

ESTRATEGIA DE REASEGURO PROPORCIONAL ÓPTIMA DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LA PROBABILIDAD DE RUINA: UN ANÁLISIS CON MATHEMATICA 6.

Anna Castañer¹, M.Mercè Claramunt² y Maite Mármol³

*Departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial.
Universidad de Barcelona*

ABSTRACT

In this paper, we calculate the optimal proportional reinsurance strategy from the point of view of ruin probability in the context of the classical model of Risk Theory, considering that the number of claims follows a compound Poisson process and that the claim amount is exponentially distributed. We obtain explicit expressions for the insurer retention level and we compare our results with the ones derived from the upper bound for the probability of ruin. We then perform the functional analysis of the analytical expressions by making use of *Mathematica 6*.

Keywords: Proportional reinsurance, retention level, ruin probability, *Mathematica 6*.

RESUMEN

En este trabajo, en el contexto del modelo clásico de la Teoría del Riesgo, asumiendo un proceso de Poisson para el número de siniestros y distribución exponencial para la cuantía de un siniestro, se plantea el cálculo de la estrategia de reaseguro proporcional óptima desde el punto de vista de la probabilidad de ruina. Se obtienen expresiones explícitas para el porcentaje de retención que debe aplicar el asegurador, y se comparan los resultados con la aproximación obtenida a partir de la cota superior de la probabilidad de ruina. Para la realización del análisis funcional de las expresiones analíticas obtenidas se utiliza el software *Mathematica 6*.

¹ Facultad de Economía y Empresa Universidad de Barcelona. Avda. Diagonal, 690. 08034 Barcelona. Tel: 934034893 Fax: 934034892. acastaner@ub.edu

² Facultad de Economía y Empresa Universidad de Barcelona. Avda. Diagonal, 696. 08034 Barcelona. Tel: 934035744 Fax: 934034892. mmclaramunt@ub.edu

³ Facultad de Economía y Empresa Universidad de Barcelona. Avda. Diagonal, 696. 08034 Barcelona. Tel: 934035744 Fax: 934034892. mmarmol@ub.edu

Este artículo se ha recibido en versión revisada el 21 de junio de 2010

Palabras clave: reaseguro proporcional, porcentaje de retención, probabilidad de ruina, *Mathematica 6*.

1. Introducción

En este trabajo se analiza la solvencia de una cartera de seguros no vida en el contexto del modelo clásico de la teoría del riesgo usando la probabilidad de ruina como la medida utilizada para controlar la solvencia si el gestor de la cartera opta por un reaseguro proporcional.

El objetivo del trabajo es hallar el porcentaje de retención óptimo desde el punto de vista de la probabilidad de ruina de la cedente, es decir el porcentaje que minimiza dicha probabilidad.

El artículo se estructura de la siguiente forma: en el Apartado 2 se recogen las hipótesis y variables básicas del modelo clásico de la Teoría del riesgo, incluyéndose las expresiones para la probabilidad de ruina en un modelo con reaseguro proporcional con número de siniestros Poisson y cuantía exponencial. En el Apartado 3 se plantea el cálculo de la estrategia de reaseguro óptima, obteniéndose el porcentaje de retención que minimiza la probabilidad de ruina. Para el desarrollo de este apartado se usa el software *Mathematica 6* que nos ayuda a analizar la estrategia óptima. Finalmente, en el Apartado 4 se comparan los resultados obtenidos con trabajos previos (Waters (1983), Schmidli (2001, 2006) o Hald y Schmidli (2004)) en los que se plantea la estrategia óptima como una aproximación obtenida a partir de la cota superior para la probabilidad de ruina.

2. Modelo clásico y reaseguro

En el modelo clásico de la teoría del riesgo en tiempo continuo (Gerber (1979), Bowers *et al.* (1997), Beard *et al.* (1990), Bühlmann (1970)), se define el proceso de las reservas como,

$$R(t) = u + ct - S(t)$$

donde $R(t)$ es el nivel de las reservas en el momento t , calculadas como la cuantía de las reservas en el momento inicial, $R(0) = u$, más las primas

recibidas en cada instante, c , menos la siniestralidad agregada $S(t)$, siendo

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i,$$

$N(t)$ es el número de siniestros ocurridos hasta el momento t , y Z_i la cuantía del i -ésimo siniestro. Las cuantías individuales de los siniestros son una secuencia de variables aleatorias idénticas e independientemente distribuidas, e independientes de $N(t)$.

En la Figura 1 podemos observar una posible trayectoria del proceso de las reservas, siendo $T_i, i=1, \dots, n$ los momentos de ocurrencia del i -ésimo siniestro.

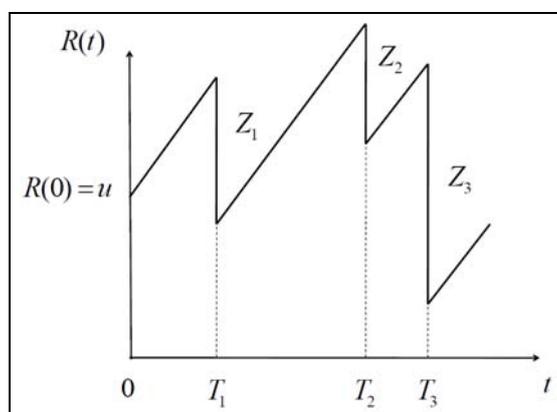


Figura 1: Proceso de las reservas, $R(t)$

En el modelo clásico, el proceso de ocurrencia de los siniestros $\{N(t), t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson de media λ , donde $N(t)$ es el número de siniestros ocurridos en el intervalo $(0, t]$, siendo $\{S(t), t \geq 0\}$ un proceso de Poisson compuesto, cumpliéndose que $S(t) = 0$ si $N(t) = 0$.

