La utilización de métodos de investigación empresarial para solucionar problemas de Seguros

Por el Prof. Dr. Karlheinz WOLFF

Jefe del Departamento de Estadística y Matemáticas Actuariales
del «Hauptverband der österreichischen Sozialversicherungsträger»

Señoras y señores:

Como muchas cosas en esta vida, también los métodos de investigación científica están sometidos a las influencias de la moda. De todas formas, en estos cambios de la moda no influye tanto el gusto como en la industria del vestido. Por el contrario, los nuevos métodos de investigación resultan muchas veces extraordinariamente útiles en múltiples campos afines de la ciencia. Por investigación empresarial entendemos la agrupación de estos métodos de investigación. Hasta la fecha no se ha encontrado una definición aceptable de lo que se entiende por investigación empresarial. Sin embargo, podemos definir sus principales características diciendo, que la investigación empresarial trata de hallar decisiones óptimas con la ayuda de modelos, generalmente de modelos matemáticos. El «leitmotiv» en todos los trabajos de investigación empresarial es siempre la pregunta sobre la decisión óptima. Algunos métodos han resultado ser de especial utilidad para resolver esta clase de cuestiones, como por ejemplo: la Teoría de los Juegos, los métodos de Programación Lineal, el Método de Montecarlo y otros.

Parece ser que el campo de aplicación de los métodos de investigación empresarial es ilimitado. Lo mismo se pueden resolver problemas económicos que problemas estratégicos. Un ejemplo típico de aplicación en el sector comercial, es la determinación de las existencias óptimas en almacén. Queremos conocer, por ejemplo, en unos almacenes, qué clase de mercancías y qué cantidad debe existir en almacén y cuándo ha de hacerse el pedido para reponer una mercancía determinada. Si el pedido se hace demasiado pronto, se despilfarrará espacio de almacén y la mercancía estará demasiado tiempo almacenada sin producir. Si se encarga demasiado tarde, puede suceder que en un momento dado no se puedan cubrir las necesidades en dicha clase de mercancías.

Otro problema completamente distinto que puede ser solucionado por la investigación empresarial, se plantea al establecer nuevas sucursales de una Empresa; es decir, también cuando se trata de establecer Agencias de una Compañía de Seguros. Podremos contestar a la pregunta sobre el aplazamiento y el volumen óptimos de la Agencia en cuestión.

En el campo del Seguro, existen múltiples problemas que pueden ser resueltos con ayuda de la investigación empresarial y me permitiré exponerles una breve selección de los mismos, sin pretender que ésta sea exhaustiva. El primer problema que expondré afecta a la estimación de las reservas. Trataré de los sistemas conocidos de valoración de reservas por el método de la Programación Lineal.

Supongamos que ${}_tV_{x,\overline{n}|}$ representa la reserva técnica para un asegurado de edad inicial x, una duración n del seguro, un tiempo transcurrido t desde la contratación de la póliza y para un capital asegurado de 1. Si y(x,n,t) es el capital asegurado para este seguro tendremos que

$$V = \sum_{(B)} {}_tV_{x,n}\ y(x,n,t)$$

representa la reserva total para la cartera de seguros B. Supongamos, además, que todas las pólizas de seguro están numeradas correlativamente y que v_j es la reserva de la $j^{ésima}$ póliza é $y_{\cdot j}$ el capital asegurado de dicha póliza, en cuyo caso parece ser que

$$V = \sum_{(j)} v_j\ y_j$$

Estamos ahora en condiciones de calcular exactamente la reserva total, averiguando para cada póliza la reserva individual v_j, multiplicándola por el capital asegurado y_j y sumando todos los productos.

Si se trata de una cartera grande de pólizas, este trabajo es considerable. Supongamos, por ello, que conocemos algunos valores auxiliares de cada póliza que no han de ser calculados de nuevo cada año, como sucede con la reserva, sino una sola vez al principio del seguro. Uno de estos valores auxiliares puede ser, por ejemplo $P_{x,\overline{n|}}$, es decir, la prima para el capital asegurado 1. Estos valores auxiliares serán constantes para toda la duración del seguro.

La suma

$$H = \sum_{(B)} P_{x,n} \ y(x,n,t)$$

se establece anualmente para todas aquellas pólizas que en el momento del cálculo de las reservas estén en vigor.

Supongamos también, que para cada póliza existen m valores auxiliares $h_{ij},...,h_{mj}$. Como valores auxiliares podemos considerar entre otros, también las reservas individuales para períodos de 5, 10, 15 años, etc. Más adelante, indicaremos estos valores auxiliares.

