Racional interpretación práctica de la teoría de la construcción de las tablas de mortalidad y similares actuariales

Por ANTONIO LASHERAS-SANZ,
Catedrático de «Matemática del Seguro».
Profesor honorario del Departamento de Estadística
del Instituto «Jorge Juan» de Matemáticas,
del Consejo Superior de Investigaciones Científicas.
Consejero del Superior de Estadística Nacional.
Presidente del Instituto de Actuarios Españoles.

I

Si los razonamientos matemáticos para la construcción de tablas de mortalidad son relativamente sencillos, no sucede lo mismo en cuanto a la interpretación y valoración cuantitativa de los números de cabezas vivas y de fallecidas que deban entenderse como de edad exacta x a relacionar. Varios son los que se han dedicado al estudio de esta *teoría formal de la mortalidad*, como se la llama, pero solamente LEXIS *(Einleitung in die Theorie der Bevolkerungstatistik*, Strasbourg, 1873), sobre la base del famoso *esquema* conocido con su nombre, consiguió una gran generalidad y sencillez. Vamos, pues, a su amparo, a poner de relieve las diversas maneras de recoger la mortalidad que se desprenden de las diferentes consecuencias que se derivan de esa interpretación de las cuestiones esenciales que se presentan en el estudio de esa mortalidad, con el propósito de elaborar unas tablas a base de datos estadísticos recogidos por la observación real del fenómeno, particularmente por las entidades aseguradoras.

Para ello, comencemos por trazar un sistema de ejes coordenados rectangulares, como el de la figura que sigue:

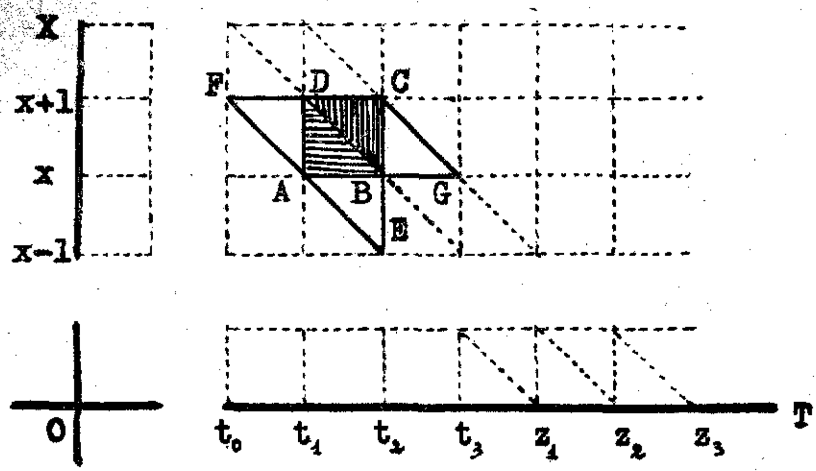

Figura 1.

En él, tomemos sobre el eje de las abscisas, 0T, la representación de las cantidades expresivas de *tiempo* y sobre el de las ordenadas, 0X, la de las edades. Por consiguiente, designemos por (t_0, t_1), (t_1, t_2), (t_2, t_3) los intervalos de tiempo en cada uno de los cuales nace una generación de personas, considerando que el momento del nacimiento es común para todas ellas y tiene emplazamiento gráfico en el mismo eje de las abscisas, con una edad respectiva 0 (cero).

Fijémonos en la generación nacida en el intervalo (t_1, t_2) y supongamos que la vida de cada uno de los individuos que la componen está correspondida o representada por una línea, que denominaremos *línea de vida*. De todas estas líneas de vida, unas habrán quedado interrupidas antes de alcanzar la altura del segmento AB, y serán las correspondientes a los fallecidos antes de alcanzar ese momento de su vida; otras líneas de vida lo alcanzarán y quedarán cruzadas por dicho segmento AB, significando todas aquellas cabezas (individuos) que han alcanzado esa altura de su vida, que designaremos por edad x, representaremos por $V_1(x, t_1)$ y denominaremos *primer conjunto de supervivientes*. De éstos, los habrá que fallecerán antes de alcanzar sus respectivas líneas de vida la altura del segmento DC, que representa gráficamente la edad $x + 1$; los puntos finales de estas líneas de vida quedarán dentro del rectángulo ABCD, serán la representación de los que, nacidos en el intervalo (t_1, t_2), han alcanzado la edad x y fallecen antes de alcanzar la edad $x + 1$, constituirán el *primer conjunto de fallecidos* y los representaremos por M_1 (x, t_1). Las cabezas cuyas líneas de vida crucen el segmento DC son las que alcanzan la edad $x + 1$, constituyen lo que designaremos primer conjunto de supervivientes a la edad $x + 1$ y lo representaremos por V_1 (x + l, t_1).

Si ahora, a los puntos t_1, t_2, t_3 les añadimos los tiempos que significan las edades sucesivas $x - 1$, x, $x + 1$, respectivamente, obtendremos otros momentos de tiempo posteriores que señalaremos con z_1, z_2, z_3. Los intervalos definidos por estos puntos (z_1, z_2), (z_2, z_3)..., son intervalos de tiempo posteriores en que nos encontraremos emplazados para estudiar la mortalidad y supervivencia de quienes nacieron en el intervalo general (t_1, t_2). Por ejemplo: Cuando con base del Censo del año 1940 [= (z_1, z_2)] estudiamos la mortalidad de los supervivientes de los que nacieron el año 1900 [= (t_1, t_2)] y en ese año 1940, como uno de los términos de la serie que significa el Censo de población, han entrado en nuestra observación.

Generalmente, $t_2 = t_1 + 1$ y $z_2 = z_1 + 1$, lo que quiere decir que comúnmente la unidad de tiempo es el año, que es la que adoptaremos para todos los posteriores razonamientos. También repetimos que $z = t + x$.

