en sí mismas.

8. Valoración de las reservas para siniestros ocurridos, pero no suficientemente comunicados

La fórmula básica ha sido derivada en la sección anterior.

$$\text{(I)}\quad E\left[\underbrace{\Gamma_{n-j+1,j}}_{\tilde{n}} \Big/ \begin{array}{l} \boxed{{}^{m}X} \ (m=1,\ 2,\ \ldots) \\ \boxed{N} \end{array}\right] = \sum_{m=1}^{\tilde{n}} ({}^{m}H_{\tilde{n}} - 1)\,{}^{m}X_{\tilde{n}j}$$

Es interesante anotar que, bajo la *hipótesis adicional*, los ratios de desarrollo de los siniestros individuales ${}^{m}\lambda_i$ son *independientes del año de comunicación*, m, es decir, ${}^{m}\lambda_i \equiv \lambda_i$, para todo m; nosotros podemos simplificar ulteriormente esto y obtener, con $H_{\tilde{n}} = \prod_{i \geq \tilde{n}+1} \lambda_i$, lo siguiente:

$$(\mathrm{I}') \quad E\left[\Gamma_{\tilde{n}j} \middle/ \begin{array}{l} {}^{m}X \ (m=1,\ 2,\ \ldots) \\ N \end{array}\right] = (H_{\tilde{n}} - 1)\, X_{\tilde{n}j}.$$

Obsérvese que esta última fórmula corresponde a la aproximación más común (basada sobre factores «lag») para valorar el ajuste para el total de los siniestros. Nuestro análisis demuestra que este intento es aparentemente justificable dentro de nuestro modelo, previsto que el ajuste consista sólo en el componente de la reserva de siniestros no suficientemente comunicados.

La valoración de los siniestros ocurridos pero no suficientemente comunicados es llevada a cabo en la sección 10 de nuestro ejemplo standard (donde la hipótesis adicional, ${}^{m}\lambda_i \equiv \lambda_i$, para todo m, es válida). Basados en los valores de los parámetros verdaderos se obtiene la reserva para los siniestros ocurridos pero no suficientemente comunicados, a través de la fórmula $(H_{\tilde{n}} - 1)\, X_{\tilde{n}j}$.

9. Valoración de las reservas para los siniestros ocurridos pero no comunicados

a) La fórmula básica ha sido obtenida en la sección 7.

$$(\mathrm{II}) \quad E\left[\Delta_{\tilde{n}} \middle/ \begin{array}{l} {}^{m}X \ (m=1,\ 2,\ \ldots) \\ N \end{array}\right] = \underset{m=\tilde{n}+1}{\overset{\infty}{}} \; p(m)\, E[{}^{m}Z_j]\, V_j c.$$

Lo escribiremos algo diferentemente, introduciendo:

$$\sum_{m=\tilde{n}+1}^{\infty} p(m)\, E[{}^{m}Z_j] = E[{}^{>\tilde{n}}Z_j]\,[1 - F(\tilde{n})]$$

valores esperados, para los siniestros comunicados, después de $\tilde{n}$.

Bajo la hipótesis adicional de que las primas son correctas, es decir, que

$$P_j = E(Z_j) \cdot V_j \cdot v$$

obtenemos:

$$\text{(II)}' \qquad E\left[\Delta_{\tilde n} \Big/ \begin{matrix} {}^{m}X \; (m=1,\ 2,\ \ldots) \\ \\ N \end{matrix} \right] = \frac{E[{}^{>\tilde n}Z_j]}{E[Z_j]}[1-F(\tilde n)]\,P_j$$

Si, incluso, $E({}^{m}Z_j) = E(Z_j)$, para todo m, se satisface, llegamos a la fórmula simplificada:

$$\text{(II)}'' \qquad E\left[\Delta_{\tilde n} \Big/ \begin{matrix} {}^{m}X \; (m=1,\ 2,\ \ldots) \\ \\ N \end{matrix} \right] = [1-F(\tilde n)]\,P_j$$

b) En la sección 10, la valoración de las reservas para siniestros ocurridos pero no comunicados, es explícitamente llevada a todo lo largo de nuestro ejemplo Standard. La fórmula usada, es:

$$\sum_{m=\tilde n+1}^{\infty} p(m)\, E[{}^{m}Z_j]\, v\, V_j$$

10. Valoración de la reserva verdadera según el Ejemplo Standard

La gran ventaja de nuestra aproximación, consiste en el hecho que para el Ejemplo standard, descrito en la sección 6 —al contrario de la situación hallada en la práctica— *conocemos los verdaderos valores de los parámetros.* Esto nos lleva a las siguientes *reservas verdaderas:*

