Caracteres homogéneos de divisibilidad por grupo de números primos

Por **D. José Antonio Estrugo Estrugo,**
Catedrático de Matemáticas generales y comerciales de la
Escuela Central de Altos Estudios Mercantiles.

1. Son sobradamente conocidas las dificultades que encierra en la práctica la utilización de los restos potenciales en la teoría de la divisibilidad, en cuanto el valor absoluto del número primo cuyo carácter se desea determinar es superior a 13, recurriéndose en la mayoría de los casos al método experimental por lo engorroso que resulta la aplicación de los criterios que se obtienen por el sistema de los restos.

Basada nuestra teoría de resolución de ecuaciones numéricas en la descomposición factorial obtenida de dos números deducidos de la ecuación dada (*) en general de gran valor absoluto, la facilidad de su aplicación depende totalmente del estado actual de la teoría de la divisibilidad, en la que necesariamente hemos tenido que fijarnos, y al pulsar en toda su intensidad sus dificultades, hemos tratado de encontrar algún medio para superarlas. Es por ello por lo que exponemos a continuación un resumen de las consecuencias que hemos deducido al tratar de generalizar el método seguido por Kochansky para el núme-

---

(*) Los números «directos» y «rotados».—«Contribución a la resolución de ecuaciones numéricas».—ANALES DEL INSTITUTO DE ACTUARIOS ESPAÑOLES, núm. I.

ro 7 (*), edificando una teoría que consideramos muy interesante al objeto que perseguimos y que, en su parte más elemental, explicamos en nuestra cátedra desde hace varios años como complemento a la basada en los restos potenciales.

2. Desde nuestro punto de vista, un grupo de k números primos $(p_1, p_2, ..., p_k)$, tiene carácter homogéneo de divisibilidad, siempre que mediante el único resultado obtenido efectuando con un número cualquiera N_1 un conjunto uniforme de operaciones, podamos determinar si dicho número es divisible por algún p_i, por varios, por todos o por ninguno de los que componen el grupo.

La operación a efectuar es sumar algebraicamente a las decenas del número N_1 (**) el resultado de multiplicar sus unidades por el «carácter distintivo» del grupo, observando si el número resultante es múltiplo de uno, de varios, de todos o de ninguno, en cuyo caso podemos afirmar que el número N_1 es múltiplo respectivo de uno, de varios, de todos o de ninguno de ellos.

En el caso de que el nuevo número formado N_2 tenga gran valor absoluto, podemos operar con él en idéntica forma hasta llegar a otro cuya determinación nos resulte inmediata.

Denominaremos «capacidad» de un grupo a la potencia en que figuran dichos números. Así, el grupo (p_1^k, p_2^k) tiene una capacidad k, teniendo esta misma su correspondiente carácter distintivo. Si las potencias son las primeras, suprimiremos esta calificación.

3. Aunque no encuadrados en la regla general dada, constituyen, sin embargo, caracteres homogéneos de divisibilidad:

a) El grupo de capacidad n $(2^n, 5^n)$, pues basta que las n primeras cifras a contar de la derecha del número N_1 sean múltiplos de 2^n, de 5^n, o sean ceros, para saber que el número será divisible por 2^n, por 5^n o por los dos que componen el grupo.

Este caso trivial no lo consideraremos en lo que sigue, dada la fácil eliminación de dichos factores, además de hacer imposible su inclusión la condición necesaria de que hablaremos seguidamente.

b) El grupo (3, 9), pues la *suma* de los valores absolutos nos permite determinar inmediatamente si el número es $\dot{3}$, de 9 ó de ninguno.

(*) Si a la izquierda de un número dígito colocamos su duplo, el número resultante es $\dot{7}$. En efecto, si aquél es a, el nuevo será $2.10\,a + a = 21\,a = \dot{7}$. Basada en esta simple propiedad establece Kochansky la divisibilidad por 7, siendo su conclusión un caso particular de lo que se indica más adelante para el grupo (3, 7).

(**) Prescindiendo en lo sucesivo de las unidades del mismo.