Tracemos desde el punto z_2 la línea que corte diagonalmente al cuadrilátero ABCD o primer conjunto de fallecidos, M_1 (x, t_1), y sus paralelas anterior y posterior correspondientes a los puntos z_1 y z_3. Estas líneas reciben el nombre de *isócronas*. La isócrona del punto z_2 divide, naturalmente, en dos partes triangulares iguales al cuadrilátero que atraviesa. Por otro lado, la isócrona del punto z_1 da lugar a la formación de otros dos paralelogramos superpuestos, en parte, entre sí y, a su vez y asimismo en parte, sobre el cuadrilátero. Veamos a qué consecuencias nos conducen estos hechos.

El paralelogramo AEBD nos ofrece una serie de puntos finales de líneas de vida contenidos en él, procedentes todas de la generación (t_1, t_2) que denominaremos *segundo conjunto de fallecidos* y representaremos por M_2 (x, t_1), lo que nos pone de relieve que TODOS LOS QUE, PROCEDENTES DE UNA MISMA GENERACIÓN, FALLECEN EN UN MISMO AÑO DE OBSERVACIÓN SON DE DOS EDADES CONSECUTIVAS, una de ellas la que corresponde a $z - t$ y otra, su antecedente; en nuestro caso, x y $x - 1$.

Consecuentemente, el segmento AE de la isócrona al punto z_1 constituye lo que nombraremos *segundo conjunto de supervivientes*, $\bar{V}_2$ (t_1, z_1), y el segmento BD, V_2 (t_1, z_2).

Análogamente, los puntos finales de líneas de vida contenidos en el paralelogramo ABDF constituyen un *tercer conjunto de fallecidos*,

$M_3(x, z_1)$, que nos dice cómo *todos los fallecidos a una misma edad durante* UN MISMO AÑO DE OBSERVACIÓN PROCEDEN DE LAS RESPECTIVAS GENERACIONES DE DOS AÑOS CONSECUTIVOS; en nuestro caso (t_0, t_1) y (t_1, t_2).

El ilustre estadístico español Ros JIMENO resalta los tres grupos de fallecidos denominándolos:

1.º *Heterócronos:* fallecidos de la misma generación a la misma edad, en épocas distintas, que es el caso de los fallecidos contenidos en el cuadrilátero ABCD;

2.º *Heterobios:* fallecidos de la misma generación en la misma época, de edades distintas, que es el caso del paralelogramo ADBE, y

3.º *Heterógenos:* fallecidos de la misma edad en la misma época, de generaciones distintas, que es el caso del paralelogramo ABDF.

II

Las isócronas nos forman, según se aprecia en el gráfico, unos triángulos rectángulos, cada uno de los cuales contiene un cierto número de fallecidos, a los que denominaremos, respectivamente, según el caso, *primer* o *segundo conjunto elemental de fallecidos,* que representaremos por μ afectada del subíndice que expresará el orden. Así se tiene:

$\mu_1(x, t_1, z_1)$, los puntos del triángulo BCD;

$\mu_2(x, t_1, z_1)$, ídem los del BAD;

$\mu_1(x, t_0, z_1)$, ídem del ADF,

y sucesivamente.

Dada la fijación de conceptos que queda expuesta, es natural que

$$\mu_1(x, t_1, z_1) + \mu_2(x, t_1, z_1) = M_1(x, t_1)$$

Si, llegados a esta altura, admitimos que las variaciones en los números de nacimientos correspondientes a dos años consecutivos sean muy pequeñas y, por consiguiente, no tenibles en cuenta; así como que la ley de mortalidad ejerce una acción constante, como consecuencia, se podrá admitir que *dos conjuntos elementales relativos a las mismas edades y a períodos de tiempo adyacentes, contienen el mismo número de puntos de fallecimiento.* Por consiguiente:

$$\mu_1(x, t_0, z_1) \simeq \mu_2(x, t_1, z_1) \simeq \mu_1(x, t_1, z_1)$$

de donde se desprende

$$\mu_2(z, t_1, z_1) \simeq \tfrac{1}{2} M_3(x, z_1)$$

Dada la naturaleza de los conjuntos de vivos, se tiene:

$$V_2 (t_1, z_2) = V_1 (x, t_1) - \mu_2 (x, t_1, z_1)$$

por lo que

$$V_1 (x, t_1) \simeq V_2 (t_1, z_1) + \tfrac{1}{2} M_3 (x, z_1)$$

III

Los conjuntos de supervivientes de la forma $V_1 (x, t)$ son los números de supervivientes que, procedentes de una generación $(t, t + 1)$, han alcanzado o tienen exactamente la edad x, es decir: l_x.

Por su parte, el conjunto $V_2 (t_1, z_2)$ está constituído por líneas de vida de quienes, procedentes de una generación dada, tienen edades comprendidas entre x y $x + 1$, o sea: L_x.

El conjunto de fallecimientos $M_1 (x, t)$, de entre una generación t a $t + 1$, es el número d_x.

Los números l_x y L_x tienen significación propia directa. l_x representa el número de los que tienen exactamente la edad x, provinentes de otro grupo de cabezas vivas, todas de una misma edad anterior, $x - k$. Interpreta, pues, el concepto de término de una serie o tabla de supervivencia, que puede definirse diciendo que es *la que nos presenta los números de supervivientes a cada edad entera, provinentes de otro cierto número de ellos a una determinada edad entera y común inicial.*

Por su parte, L_x representa el número de los que, en un momento dado, tienen edades comprendidas entre x y $x + 1$, la primera inclusive y no la segunda. Responde al concepto de término de la serie que clasifica, por edades singulares referidas a una determinada fecha, un cierto núcleo de población; es el resultado de un *Censo* practicado para proceder al recuento de ese núcleo de población.