	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
OPNSC	0	7,51	14,59	46,38	35,30	82,20	138,34	295,95	402,65	197,33
OPNC	0	11,24	24,55	36,58	63,07	138,00	303,09	582,38	1140,00	2058,78
Total	0	18,74	39,13	82,96	98,36	220,20	441,44	878,33	1542,65	2256,11

Estos valores verdaderos, serán comparados con los valores estimados, obtenidos mediante los distintos métodos de estimación.

Con un primer ensayo, permítasenos comparar el total obtenido, con el calculado por el método standard basado sobre los factores «lax».

	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
Total	0	−76,11	−11,57	34,85	80,31	257,76	456,50	1138,74	2203,40	1769,15

¡El resultado es más bien descorazonador!: En lo que sigue, hemos de hacerlo mejor que por el método standard, estimando los componentes de las fórmulas I y II de acuerdo con técnicas de la Estadística matemática.

11. Sobre la búsqueda de métodos de estimación mejores. El Método - M

Nuestro principio en esta Sección es el de proponer estimaciones para los componentes de la fórmula (véase Sección 7).

OPNSC:

$$E\left[\Gamma_{\tilde{n}j} \;\middle|\; \begin{array}{l} m_x \ (m=1,\ 2,\ \ldots) \\ N \end{array}\right] = \sum_{m=1}^{\tilde{n}} ({}^{m}H_{\tilde{n}}-1)\,{}^{m}X_{\tilde{n}j}\,, \qquad \text{donde:}\quad {}^{m}H_{\tilde{n}} = \prod_{i \geq \tilde{n}} {}^{m}\hat{\lambda}_i \tag{I}$$

OPNC:

$$E\left[\Delta_{\tilde{n}j} \;\middle/\; \begin{array}{l} m_X \ (m=1,\ 2,\ \ldots) \\ N \end{array}\right] = \sum_{m=\tilde{n}+1}^{\infty} p(m)\,E[{}^{m}Z_j]\,V_j v\,. \tag{II}$$

Previamente, construimos ahora un triángulo más (el Δ triángulo), definiendo:

$$\Delta_{mj} = N_{mj} - N_{m-1j} \quad (N_{oj}=0).$$

a) *Estimadores de los componentes de la fórmula OPNSC*

Todo lo que se necesita, son las estimaciones para la ${}^m\lambda_i$. Proponemos:

$$\widehat{{}^m\lambda_{i-1}} = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1-i} \frac{{}^mX_{ij}\,{}^mX_{i-1j}}{\Delta_{mj}}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1-i} \frac{({}^mX_{i-1})^2}{\Delta_{mj}}}$$

Sketch de derivación de los parámetros

${}^mX_{ij}$ dados, la historia del desarrollo hasta el año $i-1$ tiene, de acuerdo con (H_5), la esperanza condicionada: ${}^m\lambda_{i-1}\ {}^mX_{i-1j}$ y la varianza condicionada: ${}^m\sigma^2_{i-1} \sum_{k=1}^{\Delta_{mj}} f({}^mZ^{(k)}_{i-1j}) \approx K\,{}^m\sigma^2_{i-1}\,\Delta_{mj}$ (porque no conocemos f).

Condicionantemente $\dfrac{{}^mX_{ij}}{{}^mX_{i-1j}}$ es un estimador insesgado para ${}^m\lambda_{i-1}$ con varianza:

$$\approx k\,{}^m\sigma^2_{i-1}\,\frac{\Delta_{mj}}{({}^mX_{i-1j})^2}.$$

Nuestro propuesto estimador (1) es entonces: $\sum_j a_j \dfrac{{}^mX_{ij}}{{}^mX_{i-1j}}$ con $\sum_j a_j = 1$, y a_j proporcional a: $\dfrac{1}{varianza}$.