4. Para que un grupo $(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ de números primos tenga carácter distintivo, es necesario y suficiente que las unidades del producto de dichos números $\overset{k}{\underset{1}{\pi}} p_i$ sea 1 ó 9, formándose en el primer caso un carácter distintivo sustractivo c_d y en el segundo aditivo c'_d, obtenidos por definición, de la siguiente forma:

$$c_d = -\frac{\overset{k}{\underset{1}{\pi}} p_i - 1}{10} \quad y \quad c'_d = \frac{\overset{k}{\underset{1}{\pi}} p_i + 1}{10}.$$

Así, por ejemplo, el carácter distintivo del grupo (3, 7), será

$$c_d = -\frac{3.7 - 1}{10} = -\frac{21 - 1}{10} = -2$$

y el del grupo (9, 11),

$$c'_d = \frac{9.11 + 1}{10} = \frac{99 + 1}{10} = 10.$$

Otros ejemplos:

a) Grupo (7, 11, 13) $\qquad c_d = -\frac{7.11.13 - 1}{10} = -100.$

b) Grupo (3, 13) $\qquad c'_d = \frac{3.13 + 1}{10} = 4.$

Dado un grupo de números que no cumplan la condición necesaria, basta introducir en él otro número primo del menor valor absoluto posible, elegido convenientemente para que pueda aplicársele la presente teoría.

Si nos interesaran el grupo (7, 9) cuyo producto es 63, basta considerar este otro (3, 7, 9) en que $\pi p = 189$, haciendo formar parte del grupo al 3, ó bien aumentando una unidad su capacidad, considerando $(3^2, 7^2)$ en que $\pi p = 3.969$.

5. El algoritmo definido en 2 tiene la justificación matemática que sigue:

a) Carácter distintivo sustractivo.

Sea N_1 el número dado cuyas unidades indicaremos por u_1. Siendo el carácter distintivo del grupo $(p_1, p_2, \ldots, p_k)$,

$$c_d = -\frac{\overset{k}{\underset{1}{\pi}} p_i - 1}{10}$$

la operación a efectuar da lugar al número (teniendo en cuenta el hecho de que prescindimos de las unidades de N_1):

$$N_2 = \frac{N_1 - u_1}{10} - \frac{\prod_1^k p_i - 1}{10} u_1 = \frac{N_1 - u_1 - u_1 \prod_1^k p_i + u_1}{10} = \frac{N_1 - u_1 \prod_1^k p_i}{10}$$

y de aquí:

$$N_1 = 10\, N_2 + u_1 \prod_1^k p_i \qquad [1]$$

luego si N_2 es $\dot{p}_i$, también lo tendrá que ser N_1. En general, si N_2 es $\dot{p}_1$, $\dot{p}_2$, ... lo será igualmente N_1 de dichos números. En el caso de que $N_2 = 0$, nos indica que N_1 es múltiplo de todos los del grupo.

Si N_2 es de gran valor absoluto, podemos efectuar con él idénticas operaciones, obteniendo

$$N_3 = \frac{N_2 - u_2}{10} - \frac{\prod_1^k p_i - 1}{10} u_2 = \frac{N_2 - u_2 - u_2 \prod_1^k p_i + u_2}{10} = \frac{N_2 - u_2 \prod_1^k p_i}{10}$$

de donde

$$N_2 = 10\, N_3 + u_2 \prod_1^k p_i \qquad [2]$$

pudiéndose aplicar el mismo razonamiento: si N_3 es $\dot{p}_1$, $\dot{p}_2$ ... lo es N_2, y al serlo N_2 en virtud de [1] lo es N_1.

Sustituyendo el valor de N_2 en [2] y despejando N_1, tendremos:

$$N_1 = 10^2 N_3 + (10\, u_2 + u_1) \prod_1^k p_i$$

en donde hemos denominado u_2 a las unidades de N_2.

En general, si esta operación se repite k—1 veces, tendremos:

$$N_1 = 10^{k-1} N_k + (10^{k-2} u_{k-1} + 10^{k-3} u_{k-2} + \cdots + 10\, u_2 + u_1) \prod_1^k p_i \qquad [3]$$

igualdad esta última que nos será muy útil más adelante.

b) Carácter distintivo aditivo.