De momento, nos limitaremos a los valores auxiliares $h_{ij},...,h_{mj}$ sumándolos para toda la cartera en vigor y obtendremos:

$$H_i = \sum_{(j)} h_{ij} \ y_j, \qquad i = 1,...,m$$

Queremos recalcar que estos valores auxiliares se calculan una vez al comienzo del seguro y luego continúan fijos, de forma que, en el momento del cálculo de la reserva, solamente habrá que sumar todos los valores auxiliares de las pólizas en vigor para obtener las correspondientes sumas de H_i. El valor de H_i es, por tanto, fácil de obtener.

Nuestra intención es la de poder estimar el importe de la reserva total V. Conociendo el valor de H_i fijaremos para V un límite máximo $\overline{V}$ y otro límite mínimo $\underline{V}$. El problema lo formularemos de la siguiente manera:

Teniendo en cuenta las condiciones secundarias

$$H_i = \sum_{(j)} h_{ij} \ y_j$$

queremos hallar un límite máximo y un límite mínimo para la fórmula lineal

$$V = \sum_{(j)} v_j \ y_j$$

Podemos suponer que $y_j > O$, $h_{ij} > O$, $v_j > O$. Se trata de un pro blema que puede ser resuelto por el método de la Programación Lineal. En la teoría de la Programación Lineal el presente problema se formula como sigue:

Teniendo en cuenta las condiciones secundarias

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= s_1 , \\ \cdot \qquad \qquad \cdot \quad & \quad \cdot \\ \cdot \qquad \qquad \cdot \quad & \quad \cdot \\ \cdot \qquad \qquad \cdot \quad & \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= s_m, \\ x_j > O, \quad j = 1, \dots, n & \end{aligned}$$

Queremos determinar los límites máximo y mínimo de la fórmula lineal.

$$L = \sum_{j=1}^{n} p_j \; x_j$$

La solución se obtiene con ayuda del método Simplex, de G. B. DANTZING, con un número finito de iteraciones.

Para el caso de $m = 1$, es decir, cuando solamente se conozca un valor auxiliar, tendremos que

$$\overline{V} = H \, . \max \frac{v_j}{h_j}; \qquad \qquad \underline{V} = H \cdot \min \frac{v_j}{h_j}$$

Para el caso $m > 1$ tendremos expresiones algo más complicadas. La exactitud que pueda tener el valor auxiliar para la estimación de la reserva es tanto mayor cuanto menor sea $\overline{V} - \underline{V}$, ya que la reserva exacta tiene que encajar entre estos dos límites. Para $m = 1$ el valor auxiliar para la estimación de la reserva será tanto mejor cuanto menor sea la diferencia

$$\operatorname{Max} \frac{v_j}{h_j} \quad - \quad \min \frac{v_j}{h_j}$$

Suponiendo para $m = 1$ que los vectores

$$\left(\frac{v_j}{h_{1j}} , \; \frac{v_j}{h_{2j}} , \quad \dots \; \frac{v_j}{h_{mj}} \right.$$

son puntos P_j en un espacio m-dimensional, podremos demostrar que la estimación de V será tanto más exacta, y $\overline{V} - \underline{V}$ tanto más pequeña cuanto más se acerquen los puntos P_j al hiperplano.

Después de estas consideraciones teóricas, pondremos un ejemplo: Según LIDSTONE, la reserva total para un grupo de seguros mixtos de igual duración futura $m = n - t$, podrá representarse por:

$$V_{(m)} = \sum_{(x,z)} \left(1 - \frac{j_{\bar{z};\, \overline{m}|}}{j_{x,\, z+\overline{m-x}|}} \right) y \quad (x, z+m-x, z-x)$$

En esta fórmula z es la edad alcanzada $x+t$, y $\bar{z}$ es una edad media. $\bar{z}$ se puede determinar por la fórmula

$$C^{\bar{z}} \sum_{(x,t)} y(x,z+m-x, z-x) = \sum_{(x,z)} C^z\, y(x,z+m-x, z-x)$$

en la que c representa la constante de la fórmula de MAKEHAM $l_x = k\, s^x\, g^{c^x}$. En el método de LIDSTONE se utilizan, como puede apreciarse fácilmente, tres valores auxiliares, es decir:

$$h_1 = 1, \quad h_2 = \frac{1}{j_{x.t+\overline{m-x}|}}, \quad h_3 = C^x$$

El valor 1 ha de considerarse también como valor auxiliar. Nos preguntamos ahora qué exactitud se puede obtener al estimar las reservas con estos valores auxiliares, es decir, cuál será el límite máximo y mínimo para la reserva total. Para ello estableceremos las siguientes sumas de los valores auxiliares

$$H_1\,(m) = \sum_{(x.z)} h_1\,(x.z)\; y\; (x, z+m-x, z-x)$$
$$H_2\,(m) = \sum_{(x,z)} h_2\,(x.z)\; y\; (x, z+m-x, z-x)$$
$$H_3\,(m) = \sum_{(x,z)} h_3\,(x.z)\; y\; (x, z+m-x, z-x)$$

y preguntamos cuál será el valor extremo de $\overline{V}$ y $\underline{V}$ bajo estas condiciones secundarias. No es difícil encontrar una solución a este problema con ayuda del método de la Programación Lineal.

