La Ley de Mortalidad de Perks

Por
AGUSTIN SANS Y DE LLANOS

1. En el pórtico de este trabajo dejo constancia de mi gratitud, de un lado, a J. M. Henty, Secretario del Instituto de Actuarios del Reino Unido, a quien debo un ejemplar original del Vol. LXIII Part. I, n.º 305 del Journal de dicho Instituto (Año 1932), que contiene el trabajo de Wilfred Perks titulado «On some Experiments in the Graduation of Mortality Statistics»; y de otro lado a mi colega Miguel Berrio Martirena por su muy estimable colaboración.

2. Las fórmulas utilizadas para el ajuste de dos Tablas de Mortalidad atrajeron mi atención.

De un lado, en las inglesas Tablas de Asegurados 49/52 puede apreciarse que la tasa de mortalidad fue ajustada por la fórmula:

$$q_x = \frac{A + B \cdot c^y}{E \cdot c^{-2y} + 1 + D \cdot c^y} \qquad \text{para } y = x - 62{,}5$$

Y de otro, en las suizas Tablas de Población G.K.M.70 el correspondiente ajuste se realizó con las siguientes expresiones:

$$x < 30 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad q_x = a_0 + a_1 \cdot x$$

$$30 \leqslant x < 50 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad q_x = b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + b_3 \cdot x^3$$

$$x \geqslant 50 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad q_x = \frac{c_0 + c_1 \cdot c^y}{1 + c_2 \cdot c^y} \qquad \text{para } y = x - 65$$

En la primera de las dos Tablas se utilizó —luego lo pude investigar—, una variante de la fórmula generalizada de Perks, propuesta en 1964 por el Actuario británico Beard. En la segunda de ellas, y para $x > 50$, se usó la fórmula simplificada de Perks.

3. ¿Cuál fue la contribución de éste al tema, tan extensamente tratado en la literatura actuarial, del ajuste de estadísticas de mortalidad?

Obviamente la respuesta a este interrogante es el objetivo del presente trabajo.

¿Ley de mortalidad? ¿Fuerza de mortalidad? ¿Tabla de mortalidad? Los Actuarios debemos reconocer que son, si no conceptos, cuando menos, denominaciones, esquivas y engañosas.

Una Tabla de mortalidad es un modelo matemático y no debe considerarse como una representación de la realidad. Ciertamente que si su finalidad es de orden práctico, debe corresponder lo más aproximadamente posible a la mortalidad esperada, pero es importante no perder de vista que la Tabla es una concepción abstracta. Y de la función μ_x, la fuerza de mortalidad, tampoco hay que olvidar que carece de contrapartida en la experiencia; así, no tiene sentido decir que un grupo de cabezas está sujeto a una fuerza de mortalidad.

En lo que sigue se dan por sabidas las expresiones matemáticas de las Leyes de Benjamín Gompertz (1825), y de Guillermo Mateo Makeham (tanto la 1.ª como la 2.ª), así como la vía de razonamiento que siguió el primero de ellos, en conjunto calificable de genial, si bien fue el segundo quien en 1860 dio a conocer el elemento que aquél vio el primero, pero no formuló.

Desde que Makeham difundió su 1.ª fórmula:

$$\mu_x = A + B \cdot c^x$$

él y sus muchos seguidores pudieron comprobar el excelente ajuste que ofrecía desde la edad 20 ó 25 hasta la edad w de la Tabla.

Pero hacia los años veinte de este siglo, diversos Actuarios pudieron observar que la fórmula de Makeham proporcionaba, aplicada a modernas estadísticas de mortalidad, valores demasiado altos en las edades de la, hoy así llamada, «tercera edad».

