

## **Antecedentes para el estudio de una ley de supervivencia de un grupo profesional.**

Por **D. Francisco de Ipiña y Gondra,**  
Actuario al servicio del Instituto Nacional de Previsión.

Entre las actividades que requieren la colaboración del Actuario, tenemos ya hoy en lugar destacado la que ofrecen los Montepíos, Mutualidades y Cajas de Pensiones, en cuya administración se inicia la preocupación hacia una evolución en la técnica empírica y rudimentaria que siguen en la actualidad, para encauzarla dentro de normas actuariales apropiadas a esta clase de Instituciones de tipo social popular.

Fruto de un estudio de esta clase, son estos antecedentes estadístico-actuariales que ofrezco a la consideración y conocimiento de mis compañeros, aprovechando las reuniones anuales de 1943 del Instituto de Actuarios Españoles. Se trata de una Mutualidad constituida en 1930 (Previsión Médica Nacional), y que abarca una gran parte de las clases profesionales sanitarias españolas. En el día de la fecha cuenta con un número de asociados de 19.512 y el volumen de los socorros asegurados, por esta masa de mutualistas, sobrepasa la cifra de 450.235.000 pesetas.

La experiencia de supervivencia recogida es muy incompleta, tanto en el tiempo como en número de observaciones, pues se refiere al período de 1930 al 1940, reuniendo un total de cabezas observadas de 121.796, o sea expuestas a riesgo, y sobre las que corresponde una cifra de fallecimientos de 1.629; sin embargo, no deja de tener interés por tratarse de observaciones recogidas dentro de un grupo profesional.

Las manipulaciones estadísticas efectuadas han sido sumamente sencillas. En cada tarjeta estadística correspondiente a un mutualista expuesto a riesgo se han consignado, entre otros, los siguientes datos: fechas medias en 31 de diciembre más próximo a la fecha de entrada y salida del seguro (voluntaria o por siniestro); la de su nacimiento. La

categoría y situación de los socios desaparecidos o no localizados se ha entendido como si fuesen bajas en fin de 1938 a estos solos efectos; y los siniestros producidos por efecto de la guerra o muerte violenta han sido excluidos y considerados igualmente bajas en dicha fecha.

Junto a estas fechas extremas de observación se consignan las edades respectivas de los asegurados, como diferencia de milésimas de nacimiento y de observación. Luego una por una y año por año se fueron pasando a las hojas clasificadoras por edades de observación y por edades de fallecimiento. Finalmente, se totalizan estas primeras hojas clasificadoras en unos estados resúmenes, en los que quedan agrupados todos los datos que nos interesan para la obtención de las series de frecuencias de mortalidad por edades.

Ante esta escasez de datos estadísticos, podíamos conformarnos con una simple rectificación de la curva de frecuencia hallada por un procedimiento gráfico, o a lo sumo, por fórmulas sencillas de ajuste mecánico, como la de Wittstein-Finlaison, como hicimos en el mismo estudio para las tasas de entrada y salida de Invalidez, pero preferimos probar, y a manera de ensayo, un procedimiento de ajuste analítico, y elegimos a priori la fórmula dada por Makehan que, como sabemos de todos conocida, es la siguiente:

$$l_x = k s^x g c^x$$

en que  $(x)$  representa la edad, siendo  $l_x$  el número de supervivientes teóricos a cada edad, partiendo de un número arbitrariamente elegido para  $l_0$ . Y en que el valor de  $k$  depende del que se haya dado a  $l_0$ , el resto de las constantes son parámetros de valores para toda la extensión de la Tabla (o una parte de la misma), y que son tratados inicialmente como incógnitas, y del acierto que se tenga en la resolución de estas ecuaciones de supervivencia que se planteen, llegaremos a una representación lo más exacta posible de la Ley de Mortalidad considerada.

Para su determinación he utilizado como procedimiento rápido y sencillo, el método de M. M. King y Hardy, limitando a las edades de 24 a 74 la utilización de las frecuencias obtenidas de mortalidad, por ser totalmente insuficiente la experiencia recogida a partir de dicha edad.