P. S.: Si se conoce que ${}^m\lambda_i = \lambda_i$, independiente de m, la fórmula (1) puede ser mejorada mediante la suma del numerador y del denominador del miembro derecho sobre todo el sumatorio m.

b) *Estimadores de los componentes de la fórmula OPNC*

b$_1$)

$$(2)\quad \left\{ \begin{array}{l} \widehat{p(m)v} = \dfrac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1-m} \Delta_{mj}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1-m} V_j} \\[2ex] \hat{v} = \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \widehat{p(m)v} \end{array} \right.$$

No se requiere comentario.

b_2) Estimador para $E[{}^mZ_j] \doteq E[{}^mZ_{mj}] \prod_{i \geq m} {}^m\lambda_i$.

Suponemos: $E[{}^mZ_{mj}] = c_m(1+\delta)^{j-1}$

Los estimadores $\hat{\delta}$ y $\hat{c}_m$ se definen como las soluciones del problema

$$Q(\hat{\delta}, \hat{c}_m) = \sum_{\substack{m,\ j \\ m+j \leq n+1}} \left(\frac{{}^mX_{mj}}{\Delta_{mj}} - \hat{c}_m(1+\hat{\delta})^{j-1} \right)^2 \Delta_{mj} = \text{mín!}$$

Las soluciones se obtienen como sigue:

$$\text{Para dado } \delta\text{: } c_m(\delta) = \frac{\sum_{j=1}^{n+1-m} {}^mX_{mj}(1+\delta)^{j-1}}{\sum_{j=1}^{n+1-m} \Delta_{mj}[(1+\delta)^{j-1}]^2}$$

$$\text{Elegir } \hat{\delta} \text{ tal que } Q(\hat{\delta}, c_m(\hat{\delta})) = \text{mín!}$$

$$\hat{c}_m = c_m(\hat{\delta})$$

El método de estimación descrito aquí, basado sobre las fórmulas (1), (2) y (3) se llama Método-M en lo que sigue de este trabajo.

12. Aplicación del Método-M al Ejemplo standard

El Método-M conduce a los resultados de valoración siguientes —a ser comparados con los verdaderos valores y también con los valores obtenidos por el Método standard (ambos expuestos en la sección 10).

	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
OPNSC ...	0	– 148,29	– 34,82	– 25,19	15,30	69,10	115,67	302,20	429,39	248,43
OPNC.....	0	0	4,35	16,84	70,20	197,59	370,30	667,10	1.311,77	2.246,22
Total....	0	– 148,29	– 30,47	– 8,35	85,50	266,69	485,96	969,30	1.741,16	2.494,65

En los últimos tres años, nos parece que estamos haciéndolo sustancialmente mejor a través del Método-M, que según el Método standard (Método-S).

Naturalmente, esto es sólo una indicación vaga de calidad. La comparación de la calidad de los estimadores *no puede ser hecha sobre la base de una simple simulación.* Volveremos al aspecto de la cualidad de los distintos estimadores en la Sección 15. Es instructivo comparar el Método-M con los verdaderos valores, no sólo por medio de los resultados OPNSC y OPNC, resultados de valoración, sino también por medio de los componentes de los estimadores. En nuestro Ejemplo standard, estas comparaciones aparecen como sigue. (Obsérvese que en el Ejemplo standard, tenemos $^{m}\lambda_i=\lambda_i$, para todo m).

m	a) λ_m		b₁) $p(m)v$		b₂) c_m		
	Verd°.	Mét.-M	Verd°.	Mét.-M	Verd°.	Mét.-M	
1	1,1140	1,2007	0,0338	0,0328	4.482	4,51	
2	1,0942	1,1114	0,0226	0,0225	5.474	5,01	
3	1,0811	1,1227	0,0169	0,0195	6,050	6,07	
4	1,0682	1,0577	0,0113	0,0100	6.686	7,33	
5	1,0555	1,0885	0,0113	0,0166	7.389	6,50	δ Verd.°. =
6	1,0429	1,0761	0,0056	0,0069	8.166	14,58	=0,05
7	1,0305	1,0296	0,0056	0,0081	8.585	11,67	$\delta=0{,}05$
8	1,0182	1,0691	0,0023	0,0032	9.025	6,17	
9	1,0060	0,8811	0,0023	0,0006	9.300	11,53	
10	—	—	0,0011	0,0000	9.988	—	

Estas comparaciones, nos enseñan una lección interesante. El «componente débil» en nuestra fórmula estimatoria ((II) para OPNC) es aparentemente el estimador para c_m en los últimos años de comunicación). Aquí tenemos más bien pocos siniestros para estimar su media suficientemente bien. Para superar esta dificultad, proponemos dos alternativas del Método-M. Ambas usan una suposición adicional a priori.