Pues bien; a W. Perks, para obviar esta dificultad, se le ocurrió, inicialmente, aplicar la expresión de Makeham:

$$A + B \cdot c^x$$

para ajustar, no q_x, sino el cociente:

$$\frac{q_x}{1-q_x} = \frac{q_x}{p_x} = A + B \cdot c^x \longrightarrow q_x = \frac{A + B \cdot c^x}{1 + (A + B \cdot c^x)} \cdot$$

Al observar, en una aplicación práctica concreta, un buen resultado, ideó repetir el proceso. He aquí cómo:

$$\text{Sea} \qquad \frac{q_x}{1-q_x}=f(x)$$

La reaplicación dará:

$$\frac{f(x)}{1-f(x)}=A+B\cdot c^x \longrightarrow q_x=\frac{A+B\cdot c^x}{1+2(A+B\cdot c^x)}$$

Generalizando se tendría:

$$q_x=\frac{A+B\cdot c^x}{1+r(A+B\cdot c^x)}$$

que se reduce a la *forma simplificada de la ley de Perks* siguiente:

$$q_x=\frac{A+B\cdot c^x}{1+D\cdot c^x}$$

El propio Perks la denominó «primera modificación de la 1.ª de Makeham».

Mas como nuevas experiencias le demostraron que su nueva fórmula tampoco se ajustaba bien a las edades jóvenes, introdujo en el denominador el sumando siguiente:

$$K\cdot c^{-x} \quad \text{(que es una exponencial negativa)}$$

llegando así su *fórmula generalizada:*

$$q_x=\frac{A+B\cdot c^x}{K\cdot c^{-x}+1+D\cdot c^x}$$

4. ¿Qué forma explícita de la función l_x corresponde a una fuerza de mortalidad, tan aparentemente sofisticada y distinta de la de Makeham, como la definida por:

$$\mu_x=\frac{A+B\cdot c^x}{K\cdot c^{-x}+1+D\cdot c^x}$$

Recordando que μ_x y l_x están ligadas por la ecuación fundamental:

$$\mu_x=\frac{-d\log_e lx}{dx}$$

Perks procedió a la integración directa, obteniendo:

$$1_x = K(a+c^x)^{-M} \cdot (b+c^x)^{-N}$$

siendo:

$$A = \frac{\log_e c}{a+b} \cdot (Mb+Na) \quad ; \quad B = \frac{\log_e c}{a+b} \cdot (M+N)$$

$$K = a \cdot b/(a+b) \quad ; \quad D = 1/(a+b)$$

$$a = \frac{1+\sqrt{(1-4KD)}}{2D} \quad ; \quad b = \frac{1-\sqrt{(1-4KD)}}{2D}$$

$M \cdot \log_e c$ y $N \cdot \log_e c$ son, respectivamente:

$$B/2D \pm [A - B/2D] / \sqrt{(1-4KD)}$$

Pues bien; cuando $K=0$, son $M \cdot \log_e c = B/D - A$, y $N \cdot \log_e c = A$, y por tanto

$$l_x = K' [1 + D \cdot c^x]^{-(B/D-A)/\log_e c} \cdot e^{-Ax}$$

Esta es la fórmula explícita de l_x cuando se adopta:

$$\mu_x = \frac{A + B \cdot c^x}{1 + D \cdot c^x}$$

Haciendo $D = \frac{1}{n}$ se llega a:

$$l_x = K' \cdot \left[1 + \frac{c^x}{n}\right]^{-(nB-A)/\log_e c} \cdot e^{-Ax}$$

Y si n tiende a ∞ fácilmente se obtiene:

$$l_x = K' \cdot s^x \cdot g^{c^x}$$

que es la expresión de la 1.ª de Maheham.