De cuanto antecede se desprende la relación entre L_x y l_x, que vamos a justificar matemáticamente, ya que la hemos determinado antes estadísticamente. En efecto, dada la composición de L_x, podemos escribir:

$$\begin{aligned} L_x &= \int_0^1 l_{x+\theta} \cdot \partial\theta \\ &\simeq \int_0^1 (l_x - \theta . d_x) \, \partial\theta \\ &= l_x - \tfrac{1}{2} d_x \\ &= l_{x+\frac{1}{2}} \\ &= \tfrac{1}{2} (l_x + l_{x+1}) \end{aligned}$$

IV

Procede ahora aplicar cuanto antecede a la construcción concreta de tablas de mortalidad. Estas pueden ser de varias especies, según los conjuntos de fallecidos y de supervivientes que, respectivamente, relacione. Así, tenemos las de primera especie o por generaciones, la de segunda especie o de coetáneos y las de tipo mixto que, a su vez, se desarrollan en otras dos especies, según guarden relación básica con la primera o con la segunda especie. Vamos a considerar por separado a cada una de ellas.

A. Tablas (puras) por generaciones.

Consisten, de conformidad con lo dicho al establecer los conjuntos de muertos y vivos de primer orden, $M_1(x, t_1)$, $V_1(x, t_1)$ y $V_1(x+1, t_1)$, en elegir un número, cuanto mayor, mejor, de nacidos vivos en un año, preferiblemente en el mismo día, y seguirlos observando durante el curso de toda su vida, no sometido a más motivo de salida de observación que la mortalidad, anotando en cada uno de los sucesivos años, el mismo día aniversario de su nacimiento, el número de los supervivientes que han alcanzado la edad que ese año implica, hasta la total extinción del grupo o generación. En estas condiciones, obtendremos una serie de números de la forma l_x, y por diferencia entre cada dos consecutivos, al correspondiente número de fallecidos:

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

Pero este procedimiento, que es el más riguroso y nos permitiría construir una tabla que nos revelase la verdadera vitalidad del grupo o generación, es *el único que no puede adoptarse por razones* diversas, entre las que, como más principales, podemos citar las siguientes:

1.ª Necesita disponer de un número grandísimo de nacimientos para que pueda haber una certidumbre moral de que la probabilidad o tanto anual de fallecimientos,

$$\frac{M_1(x, t)}{V_1(x, t)} = \frac{d_x}{l_x} = q_x$$

se aproxima *lo más posible a la verdadera* probabilidad del hecho;

2.ª Para obtener un número tan grande es preciso elegir un territorio excesivamente amplio, lo que llevará, dentro de la homogeneidad genérica (hombres observados), a una heterogeneidad específica (por las diferencias étnicas, climatológicas, etc.).

3.ª Habría que extender la observación a un período o lapso de años, seguramente no inferior a cien, y

4.ª Por progresos de la ciencia y mejoramiento de las condiciones de vida, las causas de la mortalidad varían en su acción, haciendo que a determinados intervalos sea la mortalidad específicamente heterogénea.

B. Tablas de contemporáneos.

Ya que la observación estadística no nos permite obtener directamente los elementos a relacionar que exige la anterior especie de tablas de mortalidad, preciso será que nos avengamos a operar sobre los datos que podamos obtener directamente por observación inmediata al amparo de un *Censo,* o recuento general del estado de una población clasificada por edades y referido a un momento dado, y de los *fallecimientos* anuales. A tal fin, y volviendo al gráfico, si el momento en que se practica el Censo es el z_2, nos proporcionará los conjuntos de supervivientes de la forma $V_2\ (t_1, z_2)$, $V_2\ (t_2, z_2)$..., y la mortalidad observada durante el intervalo $(z_1 . z_2)$ será, a su vez, de la forma respectiva $M_3\ (x, z_1)$..., según la edad, donde como ya hemos dicho:

$$V_2\ (t_1, z_2) = L_x$$

y

$$M_3\ (x, z_1) = d'_x$$

Debemos resaltar que, en sentido estricto, la d_x empleada en el caso de las tablas de la primera especie o por generación es distinta de esta otra d'_x que interviene en las de que ahora nos ocupamos, aun cuando los dos símbolos representan fallecidos después de cumplida la edad x y antes de cumplir la $x + 1$. Después de todo lo que queda dicho, no creemos que haga falta repetir más, si no es confrontar nuevamente $d_x = M_1\ (x, t_1)$ con $d'_x = M_3\ (x, z_1)$.

Otra aclaración debemos hacer al llegar aquí. Se trata de que, cuando nos referimos a un núcleo que constituye supervivientes de una generación, no solamente podemos obtener el conjunto de supervivientes $V_1\ (x, t_1) = l_x$, sino también el $V_2\ (t_1, z_1) = L_x$, ya definidos uno y otro, que, según se ha visto, igualmente están unidos por la relación:

$$L_x \simeq \tfrac{1}{2}(l_x + l_{x+1}) = l_{x+\frac{1}{2}}$$

cuya representación gráfica en la figura es el segmento BD. Y ello hace que

$$L_x + L_{x+1} + L_{x+2} + \ldots \simeq \tfrac{1}{2}\ l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots$$

Esto daría lugar a lo que constituye una *tabla pura de contemporáneos.*

Pero cuando se trata de *tablas mixtas*, de la segunda especie, ello no es así. La población observada se compone de individuos procedentes de distintas generaciones, expuestos a la muerte en un mismo período y, aun cuando ofrecen homogeneidad en las circunstancias generales del tiempo en que se producen los fallecimientos, no hay esa homogeneidad en cuanto a que lleguen a nuestra observación todos los supervivientes de la generación absoluta a que pertenecen, sino que suponen supervivientes de grupos originales sin ninguna coordinación social. Así, los diferentes conjuntos de supervivientes serán de la forma:

$$L'_x \; , \; L''_{x+1} \; , \; L'''_{x+2} \; , \dots ,$$

cada uno de los cuales constituirá un término de una serie de tal clase, homogénea, pero cuyos términos antecedentes y consecuentes se desconocen.

