

FÓRMULA DE CREDIBILIDAD PARA LA ESTIMACIÓN DE LAS CORRELACIONES ENTRE LÍNEAS DE NEGOCIO EN EL CÁLCULO DEL SCR DEL MÓDULO DE SUSCRIPCIÓN NO VIDA

Lluís Bermúdez* y Antoni Ferri†

Abstract

Solvency capital requirement (SCR) based on Solvency II standard formula is mainly given by some pre-established parameters. Some of these parameters define the lines of business' correlation matrix. This work aims to advance in the application of models that use specific parameters based in the own experience of each entity. A credibility formula, based on a bayesian model, is proposed to estimate the correlation coefficients between two lines of business of the implicit variable for the premium and reserve risk. The application to the yearly aggregated data of the Spanish non-life insurance market leads to encouraging the use of alternative models as opposed to the standard formula.

Keywords: Standard Model, Internal Model, Premium and Reserve risk, Underwriting risk, Solvency II, Bayesian estimation.

Resumen

El requerimiento de capital de solvencia (SCR) basado en el Modelo Estándar de la directiva Solvencia II viene determinado por una serie de parámetros que la propia directiva establece. Entre éstos, los valores que definen la matriz de correlaciones entre líneas de negocio. Este trabajo, con el objetivo de avanzar en la aplicación de modelos que utilicen parámetros específicos basados en la experiencia propia de cada entidad, propone una fórmula de credibilidad, basada en un modelo bayesiano, para la estimación de los coeficientes de correlación entre dos líneas de negocio de la variable implícita para el riesgo de primas y reservas. De la aplicación de esta

* Dpto. Matemática Económica, Financiera y Actuarial, RISC-IREA; Universitat de Barcelona, Av. Diagonal, 690, 08034 Barcelona.

† Dpto. Econometría, Estadística y Economía Española, RISC-IREA; Universitat de Barcelona, Av. Diagonal, 690, 08034 Barcelona.

E-mail: lbermudez@ub.edu (Lluís Bermúdez, autor para correspondencia), tonoferri@ub.edu

Los autores agradecen las sugerencias del revisor/a y la ayuda recibida del proyecto del Ministerio de Economía y Competitividad, ECO2012-35584.

Este artículo ha sido recibido en versión revisada el 31 de octubre de 2012.

fórmula de credibilidad a los datos agregados del conjunto del mercado español asegurador no vida se extraen conclusiones que alientan el uso de modelos alternativos a la fórmula estándar.

Palabras clave: Modelo Estándar, Modelo Interno, Riesgo de insuficiencia de primas y reservas, Solvencia II, Estimación bayesiana.

1. Introducción

La publicación en el *Official Journal of the European Union* de la Directiva 2009/138/EC del Parlamento Europeo y del Consejo de 25 de Noviembre de 2009 sobre el acceso y ejercicio de la actividad aseguradora y reaseguradora, también conocida como Solvencia II, marca el punto de partida oficial en la puesta en marcha de medidas legislativas de control de riesgo en entidades aseguradoras. La Directiva está estructurada bajo el principio de los *Tres Pilares*, que se corresponden con los requerimientos cuantitativos, los requerimientos cualitativos y la disciplina de mercado, respectivamente.

El *Pilar I* presenta un conjunto de normas que determinan los criterios para la obtención de las necesidades de capital que una entidad debe mantener con un horizonte temporal anual, acordes al riesgo asumido por la entidad, que garantice un aceptable nivel de solvencia. El principal objetivo de los requisitos económicos que establece la Directiva es cubrir las eventuales pérdidas inesperadas que una entidad pudiese sufrir como consecuencia de flutuaciones inesperadas adversas en la siniestralidad. Esta parte de las necesidades de capital es denominada en la directiva como *Solvency Capital Requirement* (SCR). El SCR está acotado inferiormente mediante un umbral denominado *Minimum Solvency Capital Requirement* (MSCR), por debajo del cual una entidad no podría seguir operando.

La Directiva establece que el SCR debe ser obtenido mediante un modelo que refleje el perfil de riesgo de la entidad, y que sea adecuado atendiendo a la naturaleza, escala y complejidad de los riesgos asumidos por la misma. El modelo propuesto por el regulador es un conjunto de fórmulas y metodologías denominado Modelo Estándar. No obstante, la Directiva establece que bajo ciertos requisitos previos y autorización de la autoridad competente, el SCR pueda ser obtenido mediante un Modelo Interno propuesto por la entidad aseguradora. El SCR, obtenido con cualquiera de los modelos aceptados por el regulador, debe estar calibrado de tal forma que se corresponda con el valor en riesgo (VaR) de los fondos propios de la

entidad, a un horizonte temporal anual, calculado con un nivel de confianza del 99,5%.

El Modelo Estándar puede ser utilizado por las entidades utilizando los parámetros establecidos por el regulador como *proxy* de mercado, o puede ser adaptado al perfil de riesgo propio de cada entidad mediante la estimación de parámetros específicos basados en la experiencia histórica de la entidad¹. Pueden existir diversas razones por la que una entidad decida reestimar los parámetros presentados por el regulador. Una posible razón puede derivarse de que las *proxy* sobrevaloren el verdadero perfil de riesgo de la entidad, lo que conduciría a una estimación mayor del SCR de la que se derivaría de los parámetros específicos de la entidad. Por otra parte, otra razón para la estimación de parámetros específicos podría venir determinada por el hecho que la estructura de negocio de una compañía aseguradora no se adapte a la propuesta por el regulador en la fórmula estándar², por lo que deba estimar los parámetros necesarios para obtener el SCR correspondiente ajustándose al propio modelo de negocio.