En este caso, tendremos sucesivamente

$$N_2 = \frac{N_1 - u_1}{10} + \frac{\prod_1^k p_i + 1}{10} u_1 = \frac{N_1 + u_1 \prod_1^k p_i}{10}$$

y de aquí

$$N_1 = 10\,N_2 - u_1 \overset{k}{\underset{1}{\pi}} p_i$$

Continuando el algoritmo definido

$$N_3 = \frac{N_2 - u_2}{10} + \frac{\overset{k}{\underset{1}{\pi}} p_i + 1}{10}\, u_2 = \frac{N_2 + u_2 \overset{k}{\underset{1}{\pi}} p_i}{10}$$

y despejando a N_1 en el resultado de sustituir en esta última igualdad el valor de N_2, se obtendrá

$$N_1 = 10^2\,N_3 - (10\,u_2 + u_1) \overset{k}{\underset{1}{\pi}} p_i \, .$$

En general, para el k-simo número:

$$N_1 = 10^{k-1}\,N_k - (10^{k-2}\,u_{k-1} + 10^{k-3}\,u_{k-2} + \dots + 10\,u_2 + u_1) \overset{k}{\underset{1}{\pi}} p_i \qquad [4]$$

siendo válidos los razonamientos anteriores y muy interesante para nuestro estudio la igualdad [4] obtenida.

6. 1.° Determinar si el número 33.726 es divisible por alguno del grupo (3, 7, 11). El carácter distintivo será:

$$c_d = -\frac{3.7.11 - 1}{10} = -23$$

luego operaremos como sigue:

$$\begin{array}{rl}
3\;3\;7\;2(6 & -23 \times 6 \\
-1\;3\;8 & \\
\hline
3\;2\;3(4 & -23 \times 4 \\
-9\;2 & \\
\hline
2\;3(1 & -23 \times 1 \\
2\;3 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

por tanto, podemos afirmar que 33.726 es múltiplo de los tres números que componen el grupo.

2.° Hallar por qué números del grupo (13, 17) es divisible el número 2.584 .

$$c_d = -\frac{13 \times 17 - 1}{10} = -22$$

luego

$$\begin{array}{r} 2\,5\,8\,(4 \\ 8\,8 \\ \hline 1\,7\,(0 \end{array}$$

por tanto, 2584 es $\dot{17}$, no siéndolo de 13.

3.° Calcular si 7.402.395 tiene por divisores algunos de los que componen el grupo (3, 7, 11, 13, 17).

Siendo el carácter distintivo

$$c_d = -5.105, \text{ tendremos:}$$

$$\begin{array}{l} 7.402.\,39\,(5 \\ \;\;255\;\;25 \\ \hline 7\,147\;\;1\,(4 \\ 2\,042\;\;0 \\ \hline 5\,105\,(1 \\ 5\,105 \\ \hline \quad 0 \end{array}$$

deduciendo por lo anterior que 7.402.395 es múltiplo de 3, 7, 11, 13 y 17.

4.° Determinar para el mismo grupo (3, 7, 11, 13, 17) si 189.805 es divisible por algunos de los que lo componen.

Tendremos:

$$\begin{array}{r} 1\,8\,9\,8\,0\,(5 \\ 2\,5\,5\,2\,5 \\ \hline -6.5\,4\,5 \end{array}$$

y, como da número negativo, nos indica no es divisible por todos los del grupo. Fácilmente se ve no es $\dot{3}$; pero sí de 7, luego eliminándolos del grupo queda este otro (11, 13, 17) cuyo $c_d = -243$, y aplicándolo a 6545, obtendremos:

$$\begin{array}{r} 6\,5\,4\,(5 \\ 1\,2\,1\,5 \\ \hline -5\,6\,1 \end{array}$$

que es $\dot{11}$ y 17. En resumen, el número 189805 es divisible por el grupo (7, 11, 17).