Para realizar la integración Perks hizo $y = c^x$, lo que, en el caso de su ley en forma simplificada, conduce a:

$$\int \mu_x \cdot dx = \int \frac{A + B \cdot y}{y \cdot \log c + y^2 \cdot D \cdot \log c} \cdot dy \qquad (1)$$

Operando de igual forma con la fórmula de Makeham resulta que:

$$\int \mu_x \cdot dx = \int \frac{A + B \cdot y}{y \cdot \log c} \cdot dy \qquad (2)$$

Nótese que estas dos ecuaciones son sendos casos particulares de la ecuación diferencial general de Karl Pearson a partir de la cual obtuvo su familia de curvas de frecuencias como sigue:

$$\int \frac{1}{f(y)} \cdot \frac{df(y)}{dy} \cdot dy = \int \frac{a_0 + a_1 \cdot y}{c_0 + c_1 \cdot y + c_2 \cdot y^2} \cdot dy \qquad (3)$$

Una generalización de las fórmulas (1) y (2) se logra dándoles la forma de la ecuación (3), resultando así:

$$\int \mu_x \cdot dx = \int \frac{A + B \cdot y}{K \cdot \log c + y \cdot \log c + y^2 \cdot D \cdot \log c} \cdot dy$$

Sustituyendo $c^x = y$ se llega a la fórmula generalizada de Perks, ya expuesta.

5. Perks, no cabe duda, conocía la célebre comunicación que Gompertz presentó a la Real Sociedad de Estadística de Londres en 1825 y que —recordémoslo—, comienza así:

«Es posible que la muerte sea el efecto de dos causas generalmente coexistentes: una, el azar, sin predisposición a la muerte o al debilitamiento del individuo; otra, un debilitamiento o una impotencia creciente para oponerse a la destrucción ("Inability to withstand destruction")».

Partiendo de esta idea fundamental Gompertz formuló la fuerza de mortalidad de la ley que lleva su nombre así:

$$\mu_x = B \cdot c^x$$

Recogió, pues, en ella la expresión matemática de la segunda de las causas de muerte, olvidando, increíblemente, la primera de ellas. Ya sabemos que fue Makeham quien la incluyó, aunque es poco sabido que lo hizo, no por subsanar la omisión de Gompertz, sino porque en sus trabajos de ajuste de estadísticas de mortalidad, a fin de evitar ciertas anomalías, sumó al log de ${}_tp_x$ (calculada esta probabilidad por la ley gompertziana) una constante que escribió $t \cdot \log s$. Llegó a la tan conocida expresión:

$$\mu_x = A + B \cdot c^x$$

Gompertz, ateniéndose a su citada *comunicación* (que todo Actuario debiera conocer de memoria), antes que nada conceptualizó, o sea, modelizó, la Ley que subyace en el fenómeno de la mortalidad; y después, matematizó tal conceptualización.

Perks, —así lo recuerda en su trabajo—, fue incapaz de resistir a la tentación de hallar una justificación teórica a sus fórmulas (halladas, al igual que Makeham, para obviar dificultades surgidas en el trabajo práctico de ajustes de estadísticas de mortalidad). Es decir, Perks especuló. Veámos cómo.

6. Cuando Perks publica su trabajo ya estaba difundida entre los científicos la obra de Einstein, de Planck, de Eddington y de Hubble, que revolucionó la Física y la Astronomía, con repercusiones filosóficas y teológicas posteriores.

Y a Perks, conocedor de esas obras, le vino a la mente la idea de conectar el concepto gompertziano de «incapacidad para oponerse a la destrucción», en cuanto es un proceso estadístico que se desarrolla en el tiempo, nada menos que con el nuevo (entonces) concepto físico de cambio de entropía, o sea de la magnitud característica del estado termodinámico de un sistema (según el segundo principio de la Termodinámica sólo es posible medir variaciones de entropía, y no valores absolutos de esta magnitud)

En cualquier sistema cerrado la entropía tiende a un máximo y cuando éste se alcanza cesa todo cambio y el sistema está en equilibrio. Si consideramos el Universo como un sistema aislado, como todos los procesos que ocurren naturalmente son irreversibles, su entropía debe crecer constantemente con el tiempo, marcando un sentido unidireccional a la evolución del mundo físico (principio de la evolución). Simultáneamente al crecimiento de la entropía se verifica una degradación de la energía. Llegará un momento en el futuro en que la energía utilizable se agotará y la entropía del Universo pasará por un máximo. Alcanzado éste, lo que supondrá un equilibrio entre todas las temperaturas y presiones del Universo, cesarán todas las transformaciones, a excepción de pequeñas fluctuaciones sin importancia, y sobrevendrá lo que Clausius denominó la «muerte térmica» (Wärmetod) del Universo.