Nuestro objetivo es analizar, para el caso en que se opte por utilizar el Modelo Estándar con parámetros específicos o bien por un Modelo Interno, cómo abordar la estimación de aquellos parámetros, ajustados al perfil de riesgo de la entidad y consistentes con el modelo, de los que la Directiva no proporciona estimadores ni metodologías para su obtención. Con la finalidad de reducir la dimensión de este objetivo, en este trabajo, nos centraremos en la estimación de las correlaciones entre líneas de negocio del submódulo de riesgo de primas y reservas perteneciente al módulo de riesgo de suscripción no vida.

El resto del trabajo se estructura de la siguiente manera. La sección 2 describe la utilización del modelo estándar con parámetros específicos para el submódulo de riesgo de insuficiencia de primas y reservas. La sección 3 presenta el modelo bayesiano para la estimación de los coeficientes de correlación entre líneas de negocio. La sección 4 detalla los datos utilizados en la sección 5, que muestra los resultados de aplicar el modelo bayesiano

¹ Según el artículo 104, apartado 7, de la Directiva: “Previo aprobación de las autoridades de supervisión, en el cálculo de los módulos del riesgo de suscripción del seguro de vida, del seguro distinto del seguro de vida y del seguro de enfermedad, las empresas de seguros y reaseguros podrán sustituir un subconjunto de parámetros de la fórmula estándar por parámetros específicos de la empresa de que se trate.”

² Según el artículo 110 de la Directiva, cuando el perfil de riesgo de una empresa de seguros o de reaseguros se aparte significativamente de las hipótesis aplicadas en el cálculo de la fórmula estándar, las autoridades de supervisión, mediante decisión motivada, podrán exigir que dicha empresa sustituya un subconjunto de los parámetros utilizados para el cálculo de la fórmula estándar por parámetros específicos de dicha empresa.

propuesto para la estimación de los coeficientes de correlación entre líneas de negocio a la estimación del SCR. Por último, la sección 6 resume las principales conclusiones obtenidas.

2. Fórmula estándar con parámetros específicos para el riesgo de insuficiencia de primas y reservas

En este trabajo, nos basamos en el análisis del SCR para el riesgo de insuficiencia de primas y reservas que se deriva del Modelo Estándar presentado en el quinto estudio de impacto cuantitativo (QIS-5) realizado en 2010 por el *Committee of European Insurance and Occupational Pensions* (CEIOPS)³.

El SCR correspondiente al riesgo de primas y reservas es calculado en QIS-5 mediante una fórmula cerrada, en adelante *fórmula estándar*, que depende de una medida de volumen, V , y de una aproximación del *mean-value-at-risk* obtenido con un nivel de significación del 99,5% a un horizonte temporal anual, asumiendo una distribución log-normal de la variable aleatoria subyacente, $\rho \sigma$:

$$\text{SCR} = \rho \sigma \cdot V.$$

La expresión $\rho \sigma$ depende de un parámetro denominado *desviación estándar combinada* (σ). En la fórmula estándar, éste se obtiene, en primer lugar, mediante la agregación de las correspondientes *desviación estándar de las primas y desviación estándar de las reservas por línea de negocio*, teniendo en cuenta la correlación existente entre éstas, dando lugar a lo que en QIS-5 se conoce como *desviación estándar por línea de negocio*. Posteriormente, mediante la agregación de éstas y teniendo en cuenta la correlación existente entre las líneas de negocio, se obtiene la *desviación estándar combinada*.

Una compañía que pretenda obtener el SCR correspondiente al riesgo de primas y reservas mediante el uso de la fórmula estándar puede decidir entre utilizar los parámetros establecidos por el regulador como *proxy*, en la Tabla 1 y 2 se presentan los propuestos en QIS-5, o realizar estimaciones de los parámetros derivadas de la propia experiencia de su cartera.

³ Desde Enero 2011, EIOPA, *European Insurance and Occupational Pensions Authority*.

Como hemos visto, la fórmula estándar depende de la desviación estándar correspondiente a la variable aleatoria que representa el riesgo de primas por línea de negocio, la desviación estándar de la variable aleatoria que representa el riesgo de reserva por línea de negocio, la correlación entre las variables aleatorias que representan los riesgos de primas y reservas por línea de negocio, y la correlación entre los pares de variables aleatorias que representan conjuntamente el riesgo de primas y reservas por línea de negocio.

Por lo tanto, una entidad que decida estimar nuevos parámetros basados en su propia experiencia debe, en primer lugar, definir los estimadores necesarios para la obtención de los parámetros correspondientes a las distintas desviaciones estándar y correlaciones, y en segundo lugar, decidir la información necesaria y la metodología para realizar dichas estimaciones.

En la Directiva no se especifica cómo abordar la estimación de los distintos parámetros necesarios para el cálculo del SCR. Debemos recurrir a las especificaciones técnicas de QIS-5 para obtener indicaciones sobre este aspecto. En la Sección 2, subsección 10ª (SCR.10), con el objetivo de revisar la calibración de los *proxys* de mercado propuestos por el regulador, se anima a los participantes en este estudio de impacto a calcular los parámetros específicos, basados en la experiencia propia de cada entidad, necesarios para la utilización de la fórmula estándar. Para el caso que nos ocupa, el módulo de subscripción no vida, los parámetros de la fórmula estándar que pueden ser substituidos en este estudio de impacto por parámetros específicos de cada entidad son las desviaciones estándar de los riesgos de primas y reservas.