La prima se calcula como la siniestralidad esperada recargada por un coeficiente de seguridad $\rho > 0$, cumpliéndose la condición “*net profit*”, $c = \lambda E[Z](1 + \rho)$.

Definimos a continuación la probabilidad de ruina, $\psi(u)$, que es la medida que vamos a utilizar en este trabajo para analizar la solvencia en las carteras de seguros no vida,

$$\psi(u) = P\{R(t) < 0 \text{ para algún } t > 0 \mid R(0) = u\} = P(T < \infty \mid R(0) = u),$$

siendo $T = \min\{t \mid R(t) < 0\}$, la variable aleatoria que representa el momento de ruina. Si las reservas son positivas para todo t , entonces $T = \infty$.

Si se asume que la cuantía individual de los siniestros sigue una distribución exponencial unitaria, la conocida expresión para la probabilidad de ruina es,

$$\psi(u) = \frac{1}{1 + \rho} e^{-\frac{\rho}{1+\rho}u}, \quad \forall u \geq 0. \quad (1)$$

Mediante la introducción de contratos de reaseguro en la gestión de una cartera de seguros no vida, el asegurador cede una parte del riesgo asumido al reasegurador. Evidentemente, esto conlleva también la cesión de una parte de las primas. En este trabajo introducimos en el modelo una estrategia de reaseguro proporcional que influye en el proceso de las reservas y por tanto en la solvencia del asegurador.

Nuestro objetivo es analizar esta influencia a través de la probabilidad de ruina, planteando el cálculo del porcentaje de retención que minimiza la probabilidad de ruina.

A partir de ahora nos centramos en el reaseguro proporcional en el cual el asegurador o cedente asume un porcentaje $k \in (0, 1]$ de la cuantía de los siniestros, denominado nivel de retención, y el reasegurador el porcentaje $(1 - k)$ restante (ver Mármol *et al.* (2009)).

Debido a la cesión de un porcentaje del riesgo asumido, se produce también una cesión de la prima al reasegurador, pudiendo definirse entonces una prima neta para el asegurador denominada c' ,

$$c' = c - (1 - k)(1 + \rho_R)\lambda E[Z].$$

siendo $\rho_R > 0$ el recargo de seguridad que aplica el reasegurador al asegurador. El caso habitual analizado en los trabajos sobre reaseguro es el que implica que $\rho_R > \rho > 0$ ya que si $\rho_R \leq \rho$, el asegurador cedería toda su cartera al reasegurador, situación que carece de sentido.

La definición de la prima neta implica la definición de un nuevo recargo de seguridad real para el asegurador,

$$\rho_N = \frac{c'}{k\lambda E[Z]} - 1 = \rho_R - \frac{\rho_R - \rho}{k}, \quad (2)$$

de donde, debido a la necesidad de que, por la condición “net profit”, $\rho_N > 0$, se obtiene un rango para el valor de k ,

$$\frac{\rho_R - \rho}{\rho_R} < k \leq 1, \quad \rho_R > \rho > 0.$$

La introducción de una política de reaseguro proporcional implica una modificación en el proceso de las reservas, siendo

$$R_k(t) = u + c't - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

donde $Y_i = kZ_i$ y $c' = \lambda E[Y_i](1 + \rho_N)$.

Así, las expresiones obtenidas para el modelo sin reaseguro proporcional pueden reconvertirse en expresiones para el modelo con reaseguro proporcional considerando la prima c' , la cuantía de los siniestros $Y = kZ$, y el nuevo recargo ρ_N . Es inmediata, por tanto, la obtención de la expresión para la probabilidad de ruina en un modelo con reaseguro proporcional, $\psi_k(u)$, a partir de (1),

$$\psi_k(u) = \frac{1}{1 + \rho_N} e^{-\frac{\rho_N}{k(1 + \rho_N)}u}, \quad \forall u \geq 0.$$

Expresión que, a partir de (2), podemos reescribir como,

$$\psi_k(u) = \frac{1}{k(1 + \rho_R) + \rho - \rho_R} e^{-\frac{\rho_R(k-1) + \rho}{k((1 + \rho_R)k + \rho - \rho_R)}u}, \quad \forall u \geq 0. \quad (3)$$

3. Análisis de la probabilidad de ruina en un modelo con reaseguro proporcional: Estrategia óptima.

Se analiza en este apartado la obtención de la estrategia óptima del asegurador desde el punto de vista de la probabilidad de ruina.

Nuestro objetivo es la obtención del valor del porcentaje de retención que minimiza dicha probabilidad. Para ello, aplicamos un proceso de optimización a la expresión (3), considerándola una función cuya variable independiente es k , y aplicando las condiciones necesarias y suficientes de optimalidad.

Para el análisis de la probabilidad de ruina y del valor óptimo del porcentaje de retención que minimiza la probabilidad de ruina, al que denominamos k_{op} , realizaremos un análisis funcional con la ayuda del software informático *Mathematica 6*.