Perks concibió un Censo extraído de una Población estacionaria, en el cual a cada individuo se le pudiera asignar, no solo su edad, sino también una medida de su específica «incapacidad para oponerse a la destrucción» (I.O.D. para abreviar).

Para su especulación no es preciso saber de qué forma práctica sería medida para cada individuo su personal I.O.D. Basta decir que, si fuese posible obtener una medida ideal, se estaría en condiciones de construir una Tabla de frecuencias de doble entrada, con la variación de la edad horizontalmente, y la variación de la I.O.D. verticalmente. Además se podrían incluir en la Tabla los valores medios de la I.O.D. respecto a cada columna, o sea, respecto a cada edad. La serie de estas medidas permitiría calcular la correlación existente entre las variables Edad e I. O. D., la cual, según Perks, resultaría ser, no absoluta, pero sí muy alta. La matematización de estas ideas es la siguiente:

$x_{f(z)}$ = frecuencia, a la edad x, correspondiente a una cantidad de I.O.D. de z.

μ_z = fuerza de mortalidad aplicable a z.

Entonces, haciendo la hipótesis de que la mortalidad está directamente relacionada con la I.O.D. de manera que la conexión entre edad y mortalidad no es directa, sino que surge de la elevada correlaciónn entre la edad y la I.O.D., la expresión de μ_x sería:

$$\mu_z = \frac{\int_0^\infty x_{f(z)} \cdot \mu_z \cdot d_z}{\int_0^\infty x_{f(z)} \cdot fz}$$

Admitiendo que μ_z se puede expresar en la forma $a+b \cdot z$ se tiene:

$$\mu_z = \frac{\int_0^\infty x_{f(z)} \cdot (a+b \cdot z) \cdot dz}{\int_0^\infty x_{f(z)} \cdot dz} = a+b \cdot \bar{z}_x$$

Y si, además, la correlación entre x y z se representa por:

$$\bar{z}_x = B \cdot c^x \qquad \text{o bien} \qquad \bar{z}_x = A+B \cdot c^x$$

se llega a la fórmula de Makeham para μ_x.

Análogamente la correspondiente fórmula de Gompertz surge de hacer:

$$\mu_z = b \cdot z \quad \text{y} \quad \bar{z}_x = B \cdot c^x$$

Los Actuarios Benjamín y Haycocks, coautores de «The Analysis of Mortality» (Cambridge 1972), —excelente libro al que debo el conocimiento de la existencia de Perks y de sus fórmulas—, no dan mucho valor a la racionalización que de éstas he expuesto.

Tampoco yo. Y ello porque, modernamente, se afirma en Física Teórica, que el azar, el cual interviene fundamentalmente en los conjuntos formados por un número inmenso de moléculas, conducirá inexorablemente al desorden y con ello al crecimiento de la entropía. En cambio, —y esto no se «vio» en época de Perks—, los seres vivos son sistemas altamente organizados y su característica fundamental es la creación continua de estructuras de un extremado grado de orden, apareciendo, según la expresión de Teilhard de Chardin como un «desafío a la ley de la entropía». Y según Schrödinger, un organismo se mantiene en estado estacionario extrayendo continuamente orden de su entorno. En el caso de seres superiores es claro cómo se realiza este proceso: los alimentos, formados por moléculas orgánicas, altamente organizadas, pobres en entropía, son absorbidas por el cuerpo, sus energías parcialmente utilizadas, y finalmente, devueltas al entorno en una forma altamente desorganizada, rica en entropía. Así Schrödinger introduce una magnitud de signo opuesto a la entropía y que denomina «*negaentropía*».