En el caso de que fuesen términos con homogeneidad de origen (por ej.: una población cerrada sujeta nada más que a los fenómenos natalidad y mortalidad, aparte la nupcialidad que, para nuestro propósito, no nos desfigura el aspecto cuantitativo de la misma), tendríamos que, como sucede en la realidad, los fallecimientos de edad x acaecidos en el año (z_1, z_2) serán $M_3(x, z_1)$ y los causados al final de dicho intervalo, en el momento z_2, serán de la forma $V_2(t_1, z_2)$.

Amparándonos en la hipótesis formulada anteriormente, de que dos conjuntos elementales relativos a la misma edad y a períodos de tiempo adyacentes contengan el mismo número de puntos de fallecimientos, podremos obtener la siguiente equivalencia:

$$M_1(x, t_1) \simeq \tfrac{1}{2}\left\{M_3(x, t_1, z_1) + M(x, t_2, z_2)\right\}$$

lo que nos dice que aproximadamente podemos tomar como número de fallecidos entre las edades x y $x + 1$ correspondientes a la generación partícular que significa el conjunto de supervivientes proporcionado por el Censo, $V_2(t_1, z_2) = L_x$, la media aritmética de los fallecimientos registrados por la estadística entre esas edades x y $x + 1$ durante el año censal y el postcensal.

Una vez hecho esto, podremos relacionar el número, d_x, así obtenido con L_x, de forma que obtendremos una función del orden de $q_x = \frac{d_x}{l_x}$, pero que no será ella, sino otra:

$$m_x = \frac{d_x}{L_x},$$

conocida con el nombre de ***tanto central de mortalidad.***

En virtud de las relaciones establecidas entre L_x, l_x y d_x, puédese escribir:

$$m_x = \frac{d_x}{L_x} = \frac{d_x}{l_x - \frac{1}{2} d_x}$$

que, dividiendo por l_x sus dos miembros, se convierte en:

$$= \frac{q_x}{1 - \frac{1}{2} q_x},$$

de donde se desprende que

$$q_x = \frac{2 m_x}{2 + m_x}$$

También, teóricamente, pudiera procederse relacionando el conjunto $M_8 (x, t_1, z_1)$ con el resultante de tomar

$$\frac{1}{2} \{V_2 (t_0, z_1) + V_2 (t_1, z_2)\};$$

pero, aparte otras consideraciones que en sentido adverso podrían invocarse, está la de que los Censos de población no son operaciones practicables anualmente, sino a determinados intervalos, lo que impide proceder de tal manera.

Al construir unas tablas de esta especie, es indudable que ejercerá una determinada influencia la circunstancia de heterogeneidad de origen de las generaciones, pero es una causa de errores sistemáticos de difícil, por no decir prácticamente imposible, evitación.

C. Tablas de experiencia.

Forman éstas un cierto tipo de *tablas mixtas*, construídas con base de las observaciones que permiten llevar a cabo los seguros concertados por una entidad aseguradora o por un grupo de ellas.

Para ello se comienza por extender una ficha para cada seguro (póliza o documento análogo) que haya existido o exista en vigor dentro del período de tiempo a que se extienda la observación. Como puede ocurrir que, sobre una misma persona asegurada, existan o hayan existido, o ambas cosas, varios seguros, se reunirán todas las fichas que hayan resultado sobre un mismo asegurado, resumiéndolas en otra de la misma clase que las anteriores, que tendrá como fecha de efecto inicial la del seguro que tenga origen más antiguo, y efecto último (fallecimiento, anulación o substitución) la del seguro que más posterior lo tenga.

Puede suceder que, en el caso de algunos asegurados, hayan tenido un seguro que anulasen y luego hayan rehabilitado o que, en lugar de rehabilitación, se trate de seguro o seguros nuevos. En estos casos, si no ha existido previa *selección médica* a la entrada en el seguro, nada procederá hacer en la antedicha reagrupación; pero si se practica dicha selección, cuando el corte en la continuidad de la observación no sea superior a seis meses (por ejemplo, u otro plazo que se establezca), nada procederá tener en cuenta, y si lo es, se tomará cada época como unidad distinta de riesgo.

Una vez hecho esto se agrupan las fichas por edades con relación a una fecha determinada, lo más próxima posible al momento inicial del período de observación, operando sobre las fichas de asegurados vivos en dicha fecha, como si se elaborase un Censo, con lo que resultaran clasificados por edades los asegurados vivos entonces, designando como de edad x en aquel momento a todos los que tengan edad x cumplida y no hayan cumplido la edad $x + 1$. En este recuento no entrarán los asegurados cuyo ingreso en seguro sea posterior a la fecha de referencia.

Al propio tiempo se contarán los asegurados ingresados como nuevos durante el intervalo del año de calendario que comienza en la fecha elegida para practicar el Censo, y con respecto a ella, clasificados por edades, considerando asimismo como de edad x a todos los que la tengan cumplida en el momento de ingresar en seguro y no hayan cumplido la $x + 1$. Análogamente se procederá con los fallecidos en iguales circunstancias de esta clase y con los seguros anulados o caducados.

Para igual fecha del siguiente año se volverá a efectuar otro recuento de los que en ella tuviesen seguros en vigor, clasificados por edades de la manera antedicha. Y para el intervalo de la anualidad que comienza en ella, se recogerán también los nuevos ingresos, los fallecimientos y las salidas por otros conceptos habidos en él, de la misma manera que se acaba de exponer para el año anterior.