De todas formas, quiero advertir, que el valor aproximado de LIDSTONE no tiene que encajar obligatoriamente entre los límites $\overline{V}$ y $\underline{V}$. Puede darse también la circunstancia de que este valor se halle fuera de los límites indicados y que, por tanto, esté en contradicción con las condiciones secundarias indicadas. Esto, desde luego, ocurrirá solamente en algunos casos extremos.

La bondad de una estimación de las reservas puede ser representada por el error standar o desviación típica.

$$\rho = \frac{\overline{V} - \underline{V}}{\overline{V} + \underline{V}}$$

Basándome en los resultados obtenidos por U. BAUMGARTNER, señalaré los valores auxiliares que se utilizan en determinados métodos para la estimación de las reservas y a cuánto asciende el error standard en el caso concreto de una cartera de seguros de 239 pólizas y t = 13 años transcurridos. En primer lugar indicaré para tres métodos los valores auxiliares:

Método	Valor auxiliar
KARUP	$1,\ P_{x,\overline{n}\rceil}$
Método t de JECKLIN	$1,\ P_{x,\overline{n}\rceil},\ c^x P_{x,\overline{n}\rceil}$
POTTKER	${}_5V_{x,\overline{n}\rceil},\ {}_{15}V_{x,\overline{n}\rceil},\ {}_{25}V_{x,\overline{n}\rceil},\ {}_{35}V_{x,\overline{n}\rceil}$

En estos métodos se utilizan siempre varios valores auxiliares conjuntamente. Mediremos, en primer lugar, la bondad de cada uno de los valores auxiliares, calculando el error standard para cada uno de los valores axiliares, en el supuesto de que solamente disponemos de ese valor auxiliar.

Para la cartera analizada por BAUMGARTNER se hallaron los siguientes errores standard:

Valor auxiliar	Error standard
1	57,53 %
$P_{x,\overline{n}\rceil}$	10,39 %
c^x	92,15 %
${}_5V_{x,\overline{n}\rceil}$	2,93 %
${}_{15}V_{x,\overline{n}\rceil}$	1,25 %
${}_{25}V_{x,\overline{n}\rceil}$	14,83 %
${}_{35}V_{x,\overline{n}\rceil}$	57,06 %

Es natural, que el valor obtenido para la reserva después de 15 años sea el más exacto, ya que hemos supuesto que han transcurrido 13 años de duración y, por ello, el año 15 es el que más se acerca a esta fecha límite.

En el caso de que dispongamos de varias sumas de valores auxiliares, es decir, en el caso $m > 1$, disminuirá el error standard. En este caso obtendremos las siguientes correcciones:

Valores auxiliares utilizados	Error standard
$1,\ P_{n,\overline{x}|}$	7,02 %
$1,\ {}_5V_{x,\overline{n}|}$	2,54 %
$1,\ {}_{15}V_{x,\overline{n}|}$	0,89 %
$P_{x,\overline{n}|},\ {}_{15}V_{x,\overline{n}|}$	0,56 %
$1,\ P_{x,\overline{n}|},\ {}_{15}V_{x,\overline{n}|}$	0,31 %
$1,\ P_{x,\overline{n}|},\ c^x P_{x,\overline{n}|}$	1,79 %
${}_5V_{x,\overline{n}|},\ {}_{15}V_{x,\overline{n}|},\ {}_{25}V_{x,\overline{n}|},\ {}_{35}V_{x,\overline{n}|}$	0,06 %

Como puede apreciarse, los valores auxiliares utilizados en el método de Jecklin solamente producen en conjunto un error standard de 1,79 %, mientras que los valores auxiliares empleados en el método de Potker limitan la zona de la reserva al 0,06 %.

Ahora trataremos de la utilización de la Teoría de los Juegos. Para ello, un ejemplo, y para cambiar, lo tomaremos de la vida cotidiana. Queremos dar un paseo a pie y nos preguntamos si hemos de llevar paraguas o no. En este caso se nos presenta el siguiente dilema: Si llevamos paraguas y no llueve, habremos cargado innecesariamente con el paraguas, y ello es molesto. En cambio, si no llevamos el paraguas y llueve, entonces nos mojaremos y ésto es más molesto aún. Por otro lado, no parece muy probable que llueva, pero es posible. ¿Qué hemos de hacer? Supongamos que valoramos con —20 la molestia de mojarnos sin llevar paraguas y con —5 la molestia de cargar innecesariamente con el paraguas. La ventaja de disponer del paraguas, si llueve, la valoraremos igual que la ventaja de no haber llevado paraguas, si no llueve; es decir, con +5· La probabilidad de que llueva la estimaremos en base de nuestra experiencia meteorológica, con 0,3. Por tanto podemos considerar que nuestro propósito de pasear es un «juego contra la naturaleza». En este juego introduciremos nuestras valoraciones de —5, —20 y +5. Los posibles resultados del juego encajan, por tanto, en la siguiente matriz:

	Naturaleza		
	Partida	Llueve	No llueve
Nosotros	Paraguas	+5	—5
	Sin paraguas	—20	+5

Las partidas o movimientos que en este juego realiza la naturaleza se han elegido al azar, valorando «llueve» con una probabilidad de 0,3, y «no llueve» con una probabilidad de 0,7. El resultado del juego será, por tanto, una variable aleatoria. Queremos determinar ahora su valor probable. Si elegimos «paraguas», el valor probable de los resultados del juego será 5 . 0,3 + (—5) . 0,7 = —2. Si elegimos «no paraguas», entonces el valor del resultado del juego será (—20) . 0,3 + 5 . 0,7 = —2,5. El resultado probable del juego será, por tanto, menor para el caso de «no paraguas» y haríamos bien con llevar paraguas.

En este ejemplo no fue difícil llegar a un resultado, porque estábamos informados de lo que la naturaleza iba a hacer. Sabíamos que la naturaleza nos traería lluvia con una probabilidad de 0,3. Más complicadas se ponen las cosas si no tenemos ninguna información sobre lo que va a hacer la naturaleza.

En general, en estos juegos bipersonales se pueden encajar los resultados en la siguiente matriz:

		Jugador 2			
	Partida	1	2	. . .	n
	1	a_{11}	a_{12}	. . .	a_{1n}
	2	a_{21}	a_{22}	. . .	a_{2n}
Jugador 1	.				.
	.				.
	.				.
	m	a_{m1}	a_{m2}	. . .	a_{mn}

Los valores a_{ij} son valores de la así llamada «Función de pago». Si cada jugador elige de acuerdo con una regla determinada un movimiento concreto —el Jugador 1 una de las líneas 1 hasta m, y el jugador 2 una de las columnas 1 hasta n— podremos hablar de una «estrategia pura». Si un jugador elige su movimiento de forma aleatoria, como en nuestro anterior ejemplo lo hizo la naturaleza con la lluvia, podremos hablar de «estrategia mixta». En este último caso es distinto si se trata efectivamente de un mecanismo aleatorio o si en realidad es que no estamos en condiciones de describir el mecanismo exacto de elección y utilizamos, por tanto, el modelo de una elección aleatoria.

Para explicar la utilización de la teoría de los Juegos, presentaré ahora un ejemplo establecido por S. BENJAMÍN, tomado del trabajo cotidiano de una Compañía de Seguros: La Compañía quiere invertir lo más ventajosamente posible un determinado capital que ha de engrosar sus reservas. Supongamos que existen dos posibilidades de inversión, es decir:

a) Valores del Estado al 3,5 $^0/_0$ de interés y seis años de duración.

b) Cédulas hipotecarias con dividendo del 5 $^0/_0$.

En ambos casos se pueden adquirir las piezas por su valor nominal. Transcurrido un año puede haber cambiado la situación en el mercado de capitales y vamos a suponer que pueden darse las siguientes tres circunstancias:

1. Los valores del Estado siguen rindiendo un 3,5 $^0/_0$; las hipotecas un 5 $^0/_0$.
2. Los valores del Estado rinden un 5 $^0/_0$ y las hipotecas que vamos a adquirir un 6,5 $^0/_0$, mientras que el mercado de hipotecas en general solamente produce un 6 $^0/_0$.
3. Los valores del Estado rinden un 2,5 $^0/_0$, las hipotecas que vamos a adquirir un 4 $^0/_0$, mientras que el mercado general de hipotecas produce un 4,125 $^0/_0$.

La elección entre las dos posibilidades de inversión *a)* y *b)* la toma la Empresa Aseguradora como primer jugador. Tendrá dos posibilidades de elección. La elección de la situación del mercado, transcurrido un año la toma la naturaleza, es decir, el segundo jugador.

La «ganancia» en este juego será distinta para cada una de las seis posibilidades. Llamaremos g_{ij} a la ganancia del primer jugador, es decir, la de la Empresa Aseguradora si ésta hubiese elegido la posibilidad de inversión $i^{\text{ésima}}$, y si el segundo jugador, es decir, la naturaleza, hubiese elegido la situación de mercado j. Evidentemente, g_{11}, es decir, el beneficio que se obtiene para una situación de mercado invariable e invirtiendo en valores del Estado, será igual al rendimiento, es decir, igual al 3,5 % ya que no se ha cambiado la cotización y tampoco ha habido beneficio o pérdida por cotización. De la mima forma g_{21}, es decir, el beneficio que se obtiene al comprar hipotecas y no variar la situación del mercado, será igual al 5 %. Previendo las situaciones de mercado 2 y 3 habrá de tenerse en cuenta también los beneficios o las pérdidas por cotización. La matriz de pago nos dará, al efectuar los correspondientes cálculos, los siguientes resultados:

		Jugador 2		
	Partida	1	2	3
Jugador 1	1	3,5 %	— 3 %	8 %
	2	5 %	13,3 %	2 %

Si solamente pueden darse las situaciones de mercado 1 y 2 no se podría dar la partida 3 del segundo jugador y seguramente el jugador 1 tendría que elegir la partida 2 que, en ambos casos, es decir, para las dos partidas del jugador 2, asegura el mayor beneficio. En general, y según los fundamentos de la Teoría de los Juegos, es posible tomar inmediatamente esta decisión si

$$\max_{(i)} \min_{(j)} g_{ij} = \min_{(j)} \max_{(i)} g_{ij}$$

Este es el llamado Teorema del Mínimo y Máximo. El jugador 1 quiere obtener el mayor beneficio posible, es decir, el mayor valor posible para la función de pago; esto es $\max\limits_{(i)} g_{ij}$. En cambio, si su contrincante anhela que su valor de pago sea mínimo, elegirá $\min\limits_{(j)} g_{ij}$. Prescindiremos en este ejemplo de considerar si efectivamente la naturaleza puede actuar tan «mal intencionadamente». Si un jugador conoce de antemano la elección que va a tomar el otro jugador, le será fácil tomar su «mejor elección». Difícil resultará, en cambio, la situación si ambos jugadores pueden tomar su elección con completa independencia entre ellos. El jugador 1 sabe que el jugador 2 puede elegir para cada partida i que él juegue aquella partida j que le dé el menor importe de pago, es decir, $\min\limits_{(j)} g_{ij}$. Elegirá, por tanto, aquella partida i que le asegure en cualquier caso el mayor valor de pago, es decir, $\max\limits_{(i)} \min\limits_{(j)} g_{ij}$.

Por la misma razón el jugador 2, que tiene interés en que resulte el menor valor de pago, elegirá aquella partida j que conduzca a $\min\limits_{(j)} \max\limits_{(i)} g_{ij}$. En el caso de coincidir ambos valores, entonces los valores correspondientes de i y j serán siempre las partidas óptimas para un fin determinado.

La situación en el presente ejemplo no es, sin embargo, tan sencilla. Evidentemente $\min\limits_{(j)} \max\limits_{(i)} g_{ij} = 5\ ^o/_o$, $\max\limits_{(i)} \min\limits_{(j)} g_{ij} = 2\ ^o/_o$. Sin embargo, con ayuda del Teorema del Mínimo y Máximo parece que no se puede establecer ninguna estrategia óptima. Podemos demostrar que la estrategia óptima para el presente caso ha de ser una estrategia mixta. El jugador 1 elige, por tanto, la partida 1 con la probabilidad p_1 y la partida 2 con la probabilidad p_2. De igual manera, el jugador 2, al que hemos de conceder también la elección de una estrategia mixta, jugará las partidas 1, 2 y 3 con las probabilidades q_1, q_2 y q_3. El valor de expectación del beneficio será, por tanto,

$$E(G) = 3{,}5\ ^o/_o\ p_1 q_1 - 3\ ^o/_o\ p_1 q_2 + 8^o/_o p_1 q_3 + 5^o/_o p_2 q_1 + \\ + 13{,}3\ p_2 q_2 + 2\ ^o/_o\ p_2 q_3$$

El jugador 1 pretende que esta expresión resulte el máximo. Observamos que se trata de una problemática que puede resolverse con ayuda de la Programación Lineal. Las condiciones secundarias serán $p_1 + p_2 = 1$, $q_1 + q_2 + q_3 = 1$. La solución para el primer jugador será $p_1 = 0{,}4$, $p_2 = 0{,}6$. Como puede demostrarse fácilmente, esta elección asegura al primer jugador un beneficio de por lo menos $4{,}4\ ^o/_o$, es decir, que $E(G) \geqq 4{,}4\ ^o/_o$. Para $q_1 = 0{,}8$. $q_2 = = 0$, $q_3 = 0{,}2$ tenemos también $E(G) = 4{,}4\ ^o/_o$.

¿En qué forma ha de realizar la Compañía de Seguros sus inversiones? La estrategia mixta nos dirá que la Compañía hará bien comprando valores del Estado con una probabilidad de 0,4 e hipotecas con una probabilidad de 0,6. Prácticamente esto quiere decir que la Compañía tendrá que invertir el 40 % de su capital en valores del Estado y el 60 % en hipotecas. En tal caso tendrá asegurado un beneficio del 4,4 %, en cada una de las tres posibles situaciones de mercado. Esta inversión de capitales será óptima en el supuesto de que no exista ninguna otra posibilidad de inversión, que para cada situación de mercado asegure un 4,4 %.