5.º Para saber si 79365 es divisible por el grupo (3, 13), como $c'_d = 4$, basta efectuar las operaciones que siguen:

$$\begin{array}{r}
7\ 9\ 3\ 6(5 \\
2\ 0 \\
\hline
7\ 9\ 5(6\ \ \\
2\ 4\ \ \ \\
\hline
8\ 1\ (9\ \ \ \ \\
3\ 6\ \ \ \ \ \ \\
\hline
1\ 1(7\ \ \ \ \ \ \ \\
2\ 8\ \ \ \ \ \ \ \ \ \\
\hline
3\ 9\ \ \ \ \ \ \ \ \
\end{array}$$

resultando serlo por ambos.

7. Conviene, sin embargo, sistematizar dichos grupos de tal manera que resulte sencilla y rápida la investigación de los divisores por los primeros números primos.

Proponemos, para números inferiores al millón, los siguientes grupos:

$$\begin{array}{rcl}
(3,\ 7,\ 11) & \text{con} & c_d = -23 \\
(13,\ 17) & » & c_d = -22 \\
(19,\ 29) & » & c_d = -55 \\
(23,\ 37) & » & c_d = -85;\ \text{y} \\
(31,\ 41) & » & c_d = -127
\end{array}$$

y para superiores al millón, aplicar directamente el grupo:

$$(3,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17)\ \text{con}\ c_d = -5.105$$

y la capacidad [2] para el grupo (13, 7)

$$(7^2,\ 13^2)\ \text{con}\ c_d = -828.$$

8. Puede ser interesante algunas veces determinar si un número N es divisible por otro *n*, y exclusivamente por él.

Si el número *n* cumple la condición necesaria, formaremos el grupo (n, 1) y se aplica el algoritmo definido. En caso contrario se asocia con otro del menor valor absoluto que le haga cumplir dicha condición.

Casos particulares muy notables lo constituyen:

a) El grupo (9, 1), en este caso como $c'_d = 1$, nos indica que a las decenas de N habrá que sumarle las unidades, efectuando idéntica operación para los números que se deban formar sucesivamente, resultando, por tanto, esta regla análoga a la deducida por los restos potenciales.

Así, para determinar si 4536 es $\dot{9}$, según nuestro algoritmo sería:

$$\begin{array}{r}
4\ 5\ 3\ (6 \\
\underline{\ \ \ \ \ 6\ \ \ \ } \\
4\ 5\ (9 \\
\underline{\ \ 9\ \ \ \ } \\
5\ (4 \\
\underline{4\ \ \ \ } \\
9\ \ \ \
\end{array}$$

b). Igual nos ocurre con el grupo (11, 1), ya que siendo $c_d = -1$, debemos a las decenas restar las unidades, y así sucesivamente, coincidiendo con la de restos potenciales.

En efecto, suponiendo para fijar ideas que $N_1 = 10^2 u_3 + 10 u_2 + u_1$, la aplicación del algoritmo para 11 sería:

$$N_2 = \frac{10^2 u_3 + 10 u_2 + u_1 - 11 u_1}{10} = 10 u_3 + u_2 - u_1$$

$$N_3 = \frac{10 u_3 + u_2 - u_1 - 11 (u_2 - u_1)}{10} = u_3 - (u_2 - u_1) = u_3 - u_2 + u_1$$

confirmándonos lo indicado.

Aplicando el algoritmo para números que cumplan la condición necesaria, pueden establecerse criterios de divisibilidad para un solo número.

Así, por ejemplo, si se trata del *número 61 podríamos enunciar* el siguiente teorema: Un número es divisible por 61 si el resultado de restar a sus decenas el séxtuplo de las unidades da cero.

Ejemplo:

Sea el número 9089, aplicando el algoritmo

$$\begin{array}{r}
9\ 0\ 8\ (9 \\
\underline{\ \ \ 5\ 4\ \ \ \ } \\
8\ 5\ (4 \\
\underline{2\ 4\ \ \ \ } \\
6\ (1 \\
\underline{6\ \ \ \ } \\
0\ \ \ \
\end{array}$$

indicándonos es $\dot{61}$.