La experiencia humana entiende mejor una caida (la muerte es la caída definitiva, físicamente hablando, del hombre) como fenómeno espontáneo; y la nueva definición satisface este arraigado hábito mental.

Fue Gompertz el que vio «claro y distinto», como quería R. Descartes.

8. Antes de abordar el sistema o metodología de cálculo de los parámetros de la ley de Perks no es ocioso señalar que éste, en su trabajo citado, contempló la variante seguidamente expuesta:

$$\frac{A+B\cdot c^{x}}{K\cdot c^{-x}+1+D\cdot c^{x}+E\cdot x^{2x}}$$

Sin embargo, aún pensando que el nuevo término del denominador $E\cdot c^{2x}$ mejoraría el grado de bondad del ajuste en edades avanzadas, lo cierto es que él nunca utilizó esta variante.

Sin duda, modernamente su compatriota Beard se inspiró en ella para elaborar el ajuste de la Tabla A 49/52 basada en la experiencia propia de 53 Compañías de Seguros sobre la vida que suministran información estadística al «Joint Committee» que dirige en el Reino Unido la «Continous Mortality Investigation».

Tal y como se dijo al comienzo del presente trabajo, dichas Tablas fueron ajustadas por la fórmula:

$$q_x=\frac{A+B\cdot c^{y}}{E\cdot c^{-2y}+1+D\cdot c^{y}} \qquad \text{para } y=x-62{,}5$$

con el siguiente valor de los parámetros:

$A=0{,}00111$
$B=0{,}0218623$
$D=0{,}0272978$
$E=0{,}01846$
$c=1{,}107756$

La fórmula es aplicable desde $x=10$ a $x=99$.

9. ¿Cómo ajustar las funciones de Perks, es decir, cómo determinar los correspondientes parámetros? Es indudable que el denominador de aquéllas presenta dificultades.

Perks, sabedor de que el parámetro c de la ley de Makeham siempre toma un valor próximo a 1,1, no lo despejó de sus fórmulas sino que aceptó hipotéticos valores de c (por ejemplo $c^5=1{,}90$; $c^5=1{,}95$; $c^5=1{,}83$) y, después, en base a ello obtuvo los restantes parámetros.

Los citados autores de «The analysis of Mortality», en esta obra, despachan la cuestión invitando al lector a que imagine o idee un método para calcular c, sin acudir a hipótesis, o sea a partir de las tasas brutas de mortalidad que se desea ajustar.

Seguidamente se expone la metodología puesta a punto por Miguel Berrio referida a la función primera de Perks, o sea:

$$q_x=\frac{A+B\cdot c^x}{1+D\cdot c^x}$$

que expresamos así:

$$q_x=A+B\cdot c^x-D\cdot q_x\cdot c^x$$

Sea a la edad a partir de la cual se va a realizar el ajuste y tomamos para x cuatro valores equidistantes: a, $a+n$; $a+2n$ y $a+3n$, lo que dará lugar a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
q_a&=A+B\cdot c^a-D\cdot q_a\cdot c^a\\
q_{a+n}&=A+B\cdot c^{a+n}-D\cdot q_{a+n}\cdot c^{a+n}\\
q_{a+2n}&=A+B\cdot c^{a+2n}-D\cdot q_{a+2n}\cdot c^{a+2n}\\
q_{a+3n}&=A+B\cdot c^{a+3n}-D\cdot q_{a+3n}\cdot c^{a+3n}
\end{aligned}$$