En la misma subsección se proponen diversas metodologías para la estimación de las desviaciones estándar de las variables que representan los riesgos de primas y de reservas. Los parámetros específicos a utilizar en la fórmula estándar se derivan de un Modelo de Credibilidad que considera, por una parte, las *proxys* de mercado propuestas por el regulador (σ_m) y, por otra parte, las estimaciones que resultan de utilizar los datos de la entidad aseguradora (σ_e) y cualquiera de las dos metodologías propuestas. Los factores de credibilidad (c) vienen también predeterminados, pero en general dependen del número de observaciones que han sido consideradas para la obtención de los parámetros específicos y de la línea de negocio considerada. Para cada línea de negocio, los parámetros específicos de las desviaciones estándar (σ) se obtienen mediante la fórmula de credibilidad:

$$\sigma = c \cdot \sigma_e + 1 - c \cdot \sigma_m.$$

Sin embargo, para este estudio de impacto, no se permiten substituir los parámetros de la fórmula estándar correspondientes a las correlaciones. Por esta razón, no se presentan metodologías ni estimadores para obtener, por ejemplo, las correlaciones entre líneas de negocio.

En este trabajo, en la siguiente sección, proponemos una metodología para la estimación de las correlaciones entre líneas de negocio a partir de la experiencia de cada entidad aseguradora para su utilización en el cálculo del SCR del submódulo de riesgo de primas y reservas perteneciente al módulo de riesgo de suscripción no vida cuando se opte, previa autorización del regulador competente, por el uso del Modelo estándar con parámetros específicos, o bien, por un Modelo Interno.

Inspirados en el modelo de credibilidad propuesto en las especificaciones técnicas de QIS-5 para las desviaciones estándar, planteamos un modelo de credibilidad, basado en la metodología bayesiana, para la estimación de los coeficientes de correlación entre dos líneas de negocio de la variable implícita para el riesgo de primas y reservas.

Tabla 1 Desviación Estándar (%)		
LoB	Primas	Reservas
I	10	9,5
II	7	10
III	17	14
IV	10	11
V	15	11
VI	21,5	19
VII	6,5	9
VIII	5	11
IX	13	15
X	17,5	20
XI	17	20
XII	16	20

Fuente:QIS-5

Tabla 2 Correlaciones entre líneas de negocio

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
I	1											
II	0,5	1										
III	0,5	0,25	1									
IV	0,25	0,25	0,25	1								
V	0,5	0,25	0,25	0,25	1							
VI	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	1						
VII	0,5	0,5	0,25	0,25	0,5	0,5	1					
VIII	0,25	0,5	0,5	0,5	0,25	0,25	0,25	1				
IX	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1			
X	0,25	0,25	0,25	0,5	0,25	0,25	0,25	0,5	0,25	1		
XI	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	0,5	0,5	0,25	0,5	0,25	1	
XII	0,25	0,25	0,5	0,5	0,25	0,25	0,25	0,5	0,5	0,25	0,25	1

Fuente: QIS-5

3. Fórmula de credibilidad para la estimación del coeficiente de correlación entre dos líneas de negocio

Como es bien conocido, la metodología bayesiana constituye una forma más de aproximarse a los modelos de credibilidad (véase Gómez y Sarabia, 2008). La idea de combinar, en nuestro caso, la información del mercado con la información de una entidad aseguradora mediante una fórmula de credibilidad puede realizarse a partir del paradigma bayesiano. Esto es, combinando la información del mercado (información *a priori*) con la información de la entidad (información muestral) mediante el teorema de Bayes.

En la metodología bayesiana, alternativa a la estadística frecuentista o clásica, para la estimación de parámetros se siguen los siguientes pasos. En primer lugar, dada una variable aleatoria (Y) se especifica una distribución de probabilidad para los datos ($y \sim f(\theta)$). A diferencia de la estadística frecuentista que considera el parámetro θ como una constante, el parámetro se considera una variable aleatoria y, por tanto, se especifica una distribución *a priori* para éste ($\pi \theta$). En tercer lugar, se determina la distribución conjunta o función de verosimilitud ($f(y, \theta)$) y, aplicando el teorema de Bayes, se obtiene la distribución condicionada del parámetro θ después de observar la muestra, conocida como distribución *a posteriori* ($\pi \theta | y$). A partir de la distribución *a posteriori* podemos hacer inferencia y predicción sobre el parámetro. Si tanto la distribución *a priori* como la distribución *a posteriori* pertenecen a una misma clase de distribuciones, se obtienen fórmulas bayesianas de credibilidad.

En nuestro caso, estamos interesados en una fórmula de credibilidad para el coeficiente de correlación ρ entre dos variables aleatorias, X e Y . Para ello, tomamos el modelo bayesiano propuesto por Fisher (1915) y reformulado más recientemente por Lee (1989). Siguiendo la notación de este último, definimos (x_i, y_i) como un conjunto de n pares ordenados de observaciones con $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Se asume que los pares se distribuyen conjuntamente como una distribución normal bivariante con valores esperados μ_X y μ_Y , varianzas σ_X^2 y σ_Y^2 y coeficiente de correlación $\rho(x_i, y_i) = \rho$. Además, el coeficiente de correlación muestral r se define como:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_x S_y}},$$

donde

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}, \quad S_x = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad S_y = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2, \quad S_{xy} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}).$$

Fisher (1915), tras una serie de tediosas sustituciones, obtiene dos resultados interesantes para el propósito que perseguimos. En primer lugar, utilizando distribuciones a priori estándar para μ_X , μ_Y , σ_X^2 y σ_Y^2 , y una vez aplicado el paradigma bayesiano, se obtiene una razonable aproximación para la distribución *a posteriori* de ρ :

$$p \rho | x, y \propto p \rho \cdot \frac{1 - \rho^2}{1 - \rho r} \frac{n-1}{n-\frac{3}{2}}$$

donde $p \rho$ es su correspondiente distribución *a priori*.