Determinar si 67 es divisor de 162.944.—

Como no cumple la condición necesaria, formaremos el grupo (3,67) cuyo $c_d = -20$, resultando

$$\begin{array}{rl}
1\,6\,2\,9\,4 & (4 \\
8\,0 & \\ \hline
1\,6\,2\,1 & (4 \\
8\,0 & \\ \hline
1\,5\,4 & (1 \\
2\,0 & \\ \hline
1\,3 & (4 \\
8\,0 & \\ \hline
-6\,7 &
\end{array}$$

indicándonos es 67 el número 162.944.

9. Cuando el grupo de números primos tiene capacidad, conviene encontrar una fórmula de recurrencia que nos evite el cálculo de las potencias sucesivas.

Esquemáticamente damos a continuación los resultados para obtener dicha fórmula recurrente, según los caracteres distintivos del grupo inicial de capacidad (1).

Carácter distintivo aditivo

$$c'^{(1)}_d = \frac{\pi p + 1}{10}$$

$$c'^{(2)}_d = -\frac{\pi p^2 - 1}{10}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c'^{(k-1)}_d = (-1)^k \frac{\pi p^{k-1} + (-1)^k}{10}$$

$$c'^{(k)}_d = (-1)^{k+1} \frac{\pi p^k + (-1)^{k+1}}{10}$$

Carácter distintivo sustractivo

$$c^{(1)}_d = -\frac{\pi p - 1}{10}$$

$$c^{(2)}_d = -\frac{\pi p^2 - 1}{10}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c^{(k-1)}_d = -\frac{\pi p^{k-1} - 1}{10}$$

$$c^{(k)}_d = -\frac{\pi p^k - 1}{10}$$

y de aquí:

$$\frac{c'^{(k)}_d}{c'^{(k-1)}_d} = -\frac{\pi p^k + (-1)^{k+1}}{\pi p^{k-1} + (-1)^k} \qquad \frac{c^{(k)}_d}{c^{(k-1)}_d} = \frac{\pi p^k - 1}{\pi p^{k-1} - 1}$$

de donde

$$c'^{(k)}_d = -c'^{(k-1)}_d \cdot \frac{\pi p^k + (-1)^{k+1}}{\pi p^{k-1} + (-1)^k} = -c'^{(k-1)}_d \left[\pi p - \frac{c'^{(1)}_d}{c'^{(k-1)}_d}\right] = -c'^{(k-1)}_d\, \pi p + c'^{(1)}_d$$

$$c^{(k)}_d = c^{(k-1)}_d \frac{\pi p^k - 1}{\pi p^{k-1} - 1} = c^{(k-1)}_d \left[\pi p - \frac{c^{(1)}_d}{c^{(k-1)}_d}\right] = c^{(k-1)}_d\, \pi p - c^{(1)}_d$$

Ejemplos: 1.° Hallar los caracteres distintivos del grupo (3,7) de capacidad (2) y (3).

Bastará, según la última fórmula obtenida y siendo $\pi p = 3 \times 7 = 21$.

$$(3,\ 7) \quad ,, \quad \overset{(1)}{c_d} = -\ \frac{3.\,7-1}{10} = -2. \qquad \overset{(1)}{c_d} = -2$$

$$(3^2,\ 7^2) \quad ,, \quad \overset{(2)}{c_d} = [-2.\,21-2] = -44 \qquad \overset{(2)}{c_d} = -44.$$

$$(3^3,\ 7^3) \quad ,, \quad \overset{(3)}{c_d} = -[+44 \times 21 + 2] = -926 \qquad \overset{(3)}{c_d} = -926.$$

2.º Calcular los caracteres distintivos hasta capacidad (3) del grupo (3, 13), con $\pi p = 39$.

$$(3,\ 13) \qquad \overset{(1)}{c'_d} = \frac{3,\,13+1}{10} = 4 \qquad \overset{(1)}{c'_d} = 4$$

$$(3^2,\ 13^2) \qquad \overset{(2)}{c'_d} = -4 \times 39 + 4 \ ,, \qquad \overset{(2)}{c'_d} = -152$$

$$(3^3,\ 13^3) \qquad \overset{(3)}{c'_d} = -[-152]\,(39) + 4 \qquad \overset{(3)}{c'_d} = 5.932$$

El concepto de capacidad puede dar lugar a teoremas muy interesantes, pero que nos apartarían del fin primordial que nos hemos propuesto, dejando, pues, su estudio más detenido para otra ocasión.