Para obtener k_{op} , introducimos la expresión $\psi_k(u)$ en *Mathematica 6*, derivamos la expresión de la probabilidad de ruina e igualamos a cero, obteniéndose⁴,

⁴ En las pantallas de *Mathematica 6* incluidas a lo largo del trabajo se considera que:

- $ro = \rho$, $ror = \rho_R$.
- $Ruina[k _, u _] = \psi_k(u)$.
- $Derivation[k _, u _] = \frac{\partial \psi_k(u)}{\partial k}$.

```

In[3]:= ron[k_] := ror - (ror - ro) / k
In[4]:= Ruina[k_, u_] := 1 / (1 + ron[k]) * Exp[(-ron[k] * u) / ((1 + ron[k]) * k)]
In[5]:= Ruina[k, u]
Out[5]= 
$$\frac{e^{\frac{(-ror + \frac{ro+ror}{k}) u}{k(1+ror - \frac{ro+ror}{k})}}}{1 + ror - \frac{ro+ror}{k}}$$

In[6]:= derivation[k_, u_] = D[Ruina[k, u], k]
Out[6]= 
$$-\frac{e^{\frac{(-ror + \frac{ro+ror}{k}) u}{k(1+ror - \frac{ro+ror}{k})}} (-ror + ror)}{k^2 (1 + ror - \frac{ro+ror}{k})^2} + \frac{e^{\frac{(-ror + \frac{ro+ror}{k}) u}{k(1+ror - \frac{ro+ror}{k})}}}{1 + ror - \frac{ro+ror}{k}} \left( -\frac{(-ror + ror) u}{k^2 (1 + ror - \frac{ro+ror}{k})} - \frac{(-ror + ror) (-ror - \frac{ro+ror}{k}) u}{k^2 (1 + ror - \frac{ro+ror}{k})^2} - \frac{(-ror + \frac{ro+ror}{k}) u}{k^2 (1 + ror - \frac{ro+ror}{k})} \right)$$

In[7]:= FullSimplify[derivation[k, u]]
Out[7]= 
$$\frac{e^{-\frac{(ro+(-1+k)ror)u}{k(k+ro+(-1+k)ror)}} (k^2 (1 + ror) (ro + ror (-1 + u)) + (ro - ror)^2 u + k (ro - ror) (ro - ror + 2 (1 + ror) u))}{k (k + ro + (-1 + k) ror)^3}$$

In[8]:= FullSimplify[Solve[
    (k^2 (1 + ror) (ro + ror (-1 + u)) + (ro - ror)^2 u + k (ro - ror) (ro - ror + 2 (1 + ror) u)) == 0, k]]
Out[8]= 
$$\left\{ \left\{ k \rightarrow -\frac{(ro - ror) \left( ro + 2u + ror (-1 + 2u) + \sqrt{(ro - ror)^2 + 4 (1 + ror) u^2} \right)}{2 (1 + ror) (ro + ror (-1 + u))} \right\}, \right.$$


$$\left. \left\{ k \rightarrow \frac{(ro - ror) \left( -ro + ror - 2u - 2roru + \sqrt{(ro - ror)^2 + 4 (1 + ror) u^2} \right)}{2 (1 + ror) (ro + ror (-1 + u))} \right\} \right\}$$


```

Tenemos, por tanto dos puntos críticos,

$$In[9]:= k1op[u_] := -\frac{(ro - ror) \left(ro + 2u + ror (-1 + 2u) + \sqrt{(ro - ror)^2 + 4 (1 + ror) u^2} \right)}{2 (1 + ror) (ro + ror (-1 + u))}$$

$$In[10]:= k2op[u_] := \frac{(ro - ror) \left(-ro + ror - 2u - 2roru + \sqrt{(ro - ror)^2 + 4 (1 + ror) u^2} \right)}{2 (1 + ror) (ro + ror (-1 + u))}$$

Para conocer el carácter de los dos puntos óptimos obtenidos, simplificamos las expresiones imponiendo las condiciones previas definidas en el modelo, que son la relación entre los recargos, $\rho_R > \rho > 0$, la positividad de las reservas $u \geq 0$, y la condición que debe cumplir el porcentaje de retención para que se cumpla la condición de “net profit”, es decir $\frac{\rho_R - \rho}{\rho_R} < k \leq 1$.

Si lo aplicamos al primer punto crítico, k1op[u] obtenemos,

```
In[11]= Simplify[Reduce[0 < ((ror - ro) / ror) < k1op[u] ≤ 1 && 0 < ro < ror && u ≥ 0]]
Out[11]= ro > 0 && ro < ror < ro (2 + ro) && u ≥ -  $\frac{(1 + ro) (ro - ror)}{2 ro + ro^2 - ror}$ 
```

Podemos observar que este valor del porcentaje de retención cumple las condiciones impuestas para valores de las reservas iniciales

$$u \geq \frac{(1 + \rho)(\rho_R - \rho)}{\rho(2 + \rho) - \rho_R}.$$

Esta última restricción nace de la necesidad impuesta de que $k_{op}(u) < 1$,

siendo $u^* = \frac{(1 + \rho)(\rho_R - \rho)}{\rho(2 + \rho) - \rho_R}$ el valor que cumple $k_{op}(u^*) = 1$. Por tanto,

podemos deducir que $k_{op}(u)$ es decreciente respecto a u en el intervalo que nos interesa.

La otra restricción obtenida es $\rho(2 + \rho) > \rho_R$, necesaria para que se cumpla que el valor $u^* \geq 0$.

Aplicamos las condiciones al segundo punto crítico encontrado, k2op[u] obteniéndose,

```
In[12]= Simplify[Reduce[0 < ((ror - ro) / ror) < k2op[u] ≤ 1 && 0 < ro < ror && u ≥ 0]]
Out[12]= False
```

Quedando, por tanto, descartado al no cumplir las condiciones básicas del modelo.