Un importante campo de aplicación de la Teoría de los Juegos en el negocio de seguros es el Reaseguro. Asegurador y Reasegurador quieren obtener el mayor beneficio posible de sus contratos de reaseguro y ésta es exactamente una situación de intereses opuestos que puede ser tratada con la Teoría de los Juegos. En primer lugar, nos hemos de preguntar qué es lo que sucede al efectuar un Reaseguro. Es evidente, que al cobrar la prima de reaseguro el reasegurador asume parte del riesgo del Asegurador. Asegurador y Reasegurador solamente celebrarán un contrato de esta clase si ambos esperan encontrar en él determinadas ventajas, es decir, si con el contrato de Reaseguro mejoran su «situación de riesgo». Esta «situación de riesgo» queda descrita a su vez por el capital de que dispone la Compañía y por el riesgo que la amenaza. El riesgo puede ser descrito por la distribución de los siniestros $F(x)$, siendo $F(x)$ la probabilidad de que la suma total de los siniestros que se produzcan en la cartera de seguros sea inferior a x. La situación del riesgo podrá ser descrita, por tanto, por la expresión $\{K, F(x)\}$, siendo K el capital, y $F(x)$ la distribución de los siniestros.

Con la contratación de los seguros y la contratación de reaseguros se modifica la situación del riesgo. Una Compañía de Seguros que trabaja «razonablemente», es decir, «racionalmente», solamente contratará seguros o reaseguros, si con ello mejora su situación de riesgo. Pero, ¿cuándo puede decirse que una situación de riesgo es mejor que otra? Para poder saberlo necesitamos disponer de una medida para valorar las distintas situaciones de riesgo. Evidentemente es fácil decir cuándo un capital es mayor que otro, pero si se trata de valorar la situación de riesgo, el problema no es tan sencillo. Por lo general, podemos suponer que para $K_1 > K_2$ la situación de riesgo $\{K_1, F(x)\}$ es mejor que la situación de riesgo

$\{ K_2 , F(x) \}$, ya que solamente se diferencia de la segunda situación de riesgo por un capital superior, y esto, indudablemente, supone una mejora. Pero, ¿cómo podemos apreciar la bondad de una distribución de siniestros $F(x)$?

El célebre libro de NEUMANN y MORGENSTERN sobre la teoría de los juegos trata precisamente de éstos y parecidos problemas de valoración. K. BORCH ha iniciado investigaciones sobre alguno de los temas aquí tratados. Un sistema sencillo y plausible de valoración consiste en valorar tanto más alta la situación de riesgo cuanto mayor sea la diferencia entre el capital y los siniestros que se preven, y tanto menor cuanto mayor sea la dispersión de la distribución de los siniestros. Si llamamos $R = K - E(x)$ a la reserva libre, es decir, al capital menos el valor previsto de los pagos por siniestros, y a θ^2 la dispersión de la distribución de los siniestros, entonces $a \, . \, R - b \, . \, \theta^2$ puede ser una medida que nos permita valorar la bondad de una situación de riesgo.

La valoración se podrá efectuar de la siguiente forma:

En primer lugar se valora el rendimiento que se obtiene por la cantidad x, por ejemplo, utilizando la función de rendimiento $n(x)$. Al parecer $n(x)$ tendrá que crecer proporcionalmente, ya que queremos que a mayor importe corresponda también un rendimiento mayor. Después tendremos que tener en cuenta el momento «estocástico» de la situación de riesgo. Esto se hace suponiendo que para aquella situación de riesgo que con una probabilidad p nos va a producir el importe B_1 y con una probabilidad $1-p$ nos producirá el importe B_2, la corresponde el rendimiento $p \, . \, n(B_1) + (1-p) \, . \, n(B_2)$.

Con ello hemos proporcionado todos los datos necesarios. Una situación de riesgo para la cual el capital z que queda después de haber liquidado todos los seguros tenga la función de distribución $G(z)$, es decir, para la que $W \{ z < Z \} = G(Z)$ tendrá, por tanto, un rendimiento

$$N \{ G(z) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} n(z) \, d \, G(z)$$

Al parecer, no tiene sentido suponer que $n(x) = x$, ya que en tal caso el beneficio de una situación de riesgo sería igual al valor de expectación del remanente, es decir, $N \{ G(z) \} = E(z)$. En este caso el Asegurador contrataría todos los seguros mediante una prima neta —prescindiendo de los gastos de administración— independientemente de la distribución de los siniestros, es decir, independientemente del riesgo. Esto no corresponde, evidentemente, a una actuación racional de las Compañías de Seguros. Será necesario, por el contrario, que $n(x)$ crezca proporcionalmente a medida que decrezca la curva.