10. La teoría de divisibilidad por restos potenciales se limita a indicarnos si el número dado N_1 es múltiplo del número primo p que se ensaya, pero una vez obtenida esta certeza, los cálculos efectuados no sirven para la descomposición factorial, debiendo, pues, de procederse a la división de N_1 entre p, para poder continuar la operación.

Así, por ejemplo, para saber si un número es divisible por 11, tenemos que sumar las cifras de lugar par, luego las de lugar impar, restarlas y si es cero o 11, el número dado lo es. Pero los cálculos efectuados, una vez conseguido nuestro objeto, en nada nos facilitan la obtención del cociente por este número, que tendrá que ser obtenido por la regla ordinaria.

Las igualdades [3] y [4] nos servirán para salvar esta laguna, permitiéndonos facilitar la descomposición factorial en gran manera.

Para ello sentaremos, al objeto de abreviar, la siguiente definición:

11. Daremos el nombre de «número diagonal» al formado por las unidades sucesivas despreciadas al aplicar el algoritmo inicial y colocadas sus cifras en el orden inverso a como han sido obtenidas.

Así, en el ejemplo 1.° del párrafo 6, en el que nos proponíamos averiguar si el número 33.726 era divisible por el grupo (3, 7, 11), al aplicar el algoritmo inicial siendo $c_d = - 23$, se obtuvo

$$\begin{array}{r}
3\ 3\ 7\ 2(6 \\
1\ 3\ 8 \\
\hline
3\ 2\ 3(4 \\
9\ 2 \\
\hline
2\ 3(1 \\
2\ 3 \\
\hline
0
\end{array}$$

Siendo en este caso el número diagonal, que representaremos por $N = 146$.

En el ejemplo 3 es fácil ver que dicho número es $N = 145$, y con el 5.° resulta ser $N = 7.965$.

12. Enunciaremos dos teoremas sobre el número diagonal de importancia capital para nuestra teoría, teniendo en cuenta si el carácter distintivo es sustractivo o aditivo.

a) En el primer supuesto:

Obtenido un resto cero, aplicando el algoritmo inicial a un número N_1, por un grupo $(p_1, p_2 ..., p_k)$ de números primos, el número N_1 será igual al producto de dichos números primos por el número diagonal que resulte.

Así, en el ejemplo 1.°, que hemos reproducido anteriormente, llegábamos a la evidencia de que 33726 era múltiplo del grupo (3, 7, 11). En virtud de este teorema, conseguimos, además, la descomposición factorial siguiente:

$$33.726 = 3 \times 7 \times 11 \times 146,$$

que nos permite hallar el cociente y operar ya con 146, de muy fácil obtención su descomposición factorial.

Igualmente, en el caso de ser 7.402.395 por el grupo (3, 7, 11, 13, 17) en que $c_d = - 5105$, al obtener

$$\begin{array}{r}
7.4\ 0\ 2\ 3\ 9(5 \\
2\ 5\ 5\ 2\ 5 \\
\hline
7\ 1\ 4\ 7\ 1(4 \\
2\ 0\ 4\ 2\ 0 \\
\hline
5\ 1\ 0\ 5(1 \\
5\ 1\ 0\ 5 \\
\hline
0
\end{array}$$

nos permite escribir que $7.402.395 = 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 145$.

b) En el segundo supuesto (carácter aditivo) el teorema es el siguiente:

Obtenido un resto igual al producto de los números que componen el grupo, el número N_1 es igual al producto de dichos números primos multiplicados por el complemento del número diagonal, que designaremos por $\bar{N}$.