13. Alteraciones del Método-M

Las alteraciones del Método-M, sólo ocurren en el estimador (3).

a) **El Método-M$_1$** (valores esperados, creciendo inicialmente).

Este método asume la hipótesis adicional a priori, que los parámetros c_m son monótonos crecientes.

Problema:

$$Q(\hat{\delta},\ \hat{c}_m)=\sum_{\substack{m,\ j\\ m+j\leqslant n+1}}\left(\frac{^{m}X_{mj}}{\Delta_{mj}}-\hat{c}_m(1+\hat{\delta})^{j-1}\right)^2\Delta_{mj}=\text{mín!}$$

bajo la condición adicional que $c_m\leqslant c_{m-1}$ para todo m.

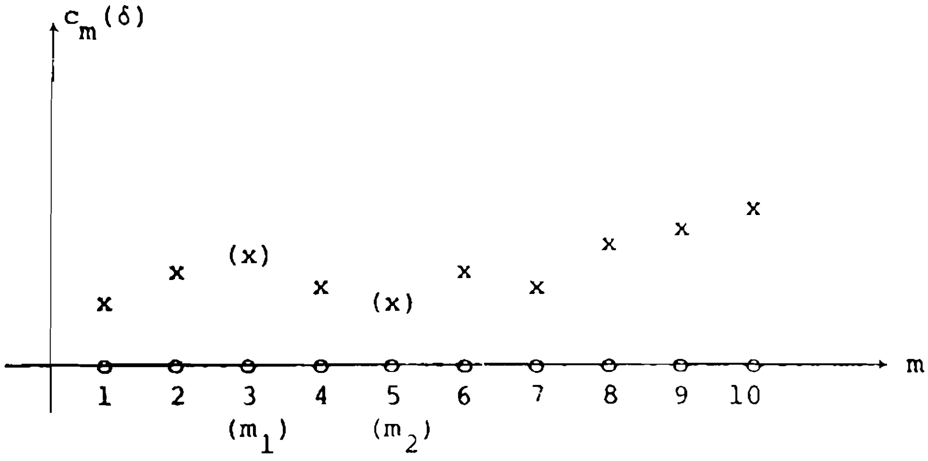
Solución:

Procedemos como antes (Sección 11) suponiendo, en primer lugar, que δ nos es dado.

Entonces:

$$c_m(\delta) = \frac{\sum_j {}^m X_{mj}(1+\delta)^{j-1}}{\sum_j \Delta_{mj}[(1+\delta)^{j-1}]^2}$$

Los cálculos pueden llevar (para un dado δ) al resultado siguiente:



El primer máximo local, se alcanza en m_1: el próximo mínimo local. está en m_2. En este caso, todos los coeficientes $c_m(\delta)$, $m_1 \leqslant m \leqslant m_2$, son reemplazados por el mismo *nuevo coeficiente* $c_m^*(\delta)$, donde:

$$c_m^*(\delta) = \frac{\sum_{m=m_1}^{m_2} \sum_j {}^m X_{mj}(1+\delta)^{j-1}}{\sum_{m=m_1}^{m_2} \sum_j \Delta_{mj}[(1+\delta)^{j-1}]}$$

y el procedimiento se repite, hasta que terminamos con una secuencia monótona: $c_1(\delta) \leqslant c_2(\delta) \leqslant + \cdots + \pm c_m(\delta) \leqslant c_{m+1}(\delta) \leqslant + \cdots + \pm c_n(\delta)$.

La prueba de que esto representa una solución al problema, se deja a la consideración del lector.

b) **El Método-M_2** (valores esperados crecientes al final).

Aquí la hipótesis a priori, es incluso más fuerte. Postulamos que $E({}^mZ_j)$ son monótonamente crecientes para cada j.

Dado que $E({}^mZ_j) = E({}^mZ_1)(1+\delta)^{j-1}$, es suficiente estimar la secuencia, $E[{}^1Z_1]$, $E[{}^2Z_1]$, $E[{}^3Z_1]$, ..., $E[{}^nZ_1]$.

Encontramos, para un dado δ,

$$E[{}^mZ_1](\delta) = \frac{\sum_j {}^mX_{mj}(1+\delta)^{j-1} \prod_{i \geqslant m} {}^m\lambda_i}{\sum_j \Delta_{mj}[(1+\delta)^{j-1}]^2},$$

y terminamos monotónicamente mediante sumas sucesivas sobre los m grupos, entre m_1 y m_2, exactamente de la misma manera como lo hicimos bajo a).