Con ayuda de la función de rendimiento $n(x)$ elegida inicialmente podrán revisarse los contratos de Reaseguro, para determinar en qué medida contribuyen a mejorar la situación del riespo. Podemos apreciar que en circunstancias normales, dos Compañías de Seguros pueden mejorar su propia situación de riesgo celebrando contratos de Reaseguro recíprocos. Siempre y cuando ambas Compañías de Seguros no valoren en forma demasiado diferente su situación de riesgos, tendremos que las dos podrán mejorar considerablemente su situación de riesgos celebrando contratos de Reaseguro recíprocos. Esto, sin embargo, se consigue solamente si las dos Compañías, al determinar su cartera de Reaseguro y su prima de reaseguro, no se adentran en un terreno, en el que la situación del riesgo de uno de los Aseguradores solamente se pueda mejorar a costa del otro Asegurador. En este terreno existe una colisión directa de los intereses entre ambas Entidades. Nos encontramos ante una situación clásica de la Teoría de los Juegos y se podrán determinar «partidas» óptimas que describan la contratación del Reaseguro.

La situación del riesgo de una sola Compañía de Seguros puede mejorarse en forma óptima por la celebración de un contrato de Reaseguro de Excedente a *prima neta. Ello salta a la vista, ya que con el* Reaseguro de Excedente se cede aquella parte de la siniestralidad que influye al máximo en su difusión. Pero precisamente queremos conseguir que la difusión sea lo más pequeña posible. Para la segunda Compañía, es decir, para el Reasegurador, el problema es distinto. El Reasegurador no estará dispuesto fácilmente a aceptar un Reaseguro por Excedente, ya que para él este contrato será desfavorable a causa de la gran difusión. Podemos demostrar también que la situación de riesgo de ambas Compañías podrá mejorar al mismo tiempo, celebrando contratos de Reaseguro de cuota parte. El Reaseguro por Excedente mejora, por tanto, la situación de una sola

Compañía, empeorando, en cambio, la situación de la segunda Compañía. El Reaseguro de Cuota Parte mejora la situación de ambas Compañías. Los mismos resultados se obtienen al celebrarse contratos de Reaseguro entre más de dos Compañías. También en estos casos un Reaseguro de Cuota Parte mejora la situación del riesgo de todas las Compañías.

Dentro del marco de esta conferencia no me es posible entrar en detalles matemáticos de estas investigaciones. Sin embargo, quiero ofrecerles una visión de conjunto sobre las posibilidades que el empleo de funciones de rendimiento brindan a las Compañías de Seguros para el establecimiento de su política de actuación.

En la Teoría de los Juegos podemos distinguir entre las distintas partidas de los jugadores y entre sus estrategias. Las partidas son decisiones individuales, como por ejemplo: la elección de una determinada inversión de capitales, mientras que por estrategia entendemos una norma general para determinar qué partidas han de jugarse en circunstancias determinadas. Una Compañía de Seguros puede, por ejemplo, considerar la contratación de seguros como partidas de un juego. De la misma forma, el pago de los dividendos, el aumento de las reservas, etc., pueden ser considerados como partidas del juego.

La estrategia de la Compañía, consiste, entonces, en fijar determinadas normas por las que se han de regir sus partidas. La Compañía determina las clases de seguros que deben de contratarse y las que no. Establece, además, que en determinadas circunstancias se pueden abonar dividendos de cuantía determinada y que, en su consecuencia, ha de modificar sus reservas. Una estrategia de esta clase influye, por lo tanto, en la política de actuación de la Compañía. Esta política depende, naturalmente, de circunstancias externas, como por ejemplo: del mercado de seguros, del desarrollo de la siniestralidad y del mercado de capitales.

Para hallar la estrategia óptima en este juego de la Compañía de Seguros, partimos del modelo de un desarrollo determinado del negocio. El capital de la Compañía en un momento determinado, es una variable aleatoria, ya que, entre otras cosas, depende también de los pagos por siniestros. Este capital, representa, por lo tanto, un proceso aleatorio en función del tiempo. La Compañía puede vigilar este proceso eligiendo —según la situación del mercado— la clase de seguros a contratar y los dividendos a distribuir. Ha de tratar de disponer de la suficiente reserva de seguridad, pero por otra parte tratará también de distribuir suficientes dividendos. La política de gestión óptima será, por tanto, aquella para la cual el posible valor actual de todos los futuros pagos de dividendos, represente un máximo.

El tratamiento práctico de esta clase de modelos matemáticos es bastante difícil. Podemos suponer que simulando el desarrollo del negocio con una máquina de calcular se pueden obtener resultados bastante accoptables. Esta clase de investigaciones tiene que realizarse en colaboración con una Compañía de Seguros. Desconozco si se han realizado ya esta clase de investigaciones, pero creo que pueden ser bastante útiles y quizás encontremos a alguien que se atreva a adentrarse en este terreno virgen.