Y en segundo lugar, substituyendo $\rho = \tanh(\zeta)$ y $r = \tanh(z)$, y después de otra aproximación, la variable aleatoria ζ se distribuye como una normal de media z y varianza $\frac{1}{n}$:

$$\zeta \sim N\left(z, \frac{1}{n}\right).$$

Con la anterior substitución, se consigue obtener una fórmula de credibilidad para el coeficiente de correlación ρ , de este modo, combinar diferentes fuentes de información. Por ejemplo, dado un coeficiente de correlación muestral a priori r_{pr} obtenido a partir de un conjunto de n_{pr} pares observados, podemos actualizar nuestro conocimiento sobre el coeficiente de correlación mediante la información proveniente de un segundo conjunto de n_l pares observados con coeficiente de correlación muestral r_l . En este caso, nos encontramos ante la situación descrita anteriormente, de distribuciones *a priori* y *a posteriori* de la misma clase. Concretamente, la distribución *a posteriori* para z es normal con media:

$$z_{post} = \frac{n_{pr}}{n_{pr} + n_l} \times \tanh^{-1}(r_{pr}) + \frac{n_l}{n_{pr} + n_l} \times \tanh^{-1}(r_l)$$

y varianza $\frac{1}{n_{pr} + n_l}$.

A partir de z_{post} , podemos obtener un estimador puntual para el coeficiente de correlación ρ mediante $\hat{\rho} = r_{post} = \tanh(z_{post})$. El estimador propuesto es el resultado de combinar, mediante una fórmula de credibilidad, la información *a priori*, r_{pr} , con la información de la segunda muestra, r_l . La combinación lineal se establece mediante una ponderaciones, o factores de credibilidad, que dependen del número de observaciones de ambas muestras, n_{pr} y n_l .

El resultado anterior es aplicable al caso que nos ocupa. En primer lugar, debemos definir las variables aleatorias X e Y sobre las que pretendemos calcular el coeficiente de correlación. Su definición dependerá de la opción escogida para el cálculo del SCR, según se opte por el uso del Modelo Estándar con parámetros específicos, o bien, por un Modelo Interno.

En el primer supuesto, siguiendo a Gisler (2009), la expresión analítica para ρ σ puede ser derivada a partir de considerar una variable aleatoria Z_i , que representa la variable aleatoria implícita en la fórmula estándar para el riesgo de prima y reservas para una línea de negocio i :

$$Z_i = \frac{X_i \cdot P_i + Y_i \cdot R_i}{P_i + R_i}$$

donde X_i representa el ratio de siniestralidad por línea de negocio, P_i es una medida del volumen de primas por línea de negocio, Y_i representa el ratio de reservas por línea de negocio, y R_i es una medida del volumen de reservas por línea de negocio. En este caso, el objetivo sería la estimación del coeficiente de correlación entre las variables Z_i y Z_j , siendo i y j dos líneas de negocio distintas.

Para el supuesto en que se opte por un Modelo Interno, la definición de las variables aleatorias sobre las que pretendemos estimar el coeficiente de correlación dependerá de la propia estructura del modelo. Un Modelo Interno no necesariamente debe estar basado en una estructura modular de riesgos en el sentido que plantea Solvencia II. A pesar de ello, en este trabajo, se ha optado por mantener una estructura similar a la del Modelo Estándar con la finalidad de estimar un capital que sea comparable a aquél que se obtiene del Modelo Estándar para el riesgo de primas y reservas del módulo de suscripción no vida.

Nuestra propuesta de Modelo Interno (Bermúdez *et al.*, 2011, 2012a) es la siguiente. Las predicciones de las variables que conforman el resultado neto por línea de negocio son estimadas a través de un modelo de regresión lineal simple. A través de estas predicciones son obtenidas las predicciones del resultado neto por línea de negocio. Posteriormente, cada predicción del resultado neto por línea de negocio es agregada para obtener la predicción total del resultado neto. El SCR derivado del Modelo Interno es estimado como la diferencia entre el VaR obtenido con un nivel de confianza del 99,5%, y horizonte temporal anual, y el valor esperado de la predicción del resultado neto agregado, tras realizar una simulación de la distribución de probabilidad de esta misma variable mediante el uso de cópulas. En este Modelo Interno, las variables aleatorias sobre las que pretendemos estimar el coeficiente de correlación, son pues las predicciones del resultado neto por cada línea de negocio.

En segundo lugar, debemos valorar las dos fuentes de información que combinaremos en la fórmula de credibilidad para la obtención del coeficiente de correlación entre dos líneas de negocio. Por un lado, a partir de la experiencia de siniestralidad de cada entidad, recogida en una serie con n_i pares observados, se calculará el coeficiente de correlación muestral, r_i .

Por otro lado, la información *a priori* será la aportada por el regulador a partir de la información de mercado. El coeficiente de correlación muestral *a priori*, r_{pr} , puede tomarse, por ejemplo, como el correspondiente coeficiente de correlación de la matriz de coeficientes de correlación entre líneas de negocio propuesto en QIS-5. Para la aplicación de la fórmula de credibilidad descrita anteriormente, tan sólo restará realizar alguna hipótesis sobre el número de pares observados, n_{pr} , a partir del cual el regulador ha determinado la información de mercado. Como hemos visto, esta información es necesaria para determinar la variabilidad de la distribución *a priori* del modelo bayesiano considerado.