Los valores de estas constantes, han sido hallados de las siguientes igualdades:

$$\log c = \frac{\log \left[ \sum_{41}^{57} \log p'_x - \sum_{58}^{74} \log p'_x \right] - \log \left[ \sum_{24}^{40} \log p'_x - \sum_{41}^{57} \log p'_x \right]}{17}$$

$$\log g = \frac{\sum_{41}^{57} \log p'_x - \sum_{24}^{40} \log p'_x}{c^{24} (c^{17} - 1)^2}$$

$$\log s = \frac{\sum_{24}^{40} \log p'_x - c^{24} (c^{17} - 1) \cdot \log g}{17}$$

Obteniéndose los siguientes valores numéricos de las constantes:

$$\log c = 0,034852717$$

$$c = 1,0835593$$

$$\log g = 0,001386185$$

$$g = 0,9968135$$

$$\log s = 0,000018430$$

$$s = 1,0000424$$

Y para determinar el valor de  $k$  basta, si damos a  $l_{20}$  como valor inicial de la Tabla el de 1.000.000, dar valores a la fórmula general:

$$1.000.000 = k s^{20} g^{c^{20}}$$

o tomando logaritmos

$$\log k = \log 1.000.000 - 20 \log s - c^{20} \log g$$

resultando por último

$$k = 1.015.154$$

Conocidos los valores de las constantes, directamente hemos hallado el valor de  $p_x$  por la relación:

$$\log p_x = \log s + c^x (c - 1) \log g$$

Y de acuerdo con estos cálculos y esta experiencia se ha podido formar la siguiente Tabla de Mortalidad de las clases sanitarias españolas:

Como justificación práctica de estos resultados de ajuste, conviene realizar una comparación entre el número de los fallecimientos observados a cada edad con los calculados, al multiplicar el número de cabezas expuestas a riesgo por los tantos de mortalidad ajustados.

El resultado de esta comparación no es demasiado satisfactorio, por lo que en cuanto podamos ampliar esta experiencia ya recogida, procederemos nuevamente a la confección definitiva de esta Tabla de Mortalidad, utilizando entonces, como es corriente en esta clase de trabajos, el método de mínimos cuadrados, con objeto de llegar a un ajuste más conveniente.

Sin embargo, no debemos de olvidarnos del pequeño número de observaciones que entran en juego, lo que hace concebir grandes esperanzas para cuando esta experiencia pueda ser ampliada con observaciones futuras.

La desviación total entre los fallecimientos calculados y los observados directamente es de 23, que representa un porcentaje del 1,41 % siendo la desviación máxima de 21 a los 61 años de edad. No parece, sin embargo, que este resultado sea tan desalentador, ya que en la Tabla francesa R. F. hallamos también un resultado muy similar, del 1,25 % de desviación media.

El desarrollo numérico de esta mortalidad comparada, lo tenemos en el siguiente cuadro:

# TABLA DE MORTALIDAD

1940

Edades	Tantos anuales directos de mortalidad	Tantos ajustados de mortalidad ( $q_x$ )	Tabla de supervivientes ( $l_x$ )	Fallecidos en el año ( $d_x$ )
20	0,000000	0,001285	1.000.000	1.285
21	0,000000	0,001395	998.715	1.393
22	0,000000	0,001515	997.322	1.511
23	0,000000	0,001646	995.811	1.639
24	0,002717	0,001786	994.172	1.776
25	0,001096	0,001939	992.396	1.924
26	0,001944	0,002104	990.472	2.084
27	0,002837	0,002284	988.388	2.257
28	0,001669	0,002478	986.131	2.444
29	0,005000	0,002688	983.687	2.644
30	0,002786	0,002916	981.043	2.861
31	0,003336	0,003163	978.182	3.094
32	0,005028	0,003430	975.088	3.345
33	0,001625	0,003719	971.743	3.614
34	0,003004	0,004033	968.129	3.904
35	0,005784	0,004373	964.225	4.217
36	0,002267	0,004741	960.008	4.551
37	0,005128	0,005140	955.457	4.911
38	0,006349	0,005572	950.546	5.296
39	0,006144	0,006039	945.250	5.708
40	0,007340	0,006546	939.542	6.150
41	0,007190	0,007094	933.392	6.621
42	0,007891	0,007688	926.771	7.125
43	0,008202	0,008331	919.646	7.662
44	0,008940	0,009028	911.984	8.233
45	0,010375	0,009782	903.751	8.840
46	0,007541	0,010599	894.911	9.485
47	0,011656	0,011483	885.426	10.167
48	0,009483	0,012439	875.259	10.887
49	0,010239	0,013475	864.372	11.647
50	0,012733	0,014597	852.725	12.447
51	0,015492	0,015810	840.278	13.285
52	0,015905	0,017123	826.993	14.161
53	0,019310	0,018544	812.832	15.073
54	0,023605	0,020081	797.759	16.020
55	0,022516	0,021745	781.739	16.999
56	0,026507	0,023543	764.740	18.004
57	0,029098	0,025489	746.736	19.034