Es así que iremos obteniendo series de líneas isócronas como las que figuran en el gráfico para los distintos puntos y respectivos intervalos de observación, ... $z_1, z_2, z_3, \ldots$, de la forma $V_2 (t_1, z_1)$, y paralelogramos del tipo de $M_3 (t_1, z_1)$, para los fallecimientos entre dos edades consecutivas y un cierto año de observación (z_1, z_2). También los nuevos ingresos y las salidas por otros conceptos distintos de la muerte, darán lugar a conjuntos que representaremos, respectivamente, por $I_3(t_1, z_1)$ y $S_3(t_1, z_1)$, y tendrán análogo tratamiento que el de los fallecimientos.

En consecuencia, deberá suceder que:

$$V_2(t_1, z_2) = V_2(t_1, z_1) + I_2(t_1, z_1) - M_2(t_1, z_1) - S_2(t_1, z_1)$$

Aquí, como la observación nos proporcionará los conjuntos de las formas $I_3(x, z_1)$ é $I_3(x-1, z_1)$, $M_3(x, z_1)$ y $M_3(x-1, z_1)$, $S_3(x, z_1)$ y $S_3(x-1, z_1)$, podremos establecer:

$$I_2(t_1, z_1) = \tfrac{1}{2}\{I_3(x, z_1) + I_3(x-1, z_1)\}$$
$$M_2(t_1, z_1) = \tfrac{1}{2}\{M_3(x, z_1) + M_3(x-1, z_1)\}$$
$$S_2(t_1, z_1) = \tfrac{1}{2}\{S_3(x, z_1) + S_3(x-1, z_1)\}$$

Ahora bien, por observación obtendremos el valor numérico de los conjuntos de la forma $V_2(t_1, z_2)$, y por el cálculo anterior, otro semejante, $V'_2(t_1, z_2)$, que puede resultar igual, mayor o menor que el directamente observado. En caso de diferencia $\pm \delta$, ésta se repartirá proporcionalmente en disminución o aumento, respectivamente, de los conjuntos I_2, M_2 y S_2, con lo que obtendremos los valores definitivos de éstos a emplear. Sus duplos han de resultar, asimismo respectivamente, iguales a las sumas de sus homólogos de tercer orden, pudiendo suceder que aquellos duplos sean mayores o menores que estas sumas, en cuyo caso, la diferencia habrá que aumentarla o disminuirla proporcionalmente entre los sumandos. Así será exacta la relación antes expuesta entre $V_2(t_1, z_1)$ y $V_2(t_1, z_2)$ y los valores corregidos: I'_3, M'_3 y S'_3.

Los conjuntos de fallecidos de tercer orden son los que habrá que aplicar, a su vez, para obtener, por la media aritmética de cada dos consecutivos, el valor de los conjuntos de primer orden, $M_1(x, t_1)$.

Aquí se plantea una cuestión incidental a dilucidar: si se trata de construir una tabla que permita conocer el grado de vitalidad del grupo observado (o probabilidad de vida o/y muerte) o la frecuencia relativa de mortalidad a cada edad, que son dos cosas distintas. En el primer caso hay que tener en cuenta el tiempo vivido, en el año en que sucede, por los que han fallecido, restando al número total de cabezas vivas al principio del año, considerando que cada una viva un año completo, el número de años enteros de vida que supone el tiempo vivido por cada uno de los fallecidos en el año de la muerte.

Si el número de cabezas de edad x al principio del año es l_x y el de los que fallecen durante ese año es d_x, admitiendo la hipótesis de la *distribución uniforme* de los fallecimientos durante el año, el número de años enteros de vida correspondiente a las cabezas fallecidas que habrá que deducir de los que supondrían las l_x cabezas vivas al final de ese año si llegasen a él, es, por término medio y en junto $\frac{1}{2} d_x$. Por consiguiente, la vitalidad efectiva aproximada de las l_x cabezas es $l_x - \frac{1}{2} d_x$ y el coeficiente que mide el grado de ella es:

$$\frac{d_x}{l_x - \frac{1}{2} d_x} = m_x ,$$

que no es otra cosa que lo que conocemos por *tanto central de mortalidad*.

En el segundo caso sólo se trata de relacionar el número de fallecidos, d_x, al total de cabezas de que proviene:

$$\frac{d_x}{l_x} = q_x ,$$

que es el concepto de *tanto anual de mortalidad.*

A los fines del Seguro, lo que interesa es el concepto de frecuencia relativa y no el del grado de vitalidad o probabilidad. En efecto: supongamos un grupo de l_x cabezas que convienen en hacer una aportación cada una para que, al ocurrir fallecimientos de entre ellas, sus respectivos derechohabientes perciban una cantidad C por cada uno; representando por A_x la cantidad única con que habrá de contribuir cada uno de los l_x tendremos:

$$l_x . A_x = C\left(v^{\frac{1}{2}} d_x + v^{1+\frac{1}{2}} d_{x+1} + ...\right)$$

de donde:

$$A_x = C\left(v^{\frac{1}{2}} \frac{d_x}{l_x} + v^{1+\frac{1}{2}} \frac{d_{x+1}}{l_x} + ...\right)$$

que confirma nuestra anterior afirmación respecto a $\frac{d_x}{l_x}$, $\frac{d_{x+1}}{l_x} = \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{d_{x+1}}{l_{x+1}}$, etc.

De todas formas, ya conocemos y anteriormente hemos recordado, que $q_x = \frac{2\, m_x}{2 + m_x}$.

Entonces, pues, establecidos los valores de los conjuntos de la forma $M_1 (x, t_1)$, $V_1 (x, t_1)$ y $V_2 (t_1, z_2)$, se podrá obtener cualquiera de las dos relaciones, m_x ó q_x, y esta última, directa o indirectamente, en función de la primera.