14. Aplicación de los métodos, M_1 y M_2, al ejemplo standard

Sin ulteriores comentarios, las siguientes tablas demuestran los resultados de esta aplicación:

Método-M_1

	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
OPNSC ...	0	– 148,29	– 34,82	– 25,19	15,30	69,10	115,67	302,20	429,39	248,43
OPNC.....	0	0	4,63	30,09	85,90	209,05	398,43	709,07	1.394,87	2.392,27
OPNC...	0	– 148,29	– 30,20	4,89	101,20	278,15	514,10	1.011,26	1.824,25	2.640,70

Método-M_2

	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
OPNSC.....	0	– 148,29	– 34,82	– 25,19	15,30	69,10	115,67	302,20	429,39	248,43
OPNC......	0	0	5,29	32,81	92,07	218,96	421,48	748,84	1.475,71	2.560,95
Total	0	– 148,29	– 29,53	7,61	107,38	288,07	537,15	1.051,04	1.905,10	2.809,38

Comparación de componentes ($\hat{\lambda}_m$ y $p(m) \cdot v$, como en el Método-M)

		c_m M_1	M_2
1970	4.482	4.264	3.943
1971	5.474	4.773	4.734
1972	6.050	5.845	5.624
1973	6.686	6.732	6.372
1974	7.389	6.732	6.739
1975	8.166	12.015	11.388
1976	8.585	12.015	12.255
1977	9.025	12.015	12.617
1978	9.300	12.015	13.489
1979	9.988	—	—

$\hat{\delta}=0{,}06$ $\quad\quad$ $\hat{\delta}=0{,}07$

Parece que la transición de M a los modificados, M_1 y M_2, introduce un sesgo hacia la reserva excesiva. Esto será necesario contrastarlo en la próxima sección.

15. Cualidad de los estimadores

Para obtener una idea de la cualidad de los Métodos S, M, M_1 y M_2, discutidas en este trabajo, hemos practicado 50 simulaciones del Ejemplo standard, todas con los mismos parámetros del modelo. Naturalmente, podría ser posible que bajo selecciones completamente distintas de parámetros, la cualidad de los estimadores fuese juzgada diferentemente. Nosotros atribuimos a esta posibilidad teórica más bien poco peso, particularmente teniendo presente que creemos que nuestra elección de los parámetros, es típica para la situación práctica donde la necesidad de buenos estimadores es especialmente necesitada. Con más altos parámetros «poissonianos» y más elevado volumen, todos los métodos conducirán eventualmente a razonables resultados.

Por cada año de accidente, hemos definido las siguientes medidas de desviación:

$$(\text{Reservas estimadas}) - (\text{Reservas verdaderas}) = D$$

D_s representa estas diferencias, obtenidas de las simulaciones s.

Definimos así:

$$\frac{\sum_{s=1}^{50} D_s}{50} \quad \text{como sesgo del estimador: } B$$

$$\sqrt{\frac{\sum_{s=1}^{50} D_s^2}{49}} \quad \text{como error standard del estimador: ES}$$

$$\frac{\sum_{s=1}^{50} (\text{Reserva verdadera})_s}{50} \quad \text{como verdadera reserva: T}$$

Las tres tablas siguientes, resumen nuestros resultados:

TABLA 1

Verdaderas reservas promedias

	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
OPNSC....	0	5,86	15,54	30,32	46,15	90,45	156,36	244,51	336,26	308,18
OPNC.....	0	11,24	24,55	36,58	63,07	138,00	303,09	582,38	1.140,00	2,058,78
Total	0	17,09	40,09	66,90	109,22	228,45	459,45	826,89	1.476,27	2.366,88

TABLA 2

SESGOS

	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
METODO-S										
Total	0	−2,82	−2,60	−5,69	−6,40	−13,71	−17,55	−29,26	7,78	−20,56
METODO-M										
OPNSO.....	0	−3,71	−4,85	−3,77	−2,95	−0,97	8,51	6,52	1,79	− 3,02
OPNO	0	0,40	0,30	−2,21	−4,24	−8,06	−13,09	−23,45	−17,76	−31,09
Total	0	−3,31	−4,56	−5,98	−7,19	−9,03	− 4,58	−16,93	−15,98	−34,11