Para comprobar que el primer punto crítico cumple la condición suficiente de optimalidad, calculamos la segunda derivada de la función de ruina⁵,

```
In[11]= der2[k_, u_] = D[derivation[k, u], k]
```

⁵ En las pantallas de *Mathematica 6* se considera que:

- $der2[k_, u_] = \frac{\partial^2 \psi_k(u)}{\partial k^2}$.

y la simplificamos, obteniéndose

In[12]= FullSimplify[der2[k, u]]

$$\text{Out[12]= } \frac{1}{k^3 (k + r_0 + (-1 + k) r_0 r)^5} e^{-\frac{(r_0 + (-1+k) r_0) u}{k (k+r_0+(-1+k) r_0)}} \left(-2 k^5 (1 + r_0 r)^3 (r_0 + r_0 r (-1 + u)) + (r_0 - r_0 r)^4 u^2 + 4 k (r_0 - r_0 r)^3 (1 + r_0 r) u^2 - 2 k^2 (r_0 - r_0 r)^2 (1 + r_0 r) u (r_0 - r_0 r - 2 u - 3 r_0 r u) + k^4 (1 + r_0 r)^2 (-4 (r_0 - r_0 r)^2 + 6 (1 + r_0 r) (-r_0 + r_0 r) u + r_0 r^2 u^2) - 2 k^3 (r_0 - r_0 r) (1 + r_0 r) ((r_0 - r_0 r)^2 + (r_0 - r_0 r) (4 + 3 r_0 r) u - 2 r_0 r (1 + r_0 r) u^2) \right)$$

Calculamos la segunda derivada en el punto crítico k1op[u],

In[14]= FullSimplify[der2[k1op, u],
0 < ((r_0 r - r_0) / r_0 r) < k1op[u] ≤ 1 && 0 < r_0 < r_0 r < r_0 (2 + r_0) && u ≥ 0]

$$\text{Out[14]= } - \left(128 e^{\frac{(2 r_0 r u + \sqrt{(r_0 r - r_0)^2 + 4 (1 + r_0 r) u^2})}{2 r_0 r}} (1 + r_0 r) (r_0 + r_0 r (-1 + u))^4 u^2 \left(r_0 r^5 - r_0^3 r_0 r (2 + r_0 r) + 16 u^2 \left(2 u + \sqrt{(r_0 - r_0 r)^2 + 4 (1 + r_0 r) u^2} \right) + r_0 r^4 \left(2 + 4 u (1 + u) + \sqrt{(r_0 - r_0 r)^2 + 4 (1 + r_0 r) u^2} \right) + 16 r_0 r u^2 \left(5 u + 2 \sqrt{(r_0 - r_0 r)^2 + 4 (1 + r_0 r) u^2} \right) - r_0 r_0 r \left(3 r_0 r^3 + 2 r_0 r^2 \left(3 + 2 u (2 + u) + \sqrt{(r_0 - r_0 r)^2 + 4 (1 + r_0 r) u^2} \right) + 4 \left(\sqrt{(r_0 - r_0 r)^2 + 4 (1 + r_0 r) u^2} + u \left(4 + 2 u + \sqrt{(r_0 - r_0 r)^2 + 4 (1 + r_0 r) u^2} \right) \right) + 4 r_0 r \left(\sqrt{(r_0 - r_0 r)^2 + 4 (1 + r_0 r) u^2} + u \left(6 + 3 u + \sqrt{(r_0 - r_0 r)^2 + 4 (1 + r_0 r) u^2} \right) \right) \right) + r_0^2 \left(2 \left(4 u + \sqrt{(r_0 - r_0 r)^2 + 4 (1 + r_0 r) u^2} \right) + r_0 r \left(r_0 r \left(6 + 3 r_0 r + 4 u + \sqrt{(r_0 - r_0 r)^2 + 4 (1 + r_0 r) u^2} \right) + 2 \left(6 u + \sqrt{(r_0 - r_0 r)^2 + 4 (1 + r_0 r) u^2} \right) \right) + 2 r_0 r^3 \left(\sqrt{(r_0 - r_0 r)^2 + 4 (1 + r_0 r) u^2} + u \left(2 \left(3 + \sqrt{(r_0 - r_0 r)^2 + 4 (1 + r_0 r) u^2} \right) + u \left(6 + 8 u + \sqrt{(r_0 - r_0 r)^2 + 4 (1 + r_0 r) u^2} \right) \right) \right) + 2 r_0 r^2 \left(\sqrt{(r_0 - r_0 r)^2 + 4 (1 + r_0 r) u^2} + u \left(2 \left(2 + \sqrt{(r_0 - r_0 r)^2 + 4 (1 + r_0 r) u^2} \right) + u \left(4 + 32 u + 9 \sqrt{(r_0 - r_0 r)^2 + 4 (1 + r_0 r) u^2} \right) \right) \right) \right) \right) / \left((r_0 - r_0 r)^3 \left(-r_0 + r_0 r + 2 u + \sqrt{(r_0 - r_0 r)^2 + 4 (1 + r_0 r) u^2} \right)^5 \left(r_0 + 2 u + r_0 r (-1 + 2 u) + \sqrt{(r_0 - r_0 r)^2 + 4 (1 + r_0 r) u^2} \right)^3 \right)$$

Y finalmente para analizar el signo de esta última expresión, analizamos cada uno de los factores incluidos en la segunda derivada, e imponiendo las condiciones del modelo, concluimos que es positiva, siendo por tanto el punto crítico un mínimo (no incluimos en el trabajo las pantallas de *Mathematica 6* debido a lo aparatoso de las expresiones trabajadas).