De acuerdo con lo anterior, en el ejemplo 5.°, cuyo esquema es, para el grupo (3, 13), [$c_d = 4$]:

$$
\begin{array}{r}
7\ 9\ 3\ 6(5 \\
\underline{2\ 0} \\
7\ 9\ 5(6 \\
\underline{2\ 4} \\
8\ 1(9 \\
\underline{3\ 6} \\
1\ 1(7 \\
\underline{2\ 8} \\
3\ 9 = 3 \times 13.
\end{array}
$$

siendo $N = 7965$, su complemento será $\bar{N} = 10000 - 7965 = 2.035$, luego

$$79365 = 3 \times 13 \times 2.035$$

13. Para el caso de carácter distintivo sustractivo, la demostración parte de la igualdad [3]

$$N_1 = 10^{k-1} N_k + \left[10^{k-2} u_{k-1} + 10^{k-3} u_{k-2} + \cdots + 10\, u_2 + u_1\right] \overset{k}{\underset{1}{\pi}} p_i$$

pues haciendo en ella $N_k = o$, se tiene:

$$N_1 = \left[10^{k-2} u_{k-1} + 10^{k-3} u_{k-2} + \cdots + 10\, u_2 + u_1\right] \overset{k}{\underset{1}{\pi}} p_i$$

y como lo encerrado entre paréntesis es, según definición N, tendremos

$$N_1 = N \overset{k}{\underset{1}{\pi}} p_i = N p_1,\ p_2 \cdots p_k\ ,$$

que corrobora nuestro aserto.

Para demostrar el teorema expuesto en el apartado *b)*, basta en [4]

$$N_1 = 10^{k-1} N_k - \left(10^{k-2} u_{k-1} + 10^{k-3} u_{k-2} + \cdots + 10\, u_2 + u_1\right) \pi p_i$$

hacer $N_k = \pi p_i$, con lo cual

$$N_1 = 10^{k-1} \pi p_i - \left(10^{k-2} u_{k-1} + 10^{k-3} u_{k-2} + \cdots + 10\, u_2 + u_1\right) \pi p_i =$$

$$= \pi p_i \left[10^{k-1} - \left(10^{k-2} u_{k-1} + 10^{k-3} u_{k-2} + \cdots 10\, u_2 + u_1\right)\right]$$

y como lo encerrado entre corchetes es el complemento de N, tendremos finalmente, como deseábamos:

$$N_1 = p_1, p_2 \cdots p_k \; \overline{N}$$

14. 1.° Descomponer en sus factores primos el número 218.295.

Aplicaremos primeramente el grupo (3, 7, 11), cuyo $c_d = -23$, siendo el esquema:

$$\begin{array}{l}
2\;1\;8\;2\;9(5 \\
\quad\;\;1\;1\;5 \\
\hline
2\;1\;7\;1(4 \\
\quad\;\;9\;2 \\
\hline
2\;0\;7(9 \\
2\;0\;7 \\
\hline
\quad\;\;0
\end{array}$$

por tanto, podemos escribir directamente:

$$218295 = 3 \times 7 \times 11 \times 945 = 3 \times 7 \times 11 \times 5 \times 199.$$

2.° Hallar si existe capacidad tercera del grupo (3, 7) en el número 120.393 aprovechando los cálculos, si es posible, para su descomposición factorial.

Como en este caso es $c_d = -926$, tendremos:

$$\begin{array}{l}
1\;2\;0\,.\,3\;9(3 \\
\;\;2\;7\;\;7\;8 \\
\hline
\;\;9\;2\;\;6(1 \\
\;\;9\;2\;\;6 \\
\hline
\qquad\;\;0
\end{array}$$

luego, podemos escribir

$$120.393 = 3^3 \,.\, 7^3 \,.\, 13.$$

3.° Descomponer en sus factores primos el número 11.486.475.