Edades	Tantos anuales directos de mortalidad	Tantos ajustados de mortalidad ( $q_x$ )	Tabla de supervivientes ( $l_x$ )	Fallecidos en el año ( $d_x$ )
58	0,028184	0,027593	727.702	20.079
59	0,031677	0,029867	707.623	21.135
60	0,035436	0,032325	686.488	22.191
61	0,052196	0,034982	664.297	23.238
62	0,036743	0,037852	641.059	24.265
63	0,039306	0,040953	616.794	25.260
64	0,043360	0,044302	591.534	26.206
65	0,052800	0,047917	565.328	27.089
66	0,065543	0,051819	538.239	27.891
67	0,058947	0,056028	510.348	28.594
68	0,072289	0,060569	481.754	29.179
69	0,051813	0,065464	452.575	29.627
70	0,067606	0,070739	422.948	29.919
71	0,060976	0,076422	393.029	30.036
72	0,087838	0,082540	362.993	29.962
73	0,068702	0,089124	333.031	29.681
74	0,092166	0,096205	303.350	29.184
75	0,148571	0,103814	274.166	28.462
76	0,100671	0,111988	245.704	27.516
77	0,085271	0,120761	218.188	26.349
78	0,180851	0,130168	191.839	24.972
79	0,088608	0,140249	166.867	23.403
80	0,215385	0,151034	143.464	21.668
81	0,255319	0,162579	121.796	19.802
82	0,181818	0,174906	101.994	17.840
83	0,258714	0,188058	84.154	15.826
84	—	0,202073	68.328	13.808
85	—	0,216985	54.520	11.831
86	—	0,232830	42.689	9.940
87	—	0,249636	32.749	8.176
88	—	0,267432	24.573	6.572
89	—	0,286239	18.001	5.153
90	—	0,306072	12.848	3.933
91	—	0,326941	8.915	2.915
92	—	0,348846	6.000	2.094
93	—	0,371777	3.906	1.453
94	—	0,395714	2.453	971
95	—	0,420623	1.482	624
96	—	0,446455	858	384
97	—	0,473147	474	225
98	—	0,500619	249	125
99	—	0,528772	124	66
100	—	0,557488	58	33
101	—	1,000000	25	25

**Comparación entre la mortalidad observada y la calculada  
desde su fundación hasta 1941**

Edades	Número de cabezas observadas	Probabilidad ajustada de fallecimiento	Fallecimien- tos teóricos a cada edad	Fallecimien- tos reales a cada edad	DESVIACIONES	
					Positivas	Negativas
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
Hasta 24...	1.882	0,001786	3	3	—	—
25...	1.825	0,001939	4	2	2	—
26...	2.572	0,002104	5	5	—	—
27...	3.172	0,002284	7	9	—	2
28...	3.596	0,002478	9	6	3	—
29...	3.800	0,002688	10	19	—	9
30...	3.948	0,002916	12	11	1	—
31...	3.897	0,003163	12	13	—	1
32...	3.779	0,003430	13	19	—	6
33...	3.693	0,003719	14	6	8	—
34...	3.662	0,004033	15	11	4	—
35...	3.631	0,004373	16	21	—	5
36...	3.529	0,004741	17	8	9	—
37...	3.510	0,005140	18	18	—	—
38...	3.465	0,005572	19	22	—	3
39...	3.418	0,006039	21	21	—	—
40...	3.406	0,006546	22	25	—	3
41...	3.338	0,007094	24	24	—	—
42...	3.295	0,007688	25	26	—	1
43...	3.292	0,008331	27	27	—	—
44...	3.244	0,009028	29	29	—	—
45...	3.277	0,009782	32	34	—	2
46...	3.315	0,010599	35	25	10	—
47...	3.260	0,011483	37	38	—	1
48...	3.269	0,012439	41	31	10	—
49...	3.223	0,013475	43	33	10	—
50...	3.220	0,014597	47	41	6	—
51...	3.163	0,015810	50	49	1	—
52...	3.018	0,017123	52	48	4	—
53...	2.900	0,018544	54	56	—	2
54...	2.796	0,020081	56	66	—	10
55...	2.576	0,021745	56	58	—	2
56...	2.339	0,023543	55	62	—	7
57...	2.062	0,025489	53	60	—	7
58...	1.845	0,027593	51	52	—	1
59...	1.610	0,029867	48	51	—	3