Por tanto, el resultado obtenido para $k_{op}(u)$, si se cumple $\rho(2+\rho) > \rho_R$, es,

$$k_{op}(u) = \begin{cases} \frac{(\rho_r - \rho) \left(\rho + 2u + \rho_r(2u-1) + \sqrt{(\rho - \rho_r)^2 + 4(1 + \rho_r)u^2} \right)}{2(1 + \rho_r)(\rho + \rho_r(u-1))} & u \geq \frac{(1+\rho)(\rho_r - \rho)}{\rho(2+\rho) - \rho_r} \\ 1 & 0 \leq u < \frac{(1+\rho)(\rho_r - \rho)}{\rho(2+\rho) - \rho_r} \end{cases} \quad (4)$$

Centramos nuestro análisis en el primer tramo de $k_{op}(u)$, realizando un análisis funcional con la ayuda del *Mathematica 6*.

- Analizamos su dominio, encontrando una asíntota vertical en el valor que anula el denominador, obteniéndose $u = \frac{\rho_R - \rho}{\rho_R}$,

```
Solve[2 (1 + rho) (rho + rho (-1 + u)) == 0, u]
Out[14]= {{u -> -rho + rho}}
```

- Analizamos la función en un entorno de la asíntota obteniéndose que $\lim_{u \rightarrow \left(\frac{\rho_r - \rho}{\rho_r}\right)^+} k_{op}(u) = \infty$ y $\lim_{u \rightarrow \left(\frac{\rho_r - \rho}{\rho_r}\right)^-} k_{op}(u) = -\infty$,

```
In[20]= (*Limite por la derecha en el punto de discon.*)
In[21]= Limit[klop[u], u -> -rho + rho, Direction -> -1, Assumptions -> 0 < rho < rho]
Out[21]= infinity
In[22]= (*Limite por la izquierda en el punto de discon.*)
In[23]= Limit[klop[u], u -> -rho + rho, Direction -> 1, Assumptions -> 0 < rho < rho]
Out[23]= -infinity
```

- Para el cálculo de posibles asíntotas horizontales, calculamos $\lim_{u \rightarrow \infty} k_{op}(u)$,

```
In[16]= FullSimplify[Limit[klop[u], u -> Infinity]]
Out[16]= (rho + rho) (1 + rho + sqrt(1 + rho)) / (rho (1 + rho))
```

obteniéndose

$$\lim_{u \rightarrow \infty} k_{op}(u) = \left(1 - \frac{\rho}{\rho_r}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \rho_r}}\right),$$

y comprobamos que el valor de la asíntota es menor que 1

$$\text{In[19]= Reduce}\left[1 > \frac{(-r_0 + r_0r) (1 + r_0r + \sqrt{1 + r_0r})}{r_0r (1 + r_0r)} > 0 \ \&\& \ 0 < r_0 < r_0r\right]$$

$$\text{Out[19]= } r_0 > 0 \ \&\& \ r_0 < r_0r < 2 r_0 + r_0^2$$

- Los puntos de corte de la función $k_{op}(u)$ con el eje de abscisas se obtienen haciendo $k_{op}[u]=0$

$$\text{Solve}[k_{op}[u] == 0, u]$$

$$\text{Out[13]= } \{\{u \rightarrow 0\}\}$$

- Para conocer el crecimiento o decrecimiento de la función, calculamos su derivada

$$\text{In[23]= FullSimplify}[derivada_{k_{op}} = D[k_{op}[u], u]]$$

$$\text{Out[23]= } -\left(\frac{(r_0 - r_0r)^2}{\left(2 \left(2 u + \sqrt{(r_0 - r_0r)^2 + 4 (1 + r_0r) u^2}\right) + r_0r \left(-r_0 + r_0r + 4 u + \sqrt{(r_0 - r_0r)^2 + 4 (1 + r_0r) u^2}\right)\right)}\right) / \left(2 (1 + r_0r) (r_0 + r_0r (-1 + u))^2 \sqrt{(r_0 - r_0r)^2 + 4 (1 + r_0r) u^2}\right)$$

y analizamos su signo,

$$\text{In[25]= Reduce}[derivada_{k_{op}} > 0 \ \&\& \ 0 < r_0 < r_0r \ \&\& \ u \geq 0]$$

$$\text{Out[25]= } \text{False}$$

$$\text{In[27]= Reduce}[derivada_{k_{op}} < 0 \ \&\& \ 0 < r_0 < r_0r \ \&\& \ u \geq 0]$$

$$\text{Out[27]= } r_0 > 0 \ \&\& \ r_0r > r_0 \ \&\& \ \left(0 \leq u < \frac{-r_0 + r_0r}{r_0r} \ || \ u > \frac{-r_0 + r_0r}{r_0r}\right)$$

Siendo negativa para todos los valores (evidentemente exceptuando el valor de la asíntota vertical), y por tanto la función es decreciente respecto a u .

Con los resultados obtenidos en el análisis funcional del primer tramo de $k_{op}(u)$, graficamos en la Figura 2 su comportamiento en función de las

reservas iniciales, y representamos en la Figura 3 la elección óptima del porcentaje de retención, $k_{op}(u)$.