No obstante, según se opte por un Modelo Estándar con parámetros específicos o por un Modelo Interno, la combinación de la información de mercado con la información empírica de cada entidad puede tener una interpretación distinta según la variable implícita que utilicemos. En primer lugar, deberíamos conocer la naturaleza de la matriz de correlaciones propuesta por el regulador para el uso en el Modelo Estándar (Tabla 2) y que representa la única información de mercado disponible. Tal como se indica en las especificaciones técnicas de QIS-5⁴, para la agregación de los módulos de riesgo individuales con la finalidad de obtener el SCR, son aplicadas correlaciones lineales. Sin embargo, no se especifica qué variable implícita ha sido utilizada. Como ya hemos supuesto anteriormente, podemos pensar que la variable implícita de esta matriz de correlaciones se corresponde con la variable propuesta por Gisler (2009). De este modo, si optamos por la utilización del Modelo Estándar con parámetros específicos, la información de mercado y la información empírica de cada entidad vienen representadas por la misma variable implícita. No ocurre lo mismo si utilizamos un Modelo Interno y la variable implícita que acabamos de definir para este caso. En este segundo escenario, deberíamos tener en cuenta la posible distinta naturaleza de las informaciones combinadas en la fórmula de credibilidad.

Antes de presentar la aplicación práctica de este modelo, con datos reales, mostramos con un sencillo ejemplo cómo puede ser obtenido el coeficiente de correlación entre dos líneas de negocio a partir de la fórmula de credibilidad presentada.

Consideremos que el coeficiente de correlación muestral entre dos líneas de negocio propuesto por el regulador, a partir de la información de mercado, es

⁴ QIS5 Technical Specifications, Annex to Call for Advice from CEIOPS on QIS5, Section 2, 1.11.

$r_{pr} = 0,5$. En este sencillo ejemplo, suponemos que la información de mercado ha sido obtenida mediante una serie histórica de los 10 últimos años, $n_{pr} = 10$.

Por otro lado, la entidad aseguradora ha obtenido un coeficiente de correlación muestral de $r_l = 0,16$, a partir de una serie histórica propia de los 11 últimos años, $n_l = 11$.

Por lo tanto, aplicando la fórmula de credibilidad presentada anteriormente, sin más que substituir los cuatro valores aquí supuestos, se obtiene:

$$z_{post} = \frac{10}{10+11} \times \tanh^{-1}(0,5) + \frac{11}{10+11} \times \tanh^{-1}(0,16) = 0,3461 .$$

Y de ahí, el estimador puntual para el coeficiente de correlación entre las dos líneas de negocio resulta $\hat{\rho} = \tanh(0,3461) = 0,3329$.

4. Datos

A partir de la Memoria Estadística Anual de Entidades Aseguradoras publicada por la Dirección General de Seguros y Fondos de Pensiones (DGSFP) sobre balances y cuentas técnicas del negocio no vida correspondientes al período 2000-2010 para el conjunto de entidades que operan en el mercado español, ha sido extraída la información necesaria para el cálculo del requerimiento de capital de solvencia correspondiente al submódulo de riesgo *insuficiencia de primas y reservas* del negocio no vida.

Los datos recogidos referidos al conjunto del mercado corresponden a la información agregada de Sociedades Anónimas, Mutuas, Mutualidades de Previsión Social y Reaseguradoras. Asimismo, la información publicada corresponde a los ramos actualmente vigentes en la normativa contable.

Para efectuar el cálculo del requerimiento de capital de solvencia se ha tenido en cuenta las nueve primeras líneas de negocio propuestas en QIS-5⁵, (I) Responsabilidad civil de vehículos a motor, (II) Otro tipo de responsabilidades derivadas de vehículos a motor, (III) Marina, aviación y transporte, (IV) Incendio, (V) Responsabilidad civil, (VI) Crédito y caución,

⁵ Una descripción detallada de las definiciones de cada línea de negocio puede ser consultada en QIS-5.

(VII) Defensa jurídica, (VIII) Asistencia, (IX) Diversos. Se descarta la consideración de las líneas de negocio (X) Reaseguro no proporcional Inmuebles, (XI) Reaseguro no proporcional Daños y (XII) Reaseguro no proporcional Marina, aviación y transporte, dado que se considera que pueden producir una distorsión en los resultados ya que al tratarse de información de mercado agregada, obviamente existe una correlación perfecta negativa entre estas tres líneas de negocio, que corresponden a volúmenes de reaseguro aceptado, y aquellas líneas de negocio que ceden volúmenes a reaseguro.

La correspondencia entre los ramos presentados en la memoria y las líneas de negocio propuestas en QIS-5 se ha realizado teniendo en cuenta la recomendación que UNESPA (2007) realizó a las entidades participantes en QIS- 5.

Para cada línea de negocio se consideran las siguientes variables: 1) Primas suscritas netas de reaseguro, 2) Siniestralidad neta de reaseguro, 3) Gastos (incluyendo, gastos de explotación, gastos imputables a prestaciones y otros gastos) y 4) Provisiones técnicas (incluyendo, provisión de prestaciones pendientes de liquidación, provisión de prestaciones pendientes de declaración y provisión para gastos internos de liquidación de siniestros).

A modo de resumen, en la Tabla 3 se muestran algunos estadísticos descriptivos de las variables consideradas.