Estas tablas, sobre la base fundamental de lo que queda dicho, pueden construirse conforme a alguno de los tres criterios que vamos a detallar a continuación, dando lugar a alguna de las tablas específicas denominadas, respectivamente, de *por edades de entrada, truncadas* o *de agregados.*

Las de la primera clase, o TABLAS POR EDADES DE ENTRADA, son las que se construyen partiendo del grupo de nuevos asegurados ingresados en cada intervalo, (z_0, z_1), (z_1, z_2)..., de observación, clasificados por edades en grupos o conjuntos de la forma:

$$V_2([t_1], z_2) = L_{[x]}^{(t_1)}, \; V_2([t_2], z_3) = L_{[x]}^{(t_2)}, \; V_2([t_3], z_4) = L_{[x]}^{(t_3)}, \ldots$$

de los que se derivarán sucesivamente:

$$V_2([t_1], z_3) = L_{[x]+1}^{(t_1)}, \; V_2([t_1], z_4) = L_{[x]+2}^{(t_1)}, \ldots$$

$$V_2([t_2], z_4) = L_{[x]+1}^{(t_2)}, \; V_2([t_2], z_5) = L_{[x]+2}^{(t_2)}, \ldots$$

etcétera, y que hacen los siguientes complejos:

$$\sum_{j=0}^{\omega} V_2([t_j], z_{j+1}) = \sum_{j=0}^{\omega} L_{[x]}^{(t_j)}$$

$$\sum_{j=0}^{\omega} V_2([t_j], z_{j+2}) = \sum_{j=0}^{\omega} L_{[x]}^{(t_j)}$$

etcétera.

Los corchetes significan la época o, en su caso, la edad de entrada en observación, y ω representa la edad última observada.

A estos conjuntos de supervivientes se enfrentarán los correspondientes de fallecidos:

$$M_3([x], z_1) = d_{[x]}^{(t_1)}, \; M_3([x], z_2) = d_{[x]}^{(t_2)}, \; M_3([x], z_3) = d_{[x]}^{(t_3)}, \ldots$$

$$M_3([x+1], z_2) = d_{[x+1]}^{(t_2)}, \; M_3([x+1], z_3) = d_{[x+1]}^{(t_3)}, \ldots$$

etcétera, y también:

$$M_3([x]+1, z_2) = d_{[x]+1}^{(t_1)}, \; M_3([x]+1, z_3) = d_{[x]+1}^{(t_2)}, \ldots$$

$$M_3([x]+2, z_3) = d_{[x]+2}^{(t_1)}, \; M_3([x]+2, z_4) = d_{[x]+2}^{(t_2)}, \ldots$$

etcétera.

Estos conjuntos y todos los que pueden formarse análogos a ellos, similarmente o como hemos visto que sucede con los de supervivientes, darán lugar a estos otros:

$$\sum_{j=0}^{\omega} M_3([x], z_j) = \sum_{j=0}^{\omega} d_{[x]}^{(t_j)}, \ldots$$

....

$$\sum_{j=0}^{\omega} M_3([x]+k, z_{k+j}) = \Sigma\, d_{[x]}^{(t_j)}, \ldots$$

donde podrán tomarse para x todos los valores posibles propios del caso.

Las denominadas TABLAS DE «AGREGADOS» son las que involucran todos los conjuntos, tanto para los supervivientes como para los fallecidos, sin distinción de edad de entrada, como las expresiones de configuración general:

$$\sum_{j=0}^{\omega} V_2(t_j, z_{j+1}) = \sum_{j=0}^{\omega} L_x^{(t_j)}$$

y

$$\sum_{j=0}^{\omega} M_3(x, z_j) = \sum_{j=0}^{\omega} d_x^{(t_j)}$$

en las que x puede tomar todos los valores posibles.

Por último, las conocidas por TABLAS TRUNCADAS son las que están formadas por unas tablillas por edades de entrada, cortas, de una duración igual al número de años por que persistan los efectos de la previa selección médica de entrada, pasando luego a confundirse los supervivientes con los de una tabla de «agregados». Son mixtas de las dos anteriores clases y tienen la configuración general siguiente:

$$\sum_{j=0}^{n-1} V_2([t_j], z_{j+k}) + \sum_{j=n}^{\omega} V_2(t_j, z_{j+k}) = \sum_{j=0}^{n-1} L_{[x]+k}^{(t_j)} + \sum_{j=n}^{\omega} L_{x+n+k}^{(t_j)}$$

y

$$\sum_{j=0}^{n-1} M_3([x]+k, z_{k+j}) + \sum_{j=n}^{\omega} M_3(x+k, z_{j+k}) = \sum_{j=0}^{n-1} d_{[x]+k}^{(t_j)} + \sum_{j=n}^{\omega} d_{x+n+k}^{(t_j)}$$

V

Vamos a terminar el presente estudio haciendo una exposición, sobre el esquema de Lexis, de la recapitulación de datos llevada a cabo para la construcción de las Tablas denominadas A. F. (Asegurados franceses) y R. F. (Rentistas franceses) tan generalmente empleadas en España, a fin de ver cómo se compadece con ese esquema el criterio sustentado.

Las fichas correspondientes a cada unidad de riesgo fueron repartidas en grupos definidos por la misma época de nacimiento (1.° de julio de un año y 30 de junio del siguiente) y el mismo semestre de entrada en seguro u observación (1.° de enero a 30 de junio o 1.° de julio a 31 de diciembre de un mismo año). Seguidamente el número de fichas de cada grupo fué contado, primero, sin separación de sexos y, luego, con distinción de ellos.

Los números resultantes de estos recuentos fueron recogidos en unos estadillos especiales que, en su cabecera, contenían la «fecha de nacimiento» o, mejor, la época de él (1.° julio-30 junio); la edad entera que suponia entre 31 de diciembre y 1.° de enero consecutivos, y el año de observación. Para cada edad se obtuvo una serie de hojas o estadillos de esta clase, que comprendían desde el nacimiento hasta la extinción de la vida humana; y, en cada serie, un estadillo para cada uno de los años transcurridos desde 1819 hasta 1889 inclusive. Estos estadillos tenían por objeto proporcionar, edad por edad y año por año, el número de cabezas expuestas al riesgo y el de fallecimientos.