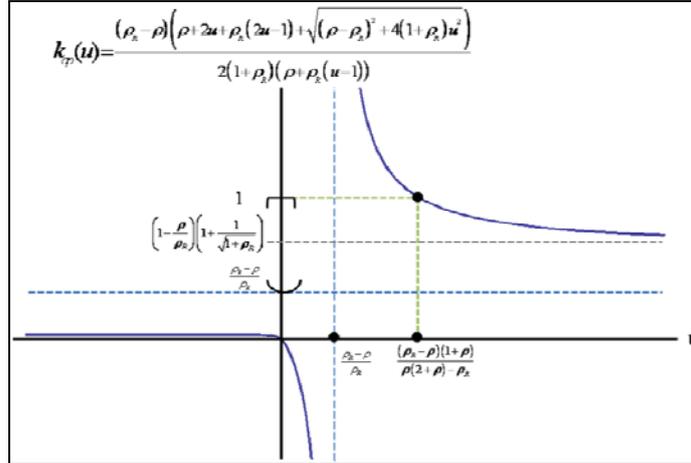


Figura 2: Gráfica del valor del porcentaje de retención que minimiza la probabilidad de ruina en función del nivel inicial de las reservas, $k_{op}(u)$

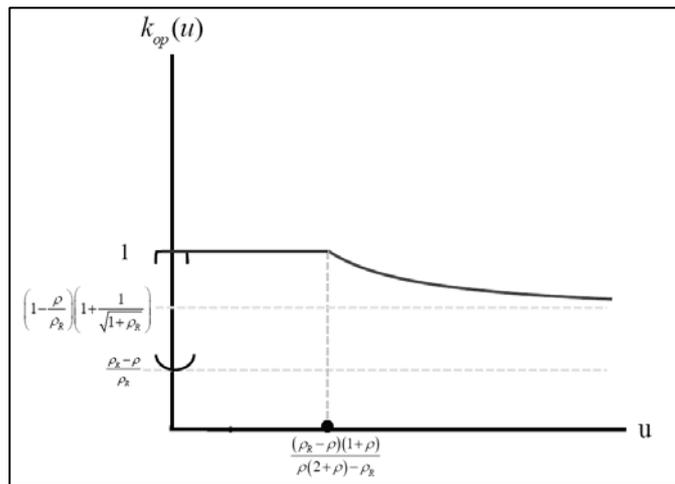


Figura 3: Elección óptima del porcentaje de retención, $k_{op}(u)$.

Una vez obtenidos los valores de $k_{op}(u)$, los valores mínimos de la probabilidad de ruina correspondiente, $\psi_{\min}^{k_{op}}(u)$, son

$$\psi_{\min}^{k_{op}}(u) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{(\rho - \rho_x)u - \sqrt{(\rho - \rho_x)^2 + 4(1 + \rho_x)u}}{\rho - \rho_x}}}{(1 + \rho_x)(\rho_x - \rho + 2u + \sqrt{(\rho - \rho_x)^2 + 4(1 + \rho_x)u^2})} & u \geq \frac{(1 + \rho)(\rho_x - \rho)}{\rho(2 + \rho) - \rho_x} \\ \frac{1}{1 + \rho} e^{-\frac{\rho}{1 + \rho}u} & 0 \leq u < \frac{(1 + \rho)(\rho_x - \rho)}{\rho(2 + \rho) - \rho_x} \end{cases} \quad (5)$$

El segundo tramo corresponde a un valor $k_{op}(u) = 1$, es decir un modelo donde el asegurador no cede riesgo al reasegurador, siendo por tanto la expresión obtenida, la probabilidad de ruina en un modelo sin reaseguro

Las expresiones (4) y (5) ya se presentaron en Mármol *et al.* (2009) con una estructura diferente, pero no fueron analizadas. El cambio en la estructura en el porcentaje de retención óptima y la probabilidad mínima se debe a que ahora nuestro objetivo es obtener valores del porcentaje de retención que optimiza la estrategia del asegurador desde el punto de vista de la probabilidad de ruina. Necesitamos, pues, explicitar las expresiones en función de parámetros como los recargos de seguridad y el porcentaje de retención.

Analizamos a continuación el caso concreto $\rho = 0.15$ y $\rho_R = 0.25$, que implica que el rango para el porcentaje de retención es $0.4 \leq k \leq 1$. Para estos valores, representamos en la Figura 4 los resultados obtenidos para $k_{op}(u)$,

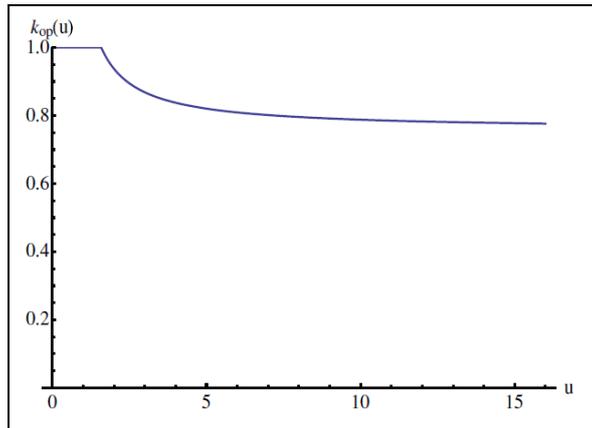


Figura 4: $k_{op}(u)$ para diferentes valores de las reservas iniciales

En la Figura 5 se representan las probabilidades de ruina para distintos niveles iniciales de las reservas, en el rango comentado anteriormente para el porcentaje de retención.