Por ser superior al millón, aplicaremos directamente el grupo (3, 7, 11, 13, 17), cuyo $c_d = -5105$, obteniendo

$$\begin{array}{l}
1\;1\;4\;8\;6\;4\;7(5 \\
\quad\;\;2\;5\;5\;2\;5 \\
\hline
1\;1\;2\;3\;1\;2(2 \\
\;\;1\;0\;2\;1\;0 \\
\hline
1\;0\;2\;1\;0(2 \\
1\;0\;2\;1\;0 \\
\hline
\qquad 0
\end{array}$$

luego en principio

$$11.486.475 = 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 225$$

y como $225 = 3^2.5^2$, se tiene, finalmente,

$$11.486.475 = 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17.$$

15. Es evidente que lo anterior representa el caso ideal de que el número dado sea múltiplo de todos los que componen el grupo. Sin embargo, es posible obtener un mayor provecho de las fórmulas [3] o [4], bastando que el número sea múltiplo de uno solo de los componentes para que pueda ser hallado su cociente.

En efecto, supongamos para fijar ideas que N_1 sea $\dot{p}_1$ y de p_2; en este caso de la [3]

$$N_1 = 10^{k-1} N_k + (10^{k-2} u_{k-1} + 10^{k-3} u_{k-2} + \dots + 10 u_2 + u_1) \overset{k}{\underset{1}{\pi}} p_i ,$$

haciendo $N_k = p_1 . p_2 . c$, queda

$$N_1 = 10^{k-1} c. p_1 p_2 + (10^{k-2} u_{k-1} + 10^{k-3} u_{k-2} + \dots + 10 u_2 + u_1) p_1 p_2 \overset{k}{\underset{3}{\pi}} p_i$$

y de aquí,

$$N_1 = p_1 p_2 \left[10^{k-1} c + N \overset{k}{\underset{3}{\pi}} p_i \right] \qquad [5]$$

Si el carácter distintivo fuera aditivo, en idéntico supuesto llegaríamo a la expresión

$$N_1 = p_1 p_2 \left[10^{k-1} c - N \overset{k}{\underset{3}{\pi}} p_i \right] \qquad [6]$$

Resolvamos, para fijar ideas, unos ejemplos bien simples:

a) Descomponer en sus factores primos el número 931.

Consideraremos el grupo (3, 7), siendo $c_d = -2$, tendremos:

$$\begin{array}{l} 9\,3\,(1 \\ \;\;2 \\ \hline 9\,(1 \\ 2 \\ \hline 7 \end{array}$$

En este caso tendremos según [5]:

$$931 = 7 [10^2 + 3 . 11] = 7.133.$$

b) Descomponer en sus factores primos el número 31395.

Tomaremos como base el grupo (13, 17), $c_d = -22$

$$\begin{array}{l}
3\,1\,3\,9(5 \\
\;\;1\,1\,0 \\
\hline
3\,0\,2(9 \\
1\,9\,8 \\
\hline
1\,0\,4
\end{array}$$

104 es $\dot{13}$, luego, según [5]

$$31395 = 13\,[10^2 . 8 + 95 \times 17] = 13 \times 2415$$

y como fácilmente se deduce que

$$2415 = 5 \times 483 = 3 \times 5 \times 161 = 3 \times 5 \times 7 \times 23$$

tendremos que

$$31395 = 3 \times 5 \times 7 \times 13 \times 23.$$

Sea, por último, descomponer en sus factores 953.887.935. Aplicando el grupo para mayores del millón, tendremos:

$$\begin{array}{r}
9\,5\,3\,8\,8\,7\,9\,3(5 \\
2\,5\,5\,2\,5\;\;\; \\
\hline
9\,5\,3\,6\,3\,2\,6(8 \\
4\,0\,8\,4\,0\;\;\; \\
\hline
9\,4\,9\,5\,4\,8(6 \\
3\,0\,6\,3\,0\;\;\; \\
\hline
9\,1\,8\,9\,1(8 \\
4\,0\,8\,4\,0\;\;\; \\
\hline
5\,1\,0\,5(1 \\
5\,1\,0\,5\;\;\; \\
\hline
0\;\;\;
\end{array}$$

Por tanto, en principio

$$953887935 = 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 18.685$$

y teniendo en cuenta que

$$18685 = 5 \times 3.737$$

y de aquí, siendo $3737 = 37 \times 101$, resulta en definitiva

$$953887935 = 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 37 \times 101,$$

que nos permite darnos cuenta de la bondad del procedimiento expuesto.