El método aplicado para el recuento y totalización de los datos se debe a Kertanguy y fué aplicado por primera vez en 1874 para la construcción de una *tabla* con los asegurados de la «Compañía de Seguros Generales», de Francia, bajo la dirección de la Comisión de actuarios, integrada por MM. Martin-Dupray, Paul Guieysse, sustituído más tarde por Oltramare, Cosmao Dumanoir y León Marie, la que lo adoptó con preferencia a ningún otro por las tres razones siguientes:

1.ª Simplifica los trabajos, presentando las observaciones en un orden más favorable a su agrupación;

2.ª Permite algunas comparaciones en el curso de los cálculos, siendo éstos, por consiguiente, más simples y ofreciendo menos exposición a errores, y

3.ª Deja, sobre todo, campo abierto a una continuación posterior agregando a las anteriores observaciones las realizadas durante algún otro tiempo posterior.

Este método adopta la hipótesis de la distribución uniforme de los nacimientos y de los fallecimientos, así como la de entrada en vigor de los diferentes seguros y la salida por causas distintas a la de muerte. Por esto se considera que tienen exactamente edad x todos los que la tienen comprendida entre $x - \frac{1}{2}$ y $x + \frac{1}{2}$, y que, por tanto, esa edad la tienen, en el momento límite de separación entre el 31 de diciembre de un año y el 1.° de enero del siguiente, todas las cabezas cuya fecha de nacimiento esté comprendida entre el mismo 1.º de julio del primer año y 30 de junio del segundo. Del mismo modo, se entiende como si hubiesen ingresado en seguro en el límite antedicho, 31 de diciembre-1.º enero, todos los que lo hicieron en el intervalo 1.º julio-30 junio.

Fijando ahora nuestra atención en la *figura 2*, tomaremos como

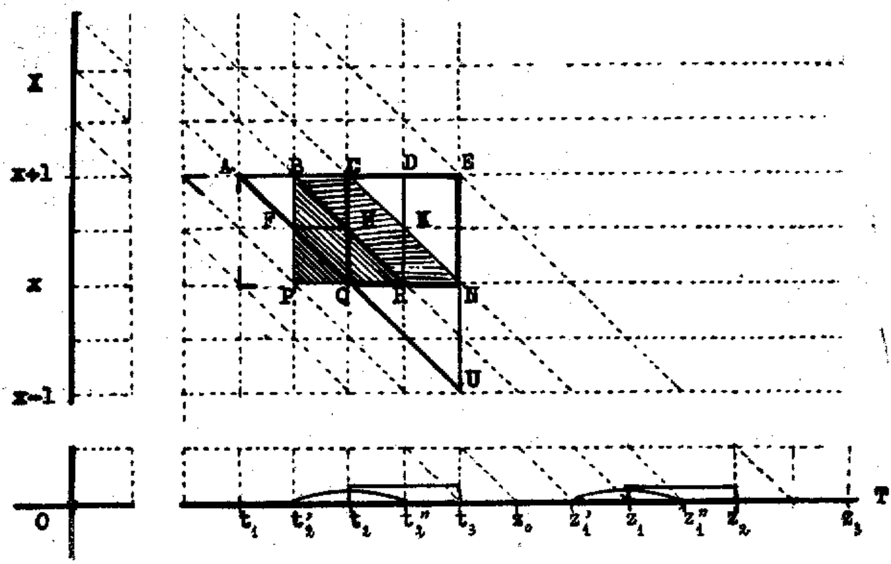

Figura 2.

ingresados en seguro en el momento z_1 (31 diciembre-1.º enero) un cierto número de cabezas que se aseguraron o entraron en observación en el intervalo unitario (el año) comprendido entre z'_1 (1.º de julio) y z''_1 (30 de junio siguiente), y cuya edad será la misma por haber nacido en el intervalo (también unitario) (t'_1, t''_1), o sea, en el momento t_1. El número de estos ingresados en observación (o puntos iniciales de sus líneas de vida) estarán comprendidos en el triángulo BPR. Ahora bien, durante el segundo semestre del año de observación (z_1, z''_1) entrará también en seguro un cierto número de cabezas cuya fecha de nacimiento será la misma que la de los ingresados en el intervalo (z'_1, z''_1) y producirán también mortalidad de la misma edad que los anteriores, cuyas líneas vitales tienen comienzo de observación en el paralelogramo BCNR. Todos los ingresados en observación, según esto, son aquellos cuyas líneas de vida tienen sus puntos iniciales de la observación comprendidas en el trapecio BCNP, que tiene una casi coincidencia con el paralelogramo del esquema, que determina la edad x correspondiente al año de observación (z_1, z_1), salvo el triángulo FPQ del trapecio y el ABF del paralelogramo. Ahora bien, según Lexis, cuando los elementos observados son lo suficientemente numerosos, los triángulos adyacentes, es decir, los números de puntos comprendidos en ellos, pueden considerarse práctica y aproximadamente iguales. Y por otra parte, el trapecio que podemos llamar de Kertanguy, tiene equivalencia con el rectángulo ADPR de Lexis, correspondiente a la generación (t'_2, t''_2), salvo los respectivos triángulos KRN y CDK, cuyos contenidos de puntos, por adyacentes tales figuras, pueden ser tomados como equivalentes.