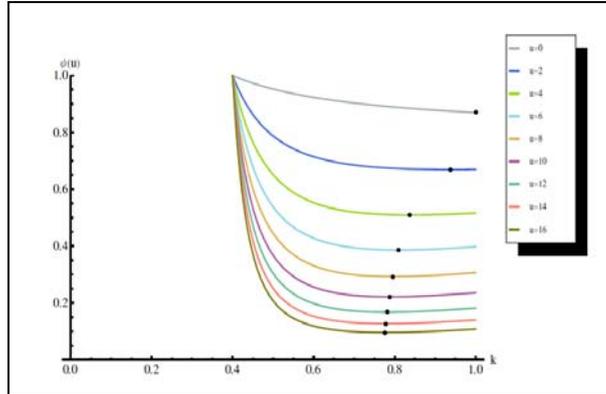


Figura 5: Probabilidad de ruina en función de k para diferentes valores de las reservas iniciales

El análisis previo realizado implicaba la exigencia de que $\rho(2 + \rho) > \rho_R$ para asegurar la existencia de un $k_{op}(u)$. Nos planteamos a continuación que sucede si $\rho(2 + \rho) < \rho_R$. Para ello vamos a analizar el signo de la derivada de $\psi_{\min}^{k_{op}}(u)$ para saber si es creciente o decreciente.

El valor de la derivada es,

```
In[7]= FullSimplify[derivation[k, u]]
Out[7]= 
$$\frac{e^{-\frac{(ro+(-1+k)ror)u}{k(k+ro+(-1+k)ror)}}}{k(k+ro+(-1+k)ror)^3} (k^2(1+ror)(ro+ror(-1+u)) + (ro-ror)^2u + k(ro-ror)(ro-ror+2(1+ror)u))$$

```

Y analizamos el signo. Le pedimos al Matemática que nos analice si es positiva para las condiciones impuestas (incluyendo evidentemente el caso que estamos analizando $\rho(2 + \rho) < \rho_R$), obteniéndose

```
In[37]= Reduce[derivation[k, u] > 0 && ro > 0 && ro < roR > 2 ro + ro^2 && ((ror - ro) / roR) < k && u >= 0]
Out[37]= False
```

Como no es positiva, analizamos si es negativa, considerando cada uno de los elementos de la derivada. Empezamos comprobando que el denominador es positivo con las condiciones ya comentadas,

```
In[40]= Reduce[k (k + r0 + (-1 + k) r0r)^3 < 0 && r0 > 0 && r0 < r0r > 2 r0 + r0^2 && ((r0r - r0) / r0r) < k ≤ 1]
Out[40]= False

In[41]= Reduce[k (k + r0 + (-1 + k) r0r)^3 > 0 && r0 > 0 && r0 < r0r > 2 r0 + r0^2 && ((r0r - r0) / r0r) < k ≤ 1]
Out[41]= r0 > 0 && r0r > 2 r0 + r0^2 &&  $\frac{-r0 + r0r}{r0r} < k \leq 1$ 
```

Respecto al numerador, ya sabemos que la exponencial es positiva y pasamos a analizar el otro factor,

```
In[46]= Reduce[(k^2 (1 + r0r) (r0 + r0r (-1 + u)) + (r0 - r0r)^2 u + k (r0 - r0r) (r0 - r0r + 2 (1 + r0r) u)) > 0 &&
r0 > 0 && r0 < r0r > 2 r0 + r0^2 && ((r0r - r0) / r0r) < k ≤ 1 && u ≥ 0]
Out[46]= False

In[47]= Reduce[(k^2 (1 + r0r) (r0 + r0r (-1 + u)) + (r0 - r0r)^2 u + k (r0 - r0r) (r0 - r0r + 2 (1 + r0r) u)) < 0 &&
r0 > 0 && r0 < r0r > 2 r0 + r0^2 && ((r0r - r0) / r0r) < k ≤ 1 && u ≥ 0]
Out[47]= r0 > 0 && r0r > 2 r0 + r0^2 &&  $\frac{-r0 + r0r}{r0r} < k \leq 1$  && u ≥ 0
```

obteniéndose que es negativo. Así, la probabilidad de ruina es siempre decreciente respecto a k , alcanzándose su valor mínimo en $k = 1$, de manera que $k_{op}(u) = 1$ para todo nivel inicial de las reservas.

En la Figura 6 se representan gráficamente los valores de la probabilidad de ruina para distintos valores de las reservas iniciales, para $\rho = 0.1$ y $\rho_R = 0.3$, cumpliéndose que $\rho(2 + \rho) < \rho_R$

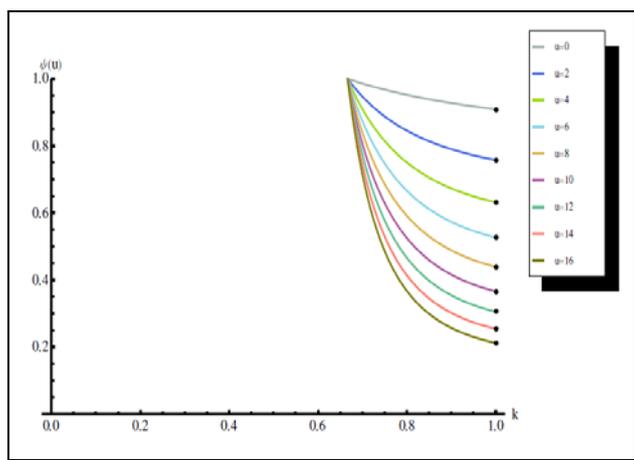


Figura 6: Probabilidad de ruina en función de k para diferentes valores de las reservas iniciales

4. Comparación de resultados.

Una vez obtenidas las expresiones analíticas para la probabilidad de ruina, y del valor del porcentaje de retención, se comparan a continuación los resultados obtenidos con resultados previos para buscar la estrategia óptima para el gestor de la cartera desde el punto de vista de la probabilidad de ruina.