Edades	Número de cabezas observadas	Probabilidad ajustada de fallecimiento	Fallecimientos teóricos a cada edad	Fallecimientos reales a cada edad	DESVIACIONES	
					Positivas	Negativas
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
60...	1.411	0,032325	46	50	—	4
61...	1.207	0,034982	42	63	—	21
62...	1.007	0,037852	38	37	1	—
63...	865	0,040953	35	34	1	—
64...	738	0,044302	33	32	1	3
65...	625	0,047917	30	33	—	—
66...	534	0,051819	28	35	—	7
67...	475	0,056028	27	28	—	1
68...	415	0,060569	25	30	—	5
69...	386	0,065464	25	20	5	—
70...	355	0,070739	24	24	—	—
71...	328	0,076422	25	20	5	—
72...	296	0,082540	24	26	—	2
73...	262	0,089124	23	18	5	—
74...	217	0,096205	21	20	1	—
75...	175	0,103814	18	26	—	8
76...	149	0,111988	17	15	2	—
77...	129	0,120761	16	11	5	—
78...	94	0,130168	12	17	—	5
79...	79	0,140249	11	7	4	—
80...	65	0,151034	10	14	—	4
81...	47	0,162579	8	12	—	4
82...	33	0,174906	6	6	—	—
83 a 94...	77	0,267432	30	22	8	—
SUMA.....					106	129

Si estudiamos la curva original o de frecuencias directas formadas, observamos dos trazos completamente acusados: hasta los 50 años el primero, y desde esta edad en adelante el segundo. No obstante, para un primer estudio como el que ahora emprendemos, se ha considerado suficiente el utilizar las mismas constantes para toda la duración de la Tabla.

Las características específicas de la mortalidad de las clases sanitarias acusan en general una tendencia hacia un tipo medio; así la expe-



riencia inglesa acusa en la clase médica una mortalidad algo inferior a la media; la alemana, muy copiosa y estudiada, no difiere sensiblemente de la general, destacándose, sin embargo, por encima de las demás profesiones liberales.

Las tasas de mortalidad de las Tablas modernas, muestran una tendencia a decrecer durante la primera parte de la vida humana, para acentuarse y aproximarse a la mortalidad clásica de las Tablas del siglo pasado, a partir de los 50 años en adelante, y disminuyendo nuevamente hacia las últimas edades de la vida a partir de los 65 a 70 años.

De la comparación entre esta Tabla de Mortalidad con otras más o menos modernas, pero de experiencia general, principalmente de Compañías de Seguros, se aprecia un cierto parecido, como puede verse en el gráfico adjunto, en el que se dibujan las curvas de las tablas A. F., la alemana de 1926 (Dr. Abel—agregada), y una de experiencia española (a base de 250.000 observaciones de una Compañía española—*Revista CES*, núm. 13 abril de 1935).

Posteriormente y durante los años 1941 al 1943, los resultados conseguidos entre la mortalidad calculada, con arreglo a las tasas de mortalidad de esta Tabla, y los fallecimientos observados, es casi normal, pues no podemos olvidar las diferencias tan profundas que se observan de un año a otro en el fenómeno de la mortalidad, máxime si se refiere a una clase profesional tan limitada como es la médica.

	Número de cabezas observadas.	Número de fallecimientos.	
		Probables.	Observados.
Año de 1941.....	15.942	247	231
— 1942.....	17.285	260	207
— 1943,	18.027	144	142

(Primer sem.)

Se aprecia un acusado descenso en la mortalidad correspondiente al ejercicio de 1942; sin embargo, fenómeno análogo es registrado en general por todas las Compañías de Seguros. Durante el ejercicio de 1943, los resultados son más concordantes con los probables, arrojando una cifra más elevada de siniestros.