Reduciendo términos iguales por diferencia, obtenemos:

$$\begin{aligned}
q_{a+n}-q_a&=B\cdot c^a(c^n-1)-D\cdot c^a[q_{a+n}\cdot c^n-q_a]\\
q_{a+2n}-q_{a+n}&=B\cdot c^{a+n}(c^n-1)-D\cdot c^{a+n}[q_{a+2n}\cdot c^n-q_{a+n}]\\
q_{a+3n}-q_{a+n}&=B\cdot c^{a+2n}(c^n-1)-D\cdot c^{a+2n}[q_{a+3n}\cdot c^n-q_{a+2n}]
\end{aligned}$$

La multiplicación de la primera de las ecuaciones por c^{2n} y la segunda por c^n, nos deja el sistema en la forma:

$$(q_{a+n}-q_a)c^{2n}=B\cdot c^{a+2n}(c^n-1)-D\cdot c^{a+2n}[q_{a+n}\cdot c^n-q_a]$$

$$(q_{a+2n}-q_{a+n})c^{n}=B\cdot c^{a+2n}(c^{n}-1)-D\cdot c^{a+2n}[q_{a+2n}\cdot c^{n}-$$
$$-q_{a+n}]$$

$$q_{a+3n}-q_{a+2n}=B\cdot c^{a+2n}(c^{n}-1)-D\cdot c^{a+2n}[q_{a+3n}\cdot c^{n}-$$
$$-q_{a+2n}]$$

Una nueva reducción de términos iguales:

$$(q_{a+n}-q_{a})c^{2n}-(q_{a+2n}-q_{a+n})c^{n}=D\cdot c^{a+2n}[(q_{a+2n}\cdot c^{n}-q_{a+n})-(q_{a+n}\cdot c^{n}-$$
$$-q_{a})]$$
$$(q_{a+2n}-q_{a+n})c^{n}-(q_{a+3n}-q_{a+2n})=D\cdot c^{a+2n}[(q_{a+3n}\cdot c^{n}-q_{a+2n})-(q_{a+2n}\cdot c^{n}-$$
$$-q_{a+n})]$$

y por cociente:

$$\frac{(q_{a+n}-q_{a})c^{2n}-(q_{a+2n}-q_{a+n})c^{n}}{(q_{a+2n}-q_{a+n})c^{n}-(q_{a+3n}-q_{a+2n})}=\frac{(q_{a+2n}\cdot c^{n}-q_{a+n})-(q_{a+n}\cdot c^{n}-q_{a})}{(q_{a+3n}\cdot c^{n}-q_{a+2n})-(q_{a+2n}\cdot c^{n}-q_{a+n})}$$

O lo que es lo mismo:

$$\frac{(q_{a+n}-q_{a})c^{2n}-(q_{a+2n}-q_{a+n})c^{n}}{(q_{a+2n}-q_{a+n})c^{n}-(q_{a+3n}-q_{a+2n})}=\frac{(q_{a+2n}-q_{a+n})\cdot c^{n}-(q_{a+n}-q_{a})}{(q_{a+3n}-q_{a+2n})c^{n}-(q_{a+2n}-q_{a+n})}$$

Utilizando una notación más simplificada:

$$\frac{\Delta_a^1\cdot c^{2n}-\Delta_a^2\cdot c^{n}}{\Delta_a^2\cdot c^{n}-\Delta_a^3}=\frac{\Delta_a^2\cdot c^{n}-\Delta_a^1}{\Delta_a^3\cdot c^{n}-\Delta_a^2}$$

Desarrollando:

$$\Delta_a^1\,\Delta_a^3\cdot c^{3n}-\Delta_a^2\,\Delta_a^3\cdot c^{2n}-\Delta_a^1\,\Delta_a^2\cdot c^{2n}+(\Delta_a^2)^2\cdot c^{n}=$$

$$=(\Delta_a^2)^2\cdot c^{2n}-\Delta_a^1\,\Delta_a^2\cdot c^{n}-\Delta_a^2\,\Delta_a^3\cdot c^{n}+\Delta_a^1\Delta_a^3$$