Definimos así:

$$\frac{\sum_{s=1}^{50} D_s}{50} \quad \text{como sesgo del estimador: } B$$

$$\sqrt{\frac{\sum_{s=1}^{50} D_s^2}{49}} \quad \text{como error standard del estimador: ES}$$

$$\frac{\sum_{s=1}^{50} (\text{Reserva verdadera})_s}{50} \quad \text{como verdadera reserva: T}$$

Las tres tablas siguientes, resumen nuestros resultados:

TABLA 1

Verdaderas reservas promedias

	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
OPNSC....	0	5,86	15,54	30,32	46,15	90,45	156,36	244,51	336,26	308,18
OPNC.....	0	11,24	24,55	36,58	63,07	138,00	303,09	582,38	1.140,00	2,058,78
Total	0	17,09	40,09	66,90	109,22	228,45	459,45	826,89	1.476,27	2.366,88

TABLA 2

SESGOS

	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
METODO-S										
Total	0	−2,82	−2,60	−5,69	−6,40	−13,71	−17,55	−29,26	7,78	−20,56
METODO-M										
OPNSO.....	0	−3,71	−4,85	−3,77	−2,95	−0,97	8,51	6,52	1,79	− 3,02
OPNO	0	0,40	0,30	−2,21	−4,24	−8,06	−13,09	−23,45	−17,76	−31,09
Total	0	−3,31	−4,56	−5,98	−7,19	−9,03	− 4,58	−16,93	−15,98	−34,11

METODO-M_1

	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
OPNSO.....	0	−3,71	−4,85	−3,77	−2,95	−0,97	8,51	6,52	1,79	−3,82
OPNO......	0	3,82	5,35	4,77	4,06	3,82	5,57	8,56	34,34	52,85
Total	0	8,11	0,50	0,99	1,11	2,85	14,09	15,08	36,13	49,83

METODO-M_2

OPNSO.....	0	−3,71	−4,85	−3,77	−2,95	−8,97	8,51	6,52	1,79	−3,02
OPNO......	0	4,15	6,85	7,08	8,49	13,05	23,07	39,70	83,51	126,96
Total	0	8,44	2,00	3,31	5,54	12,08	31,58	46,22	85,29	123,94

TABLA 3

ERROR STANDARD

		1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
METODO-S										
Total......	0	31,29	31,99	32,27	43,75	63,63	117,18	159,56	291,25	520,81
METODO-M_0										
OPNSC.....	0	31,72	33,09	35,04	40,76	67,54	162,94	156,14	191,80	158,47
CPNC......	0	20,31	19,55	20,11	22,66	37,24	60,63	99,21	191,72	336,91
Total	0	48,48	37,68	39,19	48,04	80,09	187,77	205,68	327,92	444,51
METODO-M_1										
OPNSC.....	0	31,72	30,09	35,04	40,76	67,54	162,94	156,14	191,80	158,47
CPNC......	0	21,43	19,76	19,82	22,40	36,73	60,93	106,67	211,39	377,64
Total	0	41,57	36,80	38,48	47,60	80,81	190,69	221,16	349,97	487,26
METODO-M_2										
OPNSC.....	0	31,72	30,09	35,04	40,76	67,54	162,94	156,14	191,80	158,47
OPNC......	0	21,70	20,55	20,90	25,52	44,11	79,84	141,92	268,12	471,25
Total	0	41,81	35,07	40,17	52,06	93,71	221,71	267,21	414,69	588,15

Las conclusiones deducidas de estas tablas, son sorprendentes:

1. El Método standard de estimación, no es tan malo, después de todo.

2. La desviación típica, es muy alta para todos los métodos.

3. El Método-M_0, parece mejor ajustado para el último año de accidente.

Encontramos así, que la búsqueda de mejores métodos, tendrá que seguir. ¿O el problema es de tal naturaleza, que la desviación típica de los estimadores no puede ser sustancialmente mejorada?

BIBLIOGRAFIA

(I) Willian Morgan, «Valoración (individualmente) de los contratos de seguros en vigor en 1786», J.I.A., vol. 100, núm. 415 (1974).

(II) De Vylder, F., «Estimación de siniestros OPNC por el método de mínimos cuadrados. JASA, vol. 78/2 (1978).

(III) Hachemeister, Ch., «Un modelo estocástico para la reserva de siniestros», T. ICA 21, vol. 1 (1980).