Así, pues, representando, análogamente a como se ha hecho para los fallecidos, por $\varepsilon_1(x, t_1, z_0)$ el conjunto elemental de ingresados en observación, cuyos puntos iniciales están comprendidos en el triángulo ACQ, y por $\varepsilon_2(x, t_2, z_1)$ el conjunto correspondiente al triángulo CQN; por $I_1(x, t_2)$, los ingresados contenidos en CENQ; por $I'_1(x, t'_2)$, los contenidos en BDRP, y por $I_3(x, z_1)$, los ingresados, de edad x, en el intervalo (z_1, z_2) de observación, podremos escribir:

1.° $I_3(x, z_1) = \varepsilon_1(x, t_1, z_0) + \varepsilon_2(x, t_2, z_1)$;

2.° $\varepsilon_2(x, t_2, z_1) \simeq \frac{1}{2} I_3(x, z_1) \simeq \varepsilon_1(x, t_2, z_1)$;

3.° $I_4(x, t'_2) \simeq \varepsilon_2(x, t_2, z_1) + \frac{3}{4}\varepsilon_1(x, t_1, z_0) + \frac{1}{4}\varepsilon_2(x, t_1, z_0)$, que representa el número de ingresados comprendidos en el trapecio BCNP. El $\frac{1}{4}\varepsilon_2(x, t_1, z_0)$ proviene de considerar que cada triángulo de la forma ε_1 ó ε_2 y equivale a cuatro triángulos de segundo orden, como puede apreciarse en las figuras siguientes:

Figuras 3, *a* y *b*.

Además de estos ingresos, habrá otro cierto número de asegurados cuya fecha de nacimiento será la misma que la de los de nuevo ingreso a que nos hemos referido, los cuales provendrán del año anterior, por haber ingresado en él o persistir en seguro procedentes de otros años anteriores, que constituirán las *cabezas en curso* en el momento z_1 (31 de diciembre del año anterior de observación: z_0, z_1).

Estos estarán constituídos por las líneas de vida cortadas por el segmento PR de la *figura 2*, que representaremos por $V_1(x, t'_2)$.

El número de cabezas sometidas a observación durante el año (z_1, z_2), según el método de Kertanguy, es:

$$V_1(x, t'_2) + \varepsilon_1(x, t'_2, z'_1) + \tfrac{1}{4}\left[\tfrac{3}{4}\,\varepsilon_2(x, t_2, z_1) + \tfrac{1}{4}\,\varepsilon_1(x, t_1, z_0)\right]$$

Para el cómputo de los fallecimientos y de las anulaciones de seguros por otras causas, procedió clasificar nuevamente las fichas de unidades de riesgo en tres grupos (para A. F., pero dos para la R. F., por no haberse admitido entre los asegurados para caso de vida otra causa de extinción del seguro que la muerte). El primero comprendía todos los asegurados supervivientes en 31 de diciembre de 1889; el segundo, todos los fallecidos antes de esa fecha y el tercero, todos los que también antes de esa fecha habían abandonado su seguro.

Las fichas de cada uno de los grupos segundo y tercero fueron clasificadas nuevamente conforme al año de fallecimiento o anulación del seguro, y nacidos en la misma época (1.° julio-30 junio siguiente). La totalización de estos datos ha recogido simplemente los números de fallecidos y salidos por otros conceptos, de la misma edad y durante el año de observación (z_1, z_2). Así, pues, los conjuntos de muertos y salidos serán, respectivamente:

$$M_3(x, t_1) \text{ y } S_3(x, z_1)$$

De estos dos conjuntos, $S_3(x, z_1)$, durante el año en que tuvo lugar la rescisión de sus seguros, estuvo algún tiempo expuesto a proporcionar fallecimientos, e, inversamente, dejan de estar expuestos a ello durante la parte del año que media desde su salida hasta el fin de dicho año. Sobre la base de la hipótesis de la distribución uniforme de estas salidas de seguro, puede admitirse que en el año de esa salida, han dejado de estar expuestos a proporcionar observación durante medio año, todos, por término medio; y aun cuando no en el orden cualitativo, en el orden cuantitativo puede considerarse que el hecho de que los $S_3(x, z_1)$ han dejado de estar sometidos a observación durante medio año cada uno, es equivalente a que $\tfrac{1}{2} S_3(x, z_1)$ han cesado de ser observados durante un año entero.

Por tal razón, el *número de cabezas expuestas a riesgo*, según Kertanguy, será:

$$V_1(x, t'_2) + \varepsilon_1(x, t'_2, z'_1) + \tfrac{1}{4}\left[\tfrac{3}{4}\,\varepsilon_2(x, t_2, z_1) + \tfrac{1}{4}\,\varepsilon_1(x, t_1, z_0)\right] - \tfrac{1}{2} S_3(x, z_1)$$

Si a este número le restamos los números completos de fallecidos y salidos del seguro, tendremos el de *cabezas en curso al final del año:*

$$V_1(x+1, t'_2) = V_1(x, t'_2) + \varepsilon_1(x, t'_2, z'_1) + \tfrac{1}{4}\left[\tfrac{3}{4}\varepsilon_2(x, t_2, z_1) + \tfrac{1}{4}\varepsilon_1(x, t_1, z_0)\right] - M_3(x, z_1) - S_3(x, z_1).$$

Como puede observarse, aunque el método de Kertanguy ofrece aparente viso de realismo, analizado sobre el esquema de Lexis, se aprecian ciertas inexactitudes que esencialmente desvirtúan los resultados, aunque de modo no apreciable a simple vista. A nuestro juicio, el esquema este de Lexis ofrece el medio de interpretar los resultados de la observación en forma satisfactoria para los fines perseguidos.

VI

El esquema a que venimos refiriéndonos posee la propiedad de no ser exclusivo para el estudio de la mortalidad, sino que permite su aplicación a las series estadísticas propias de los seguros de invalidez, nupcialidad, viudedad, etc. Bastará para ello tomar, en lugar de supervivientes en términos absolutos, supervivientes en estado de validez, de viudedad, de soltería, etc., y en lugar de fallecidos simplemente, fallecidos en estado de actividad o validez, de inválidos, etc., o de fallecidos en estado de soltería, de casados, etc.