Y también:

$$\Delta_a^1\,\Delta_a^3\cdot c^{3n}-[\Delta_a^1\,\Delta_a^2+\Delta_a^2\,\Delta_a^3+(\Delta_a^2)^2]\,c^{2n}+$$

$$+[\Delta_a^1\,\Delta_a^2+\Delta_a^2\,\Delta_a^3+(\Delta_a^2)^2]\,c^{n}-\Delta_a^1\,\Delta_a^3=0$$

Ecuaciones análogas se obtendrían para el resto de los valores de x comprendidos entre a y $a+n$; es decir, tendríamos n ecuaciones para los distintos valores de x, a, $a+1$, $a+2$, ..., $a+n-1$, las cuales, sumadas término a término, darían lugar a una ecuación general de la forma:

$$c^{3n}\sum_{i=a}^{a+n-1}\Delta_i^1\cdot\Delta_i^3-c^{2n}\sum_{i=a}^{a+n-1}\cdot[\Delta_i^1\cdot\Delta_i^2+\Delta_i^2\Delta_i^3+(\Delta_i^2)^2]+$$

$$+c^n\sum_{i=a}^{a+n-1}[\Delta_i^1\cdot\Delta_i^2+\Delta_i^2\Delta_i^3+(\Delta_i^2)^2]-\sum_{i=a}^{a+n-1}\Delta_i^1\cdot\Delta_i^3=0$$

Si llamamos:

$$c^n=V$$

$$\sum_{i=a}^{a+n-1}\Delta_i^1\cdot\Delta_i^3=\alpha$$

$$\sum_{i=a}^{a+n-1}[\Delta_i^1\cdot\Delta_i^2+\Delta_i^2\cdot\Delta_i^3+(\Delta_i^2)^2]=\beta$$

Tendremos:

$$\alpha\cdot V^3-\beta\cdot V^2+\beta\cdot V-\alpha=0$$

Que también puede escribirse:

$$\alpha(V^3-1)-\beta\cdot V(V-1)=0$$

Obviamente una de las soluciones es $V=1$, por lo que dividiendo el polinomio del primer término por $V-1$, nos queda:

$$\alpha\cdot V^2+(\alpha-\beta)\cdot V+\alpha=0$$

cuyas soluciones son conocidas.

De estas tres soluciones, dos de ellas resultan inmediatamente eliminadas, dada la experiencia disponible en ajustes de tablas de mortalidad sobre los valores c, empleada por el propio Perks para obtener dicho valor por tanteo.

Calculado ya el parámetro c en la forma expuesta, hay que pasar a la determinación de los restantes, o sea, de A, B y D.

Antes de decir cómo, se introduce la notación siguiente:

$$\Sigma=\Sigma^{(1)}=\text{primera sumación de una serie de datos.}$$

$\Sigma^{(2)}$ = segunda sumación de una serie de datos.

$\Sigma^{(3)}$ = tercera sumación de una serie de datos.

Como son tres las incógnitas que es preciso calcular, hay que formar un sistema de tres ecuaciones; y además, dado que es conveniente por razones de «peso» de los productos $q_x \cdot c^x$ en edades altas, la segunda y tercera sumación se harán tomando como edad inicial, u origen, la que divida al rango de edades en dos mitades iguales.

Si la edad origen fuese x_n se hace el cambio de variable:

$$y = x - x_n$$

El sistema que se precisa es pues:

$$\Sigma^{(1)} \cdot q_x + D\,\Sigma^{(1)} \cdot q_x \cdot c^x = \Sigma^{(1)} A + B\,\Sigma^{(1)} \cdot q_x \cdot c^x$$

$$\Sigma^{(2)} \cdot q_x + D\,\Sigma^{(2)} \cdot q_x \cdot c^y = \Sigma^{(2)} A + B\,\Sigma^{(2)} \cdot q_x \cdot c^y$$

$$\Sigma^{(3)} \cdot q_x + D\,\Sigma^{(3)} \cdot q_x \cdot c^y = \Sigma^{(3)} A + B\,\Sigma^{(3)} \cdot q_x \cdot c^y$$

Se subraya que $\Sigma^{(2)}$ se obtendrá sumando valores desde el *origen* x_n hasta la edad más joven; y $\Sigma^{(3)}$ desde x_n hasta la edad más alta.