Tabla 3 Estadísticos descriptivos (*) de las variables Primas Netas, Siniestralidad Neta, Gastos y Provisiones técnicas, por línea de negocio									
LoB	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
Primas Netas de Reaseguro									
Mín.	4,21	2,85	0,19	2,45	0,48	0,17	0,08	0,30	0,93
Cuart. 1º	5,34	3,69	0,24	3,38	0,72	0,23	0,11	0,38	1,13
Mediana	5,87	4,43	0,30	4,87	1,05	0,34	0,12	0,49	1,38
Promedio	5,75	4,15	0,31	4,69	1,00	0,33	0,13	0,50	1,41
Desv.	0,76	0,70	0,08	1,58	0,33	0,11	0,03	0,13	0,34
Cuart. 3º	6,30	4,68	0,39	5,89	1,28	0,42	0,16	0,63	1,67
Máx.	6,66	4,94	0,44	6,87	1,41	0,49	0,17	0,67	1,90
Siniestralidad Neta de Reaseguro									
Mín.	3,57	2,12	0,15	1,70	0,45	0,12	0,05	0,22	0,38
Cuart. 1º	4,14	2,49	0,16	2,35	0,58	0,16	0,07	0,27	0,46
Mediana	4,41	2,97	0,19	3,20	0,72	0,20	0,07	0,35	0,57
Promedio	4,34	2,91	0,21	3,09	0,71	0,43	0,07	0,36	0,57
Desv.	0,43	0,54	0,06	0,92	0,17	0,44	0,01	0,10	0,13
Cuart. 3º	4,71	3,40	0,25	3,88	0,89	0,55	0,08	0,45	0,67
Máx.	4,84	3,64	0,33	4,40	0,92	1,44	0,09	0,48	0,75
Gastos									

Mín.	1,03	0,70	0,01	0,69	0,10	-0,03	0,04	0,11	0,45
Cuart. 1º	1,22	0,82	0,02	0,88	0,12	-0,00	0,05	0,13	0,50
Mediana	1,33	0,96	0,04	1,14	0,17	0,03	0,05	0,16	0,56
Promedio	1,32	0,93	0,04	1,24	0,18	0,09	0,05	0,17	0,58
Desv.	0,17	0,14	0,02	0,43	0,06	0,14	0,00	0,04	0,10
Cuart. 3º	1,43	1,04	0,06	1,62	0,24	0,15	0,06	0,20	0,62
Máx.	1,63	1,10	0,08	1,84	0,26	0,35	0,07	0,23	0,76
Provisiones Técnicas									
Mín.	4,87	0,74	0,28	1,30	1,89	0,38	0,03	0,01	0,08
Cuart. 1º	5,31	0,91	0,31	1,82	2,72	0,49	0,05	0,01	0,10
Mediana	6,18	1,04	0,42	2,43	3,55	0,55	0,05	0,02	0,14
Promedio	5,89	1,12	0,43	2,28	3,58	0,69	0,06	0,02	0,14
Desv.	0,68	0,29	0,12	0,56	1,10	0,35	0,02	0,01	0,04
Cuart. 3º	6,42	1,34	0,56	2,68	4,42	0,81	0,06	0,02	0,17
Máx.	6,67	1,59	0,59	2,96	5,11	1,62	0,12	0,06	0,21
Fuente: Propia / (*) Miles de millones de euros									

5. Resultados

En primer lugar, con los datos descritos en la sección anterior, se han calculado los coeficientes de correlación entre líneas de negocio tanto para las variables aleatorias implícitas en la fórmula estándar como para las implícitas en el Modelo Interno. La estimación de estas correlaciones empíricas ha sido realizada mediante el estimador habitual para el coeficiente de correlación lineal, el coeficiente de correlación de Pearson.

En las Tablas 4 y 5, a efectos de comparar con las correlaciones propuestas por el regulador (Tabla 2), se muestran las correlaciones empíricas para cada caso. Una primera diferencia constatable es la presencia de correlaciones empíricas negativas. Éstas, de ser utilizadas, podrían ampliar el efecto diversificación en la estimación del SCR.

Por otro lado, como consecuencia de la distinta naturaleza de las variables implícitas utilizadas en cada caso, existen diferencias remarcables entre las correlaciones empíricas de las Tablas 4 y 5. Como se comentó en la sección 3, aunque desconocemos la variable implícita de las correlaciones propuestas por el regulador, consideramos que ésta coincide con la propuesta por Gisler (2009) y, por tanto, con la utilizada para obtener las correlaciones empíricas de la Tabla 4.

Tabla 4 Correlaciones empíricas de la variable aleatoria implícita en la fórmula estándar

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
I	1								
II	0,16	1							
III	0,17	0,52	1						
IV	0,71	0,04	0,27	1					
V	0,81	-0,05	0,13	0,65	1				
VI	-0,31	-0,19	-0,10	-0,34	-0,32	1			
VII	0,54	-0,12	0,09	0,31	0,48	0,00	1		
VIII	0,22	0,07	0,31	0,01	0,23	0,09	0,82	1	
IX	-0,09	-0,34	-0,55	0,16	-0,03	-0,16	-0,14	-0,16	1

Fuente: Propia

Tabla 5 Correlaciones empíricas de la variable aleatoria implícita en el modelo interno

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
I	1								
II	0,73	1							
III	0,47	0,55	1						
IV	0,37	0,15	0,02	1					
V	-0,67	-0,59	-0,79	-0,02	1				
VI	0,29	-0,02	0,60	-0,09	-0,73	1			
VII	0,35	-0,13	0,04	0,69	-0,25	0,37	1		
VIII	0,01	0,01	0,44	-0,18	0,04	-0,01	-0,42	1	
IX	-0,07	-0,20	-0,62	0,17	0,25	-0,25	0,26	-0,66	1

Fuente: Propia

En segundo lugar, en las Tablas 6, 7 y 8, se muestran las estimaciones bayesianas de los coeficientes de correlación, según el modelo propuesto en la sección 3 y para el caso de la variable aleatoria implícita en la fórmula estándar, para tres hipótesis diferentes sobre el número de pares/años observados, n_{pr} , a partir del cual el regulador supuestamente ha obtenido la información de mercado. Se han tomado $n_{pr} = 20, 10, 5$, respectivamente, para comprobar el efecto de esta hipótesis en las estimaciones de las correlaciones. Como puede apreciarse, no se producen grandes cambios en las estimaciones cuando variamos la hipótesis sobre el número de pares/años observados por el regulador.

Aunque no se muestran aquí, también se han calculado las respectivas correlaciones bayesianas para el caso de la variable implícita en el Modelo Interno.