Recordamos que la probabilidad de ruina tiene una cota superior siendo,

$$\psi(u) < e^{-Ru},$$

donde R es el coeficiente de ajuste, que es la única raíz positiva de la ecuación

$$\lambda + cr - \lambda M(r) = 0,$$

siendo $M(r) = 0$ la función generatriz de momentos de la cuantía individual del siniestro.

Waters (1983), Schmidli (2001, 2006) o Hald y Schmidli (2004), plantean el problema de la obtención de la estrategia óptima calculando el valor del porcentaje de retención k que maximiza el coeficiente de ajuste R , para minimizar así la cota superior para la probabilidad de ruina. Se denomina a este valor, k^R . El resultado obtenido es,

$$k^R = \left(1 - \frac{\rho}{\rho_R}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \rho_R}}\right).$$

Podemos observar que este resultado coincide con la asíntota horizontal obtenida en el análisis presentado en el apartado anterior para $k_{op}(u)$, como podemos observar en la Figura 2. Evidentemente a medida que u tiende a infinito, el valor exacto recogido en la expresión (4) tiende a la aproximación k^R .

La probabilidad de ruina mínima según la aproximación, k^R es

$$\psi_{\min}^{k^R}(u) = \frac{1}{\sqrt{1 + \rho_R}} e^{\frac{2 + \rho_R - 2\sqrt{1 + \rho_R}}{\rho - \rho_R} u}.$$

Podemos observar que k^R es un valor independiente del nivel inicial de las reservas, y a diferencia del valor obtenido en el apartado anterior, $k_{op}(u)$, es una aproximación de la estrategia óptima.

Para los valores numéricos $\rho = 0.15$ y $\rho_R = 0.25$, el valor del porcentaje de retención que maximiza el coeficiente de ajuste es $k^R = 0.7577$.

En la Tabla 1 se presentan los valores de $k_{op}(u)$ y sus respectivas probabilidades de ruina mínima para distintos valores de u . Los resultados obtenidos se comparan con las probabilidades de ruina mínima obtenidas con el valor $k^R = 0.7577$ que maximiza el coeficiente de ajuste.

u	$k_{op}(u)$	$\psi_{\min}^{k_{op}}(u)$	$\psi_{\min}^{k^R}(u)$ con $k^R = 0.7577$
0	1	0.8695	0.8944
2	0.9373	0.6693	0.6769
4	0.8375	0.5094	0.5122
6	0.8090	0.3862	0.3877
8	0.7955	0.2926	0.2934
10	0.7876	0.2215	0.2220
12	0.7825	0.1677	0.1680
14	0.7788	0.1269	0.1271
16	0.7761	0.0961	0.0962
18	0.7740	0.0727	0.0728
20	0.7724	0.0550	0.0551

Tabla 1: $\psi_{\min}^{k_{op}}(u)$ y $\psi_{\min}^{k^R}(u)$ para diferentes valores de las reservas iniciales.

Podemos observar que las probabilidades de ruina son menores para $k_{op}(u)$, que con $k^R = 0.7577$. Para niveles elevados de las reservas iniciales, los valores de $k_{op}(u)$ tienden al valor de $k^R = 0.7577$, como ya hemos comentado previamente.

5. Conclusiones

En este trabajo se ha planteado la obtención de una política de reaseguro óptima desde el punto de vista de la probabilidad de ruina. La idea es ofrecer al gestor de la cartera de seguros una herramienta que le ayuda a decidir que porcentaje del riesgo debe ceder si opta por un reaseguro proporcional. En la realización de este análisis hemos utilizado el programa *Mathematica 6* que nos ha permitido realizar un análisis funcional, además de utilizarlo como herramienta calculística y como una forma de presentar gráficamente los resultados obtenidos.

BIBLIOGRAFÍA

- Beard, R.E., T. Pentikainen y Pesonen, E. (1990). *Risk Theory*. Chapman and Hall, London.
- Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones, D.A., Nesbitt, C.J. (1997). *Actuarial Mathematics*. The Society of Actuaries, Illinois.
- Bühlmann, H. (1970). *Mathematical Methods in Risk Theory*. Springer-Verlag, New York.
- Gerber, H. (1979). *An Introduction to Mathematical Risk Theory*. S.S. Huebner Foundation, University of Pennsylvania, Philadelphia.
- Hald, M. y Schmidli, H. (2004). On the maximisation of the adjustment coefficient under proportional reinsurance. *Astin Bulletin*, 34, 75-83.
- Mármol, M., Claramunt, M.M. y Castañer, A. (2009). Efectos del reaseguro proporcional en el reparto de dividendos. Un análisis a largo plazo. *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*, 15 3ª época, 161-178.
- Schmidli, H. (2001). Optimal proportional reinsurance policies in a dynamic setting. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1, 55-68.
- Schmidli, H. (2006). Optimisation in non-life insurance. *Stochastic Models* 22, 689-722.
- Waters, H. (1983). Some mathematical aspects of reinsurance, *Insurance: Mathematics and Economics*, 2, 17-26.