Resultará:

$$q_x = \frac{A + B \cdot c^y}{1 + D \cdot c^y} = \frac{A + B \cdot c^{x - x_n}}{1 + D \cdot c^{x - x_n}}$$

10. En la Tabla suiza G.K.M. 70, desde $x = 50$ es:

$$q_x = \frac{A + B \cdot c^{x-65}}{1 + D \cdot c^{x-65}} = \frac{0{,}13 + 28{,}37(1{,}101)^{x-65}}{1 + 0{,}0174(1{,}101)^{x-65}}$$

Esta función puede escribirse como sigue:

$$q_x = [0{,}13 + 28{,}37(1{,}101)^{x-65}] \cdot [1 + 0{,}0174(1{,}101)^{x-65}]^{-1} = M(x) \cdot P(x)$$

El primer factor $M(x)$ es del tipo $A + B \cdot c^x$, o sea, la ley de Makeham, y el segundo $P(x)$ es la corrección de Perks.

He aquí la tabulación de $M(x)$ y $P(x)$:

x	$M(x)$0/00	$P(x)$	$q_x = M(x) \cdot P(x)$0/00
50	6,82961	0,99591	6,802
55	10,96892	0,99340	10,896
60	17,66569	0,98936	17,478
65	28,50000	0,98290	28,013
70	46,02823	0,97262	44,768
75	74,38617	0,95644	71,146
80	120,26488	0,93137	112,012
85	194,48947	0,89349	173,775
90	314,57327	0,83832	263,714
95	508,85011	0,76219	387,840

Es fácil apreciar cómo varían los valores de $P(x)$ y en qué medida corrigen a los de $M(x)$; débilmente en las primeras edades y fuertemente en las últimas.

El factor $P(x)$ es el que permite el excelente ajuste en las edades altas, objetivo que Perks logró en su primera fórmula.

Más como ésta no mejora, en cambio, los resultados que se obtienen con la primera de Makeham en edades jóvenes (o sea, entre $x=20$ y $x=30$ ó 35), Perks, como ya se indicó más arriba, instrumentó la modificación que le condujo a su segunda fórmula, la cual ya contiene cinco parámetros, cuya determinación es tan compleja, que, cuando se desea mejorar un ajuste en grado sumo, es preferible acudir a la generalización de la teoría de Albert Quiquet.

No obstante, estos refinamientos nunca son necesarios en el trabajo práctico, desde el momento en que no existe una función matemática que refleje el fenómeno de la mortalidad desde la edad 0 a la edad w.

La «praxis» enseña a renunciar a las edades infantiles o, lo que creo preferible, a un suavizado (por medias móviles); en edades jóvenes, al ajuste de una función parabólica; para, después, engarzar con la primera de Makeham o la primera de Perks, aplicada hasta la edad extrema de la Tabla de Mortalidád.

11. El propio Makeham, consciente de las limitaciones de sus fórmulas arbitró —como se sabe—, la que denominó «segunda modificación de la ley de Gompertz», o simplemente «segunda de Makeham», para lo cual definió la fuerza de mortalidad con la función:

$$\mu_x = A + H \cdot x + B \cdot c^x$$

a partir de la cual resulta:

$$l_x = K \cdot s^x \cdot w^{x^2} \cdot g^{c^x}$$

la cual raras veces se utiliza por no ofrecer buenos resultados.

Pues bien, y resumiendo; la modificación a la primera de Makeham que aúna la eficacia con la mínima complejidad, la logró Perks con la primera de sus fórmulas, a la cual he denominado LEY, siguiendo el hábito, tan pleno de sabor clásico, de los científicos de los siglos XVII, XVIII y XIX.