Tabla 6 Correlaciones bayesianas de la variable aleatoria implícita en la fórmula estándar, $n_{pr} = 20 ; n_i=11$

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
I	1								
II	0,39	1							
III	0,39	0,35	1						
IV	0,44	0,18	0,26	1					
V	0,64	0,15	0,21	0,41	1				
VI	0,05	0,10	0,13	0,04	0,23	1			
VII	0,52	0,30	0,20	0,27	0,49	0,34	1		
VIII	0,24	0,36	0,44	0,34	0,24	0,20	0,52	1	
IX	0,31	0,23	0,13	0,39	0,33	0,29	0,30	0,20	1

Fuente: Propia

Tabla 7 Correlaciones bayesianas de la variable aleatoria implícita en la fórmula estándar, $n_{pr} = 10 ; n_i=11$

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
I	1								
II	0,33	1							
III	0,34	0,40	1						
IV	0,52	0,14	0,26	1					
V	0,69	0,10	0,19	0,48	1				
VI	-0,05	0,02	0,07	-0,06	0,09	1			
VII	0,52	0,20	0,17	0,28	0,49	0,26	1		
VIII	0,24	0,29	0,41	0,26	0,24	0,17	0,63	1	
IX	0,21	0,08	-0,06	0,33	0,24	0,17	0,19	0,17	1

Fuente: Propia

Tabla 8 Correlaciones bayesianas de la variable aleatoria implícita en la fórmula estándar, $n_{pr} = 5 ; n_i=11$

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
I	1								
II	0,28	1							
III	0,28	0,44	1						
IV	0,59	0,10	0,26	1					
V	0,74	0,05	0,17	0,54	1				
VI	-0,14	-0,05	0,01	-0,16	-0,06	1			
VII	0,53	0,09	0,14	0,29	0,48	0,17	1		
VIII	0,23	0,22	0,38	0,18	0,24	0,14	0,71	1	
IX	0,11	-0,07	-0,25	0,27	0,15	0,06	0,08	0,06	1

Fuente: Propia

Finalmente, con el objetivo de comprobar el posible impacto de la utilización de las diferentes correlaciones consideradas en la estimación del SCR, en la Tabla 9 se muestran los SCR obtenidos en cada caso. En el Modelo Interno, para la agregación de los resultados netos por línea de negocio, se ha utilizado la cópula gaussiana. En Bermúdez *et al.* (2011, 2012a) se encuentra una detallada explicación sobre la obtención del SCR en ambos modelos. Por otro lado, en Ferri *et al.* (2012) y Bermúdez *et al.*

(2012b) se analiza la obtención del SCR bajo un Modelo Interno como medida de riesgo y las limitaciones que se derivan. Como puede apreciarse, la estimación del SCR puede variar de manera significativa según la matriz de correlaciones que se considere.

Tabla 9 SCR derivado de la fórmula estándar y del modelo interno con distintas matrices de correlación					
	Matriz de correlación				
	Empírica	Bayesiana $n_{pr} = 5 ; n_i=11$	Bayesiana $n_{pr} = 10 ; n_i=11$	Bayesiana $n_{pr} = 20 ; n_i=11$	QIS-5
Fórmula estándar	6,02	6,31	6,43	6,53	6,65
Modelo interno	5,96	6,57	6,92	7,36	8,07

Fuente: Propia

Para los dos modelos, el menor SCR se obtiene con la matriz de correlaciones empírica. A medida que se incorpora la información de la matriz de correlaciones propuesta por el regulador, el SCR aumenta hasta alcanzar el máximo cuando exclusivamente utilizamos las correlaciones propuestas por el regulador en QIS-5. La variación en el SCR es mayor en el Modelo Interno que en la fórmula estándar. Este resultado, de un lado, es el resultado de combinar datos de distinta naturaleza en la estimación de las correlaciones en el Modelo Interno. Como ya se ha comentado, las correlaciones empíricas en este modelo lo son de una variable aleatoria implícita diferente a la que se supone para la fórmula estándar y, por tanto, para la matriz de correlaciones de QIS-5. Por otro lado, la variable aleatoria implícita para el Modelo interno, las predicciones del resultado neto por línea de negocio, presenta, para estos datos, unas desviaciones empíricas mayores que las propuestas por el regulador para la variable implícita de la fórmula estándar.

6. Conclusiones

En Ferri *et al.* (2011) se realizó una estimación del requerimiento de capital correspondiente al riesgo de suscripción no vida para el ejercicio 2010 para el conjunto del mercado español asegurador no vida y un análisis de sensibilidad del SCR correspondiente al riesgo de suscripción en el negocio de no vida frente a cambios en la matriz de correlaciones entre líneas de negocio. Y se concluyó que el SCR de este submódulo tiene una gran sensibilidad a los parámetros de los que depende el modelo y, en especial, a la matriz de correlaciones entre líneas de negocio. Por esta y otras razones, se concluía que las entidades de seguro tienen suficientes incentivos para utilizar modelos alternativos al Modelo Estándar y avanzar en modelos para el cálculo del requerimiento de capital de solvencia, bien a través de un

Modelo Estándar con parámetros específicos, o bien a través de un Modelo Interno, parcial o completo, con la finalidad de ajustar el requerimiento al perfil de la entidad.

Sin embargo, para avanzar en esta dirección es necesaria la estimación de los parámetros inherentes a cada modelo en base, por ejemplo, a la experiencia de siniestralidad de cada entidad. En este artículo, inspirados por la metodología propuesta en las especificaciones técnicas de QIS-5 para la estimación, como parámetros específicos de la fórmula estándar, de las desviaciones del riesgo de primas y reservas, proponemos una fórmula de credibilidad para la estimación de los coeficientes de correlación entre dos líneas de negocio de la variable implícita para el riesgo de primas y reservas. Para ello, hacemos uso de un modelo bayesiano para la estimación de coeficientes de correlación.

La fórmula de credibilidad propuesta combina la información del mercado (información *a priori*) con la información de la entidad mediante el teorema de Bayes. Para su utilización tan sólo es necesario contar, por un lado, con el coeficiente de correlación muestral del mercado, en nuestro caso obtenido a partir de la matriz de correlaciones de QIS-5, y el coeficiente de correlación muestral obtenido a partir de la propia experiencia de la entidad. Por otro lado, es necesario conocer el número de observaciones (o años) de los que se han extraído los anteriores coeficientes de correlación muestrales. Con esta fórmula de credibilidad, pueden estimarse los coeficientes de correlación entre líneas de negocio para su aplicación tanto en la fórmula estándar, cuando ésta se utiliza con parámetros específicos de la entidad, como en un Modelo Interno. Únicamente deben definirse, en cada caso, las variables aleatorias implícitas de cada modelo sobre las que calculamos los coeficientes de correlación.

De la aplicación de esta fórmula de credibilidad a los datos agregados del conjunto del mercado español asegurador no vida, se extraen las siguientes conclusiones. En primer lugar, los coeficientes de correlación empíricos entre dos líneas de negocio pueden ser sustancialmente distintos de aquellos propuestos por el regulador. En segundo lugar, la utilización de una fórmula de credibilidad que combina la información de mercado con la información de cada entidad proporciona unos coeficientes de correlación intermedios. Finalmente, la estimación del SCR puede variar de manera significativa según la matriz de correlaciones que se considere.

La fórmula de credibilidad propuesta no está exenta de limitaciones. Éstas pueden ser divididas en dos grupos. De un lado, las limitaciones relativas al

modelo bayesiano utilizado y, por otro lado, las relativas a la aplicación de éste al caso que nos ocupa. Entre las primeras, destacamos la hipótesis de normalidad sobre la que se sustenta el modelo y las aproximaciones que se deben adoptar para conseguir una fórmula de credibilidad cerrada. Respecto al segundo grupo de limitaciones, destacar que éstas se originan por el desconocimiento sobre dos aspectos de la información de mercado propuesta por el regulador, en primer lugar, la variable aleatoria implícita en la matriz de correlaciones de QIS-5 y, en segundo lugar, el número de observaciones (o años) a partir de los que se han obtenido los coeficientes de correlación de dicha matriz. Ambos aspectos son necesarios para una óptima aplicación de la fórmula de credibilidad propuesta.

Con el objetivo de superar estas limitaciones, nuevos esfuerzos investigadores deberían ser abordados. Por una parte, la utilización de otros modelos bayesianos y de técnicas de simulación MCMC pueden ayudar a salvar las limitaciones teóricas del modelo bayesiano considerado. Por otra parte, a medida que se conozcan más detalles sobre la fórmula estándar y sus parámetros en las medidas de nivel 2 comunitarias, es de esperar que se clarifiquen los aspectos relacionados con la matriz de correlaciones que propone el regulador como *benchmark* de mercado.

Referencias

- Bermúdez, L., Ferri, A. y M. Guillén (2011). A correlation sensitivity analysis of non-life underwriting risk in solvency capital requirement estimation. *XREAP* No. 2011-12. <http://ssrn.com/abstract=1922794>
- Bermúdez, L., Ferri, A. y M. Guillén (2012a). A correlation sensitivity analysis of non-life underwriting risk in solvency capital requirement estimation. *ASTIN bulletin*. Pendiente de publicación.
- Bermúdez, L., Ferri, A. y M. Guillén (2012b). On the use of Risk Measures in Solvency Capital Estimation. *International Journal of Business Continuity and Risk Management*. Pendiente de publicación.
- Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors, CEIOPS (2010). 5th Quantitative Impact Study, Technical Specifications. https://eiopa.europa.eu/fileadmin/tx_dam/files/consultations/QIS/QIS5/QIS5-technical_specifications_20100706.pdf (consultado 30/10/2012)
- Directiva 2009/138/EC del Parlamento Europeo y del Consejo de 25 de Noviembre de 2009 sobre el acceso y ejercicio de la actividad aseguradora y reaseguradora.

<http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=OJ:L:2009:335:0001:0155:ES:PDF> (consultado 30/10/2012)

Ferri, A., Bermúdez, L. y M. Alcañiz (2011). Análisis de sensibilidad a las correlaciones entre líneas de negocio del SCR del módulo de suscripción no vida basado en la fórmula estándar. *Anales del Instituto de Actuarios*, 75-90.

Ferri, A., Guillén, M. y Bermúdez, L. (2012). Solvency capital estimation and risk measures. *Lecture Notes in Business Information Processing*, 115, 34-43.

Fisher, R.A. (1915). Frequency distributions of the values of the correlation coefficients in sample of indefinitely large population. *Biometrika*, 10, 507-521.

Gisler, A. (2009). The Insurance Risk in the SST and in Solvency II: Modelling and parameter estimation. *ASTIN Colloquium* in Helsinki.

Gómez-Déniz, E. y J.M. Sarabia (2008). *Teoría de la Credibilidad: Desarrollo y Aplicaciones en Primas de Seguros y Riesgos Operacionales*. Fundación Mapfre. Madrid (España).

Lee, P.M. (1989). *Bayesian Statistics: An Introduction*. Oxford University Press. New York (EEUU).

UNESPA (2007). El Modelo Español de Solvencia paso a paso.

http://www.unespa.es/adjuntos/fichero_2590_20080227.pdf (consultado 30/10/2012)