Acabo de hablar de una simulación. También el Método de Monte Carlo puede utilizarse para resolver problemas sencillos en Seguros. Consideremos como ejemplo el cálculo de la prima para el seguro de un grupo de personas con diferentes pagos en caso de fallecimiento. Por ejemplo: *Se pagará la suma* S_i *al fallecer el* $1^{\text{ésimo}}$ asegurado que al contratar la póliza hubiese alcanzado la edad x_i. La probabilidad de fallecimiento para una anualidad de seguro es q_i. Elegiremos ahora en forma totalmente aleatoria un número de seis dígitos entre 000001 y 999999. Para elegir estas cifras aleatorias existen las tablas especiales. También es posible programar los calculadores de forma que nos faciliten estas cifras aleatorias. Con esta cifra aleatoria determinaremos una cifra de seis decimales $p = 0'...$, que desde luego estará entre 0 y 1. Al haber sido la elección aleatoria, las cifras p deben estar distribuidas a intervalos iguales (0,1), si prescindimos de diferencias del orden de 10^{-6}. Por lo tanto, $W\{p < P\}$ es aproximadamente igual a P para $0 < P \leqq 1$.

Con la elección de esta cifra aleatoria podemos simular el fallecimiento del asegurado $i^{\text{ésimo}}$. Para este asegurado elegimos la cifra aleatoria p_i, diciendo que para $p_i < q_i$ se ha producido la muerte del asegurado y para $p_i \geqq$ el asegurado sobrevive.

Como se puede ver, la probabilidad que se obtiene para la muerte simulada es igual a la probabilidad de fallecimiento. Con ayuda de esta simulación es posible repetir cuantas veces se quiera el desarrollo de las pólizas y determinar casi experimentalmente las probabilidades, los valores de expectación y cualquier otro parámetro de distribución. Con ello se puede simplificar considerablemente el trabajo de complicados cálculos de primas. Especialmente, para determinar el Reaseguro de Excedentes, este método presta muy buenos servicios.

Se puede utilizar también esta clase de simulación si no queremos analizar una sola anualidad de seguro, sino toda la duración del contrato hasta el fallecimiento del último superviviente. Si señalamos con q_{in} la probabilidad de que el asegurado $i^{ésimo}$ fallezca en la $n^{ésima}$ anualidad de seguro, tendremos evidentemente que

$$\sum_{n=1}^{w-x_i} q_{in} = 1$$

El intervalo (0,1) puede ser cubierto por intervalos parciales de longitud q_{in}. Aquel intervalo parcial al que corresponda la cifra aleatoria p_i (llamémoslo el intervalo $q_{i\overline{n}}$), nos dirá el año de fallecimiento del asegurado; en nuestro caso $\overline{n}$. También de esta forma es posible simular desarrollos de pólizas y calcular experimentalmente primas y otros parámetros de distribución.

Por último, quisiera darles a conocer el resultado de algunas investigaciones que pueden utilizarse en bastantes sectores del seguro privado y social; se trata del modelo de un proceso aleatorio. Comienzo planteando la cuestión que se ha presentado en la práctica de un Asegurador de la Seguridad Social; concretamente, de una Caja de Seguros de Enfermedad. Se trata de determinar la cuantía de la reserva de seguridad.

El recuento de los días de indemnización pagados en caso de enfermedad por el Seguro Social austriaco, que se basa en un grupo de personas de más de dos millones de asegurados con derecho a esta clase de indemnización, nos ha dado los siguientes resultados:

Año	Días de indemnización por asegurado
1956	9,31
1957	10,45
1958	9,22
1959	8,82
1960	9,19
1961	9,46
1962	10,10
1963	10,20
1964	8,99
1965	8,97

Las oscilaciones que se aprecian en la frecuencia, no pueden explicarse como oscilaciones aleatorias en la frecuencia individual de días de indemnización para cada uno de los asegurados, ya que para más de dos millones de asegurados la ley de los grandes números tiene que conducir indudablemente a una igualación. Vemos, en cambio, que los propios parámetros de frecuencia están sometidos a oscilaciones aleatorias. La función de estimación que para esta serie de resultados se ha obtenido para la difusión de la frecuencia media, nos da $s = 0{,}57$, y un estudio realizado con ayuda del test de KOLMOGOROFF demuestra que la suposición de que existe una distribución normal está en consonancia con los resultados.

Para describir el desarrollo de los días de enfermedad hemos de elegir, por tanto, un modelo que tenga en cuenta estas oscilaciones anuales de la frecuencia, y este modelo parece ser que no se puede basar solamente en las frecuencias individuales de distribución para cada asegurado.

Por lo tanto, nos basaremos en nuestras investigaciones en la totalidad de los asegurados y designaremos con $S(t)$ el saldo entre ingresos y gastos del seguro de indemnización diaria que resulte desde el momento 0, es decir, desde el comienzo del seguro hasta el momento t. Como parece que los desembolsos por indemnización diaria dependen evidentemente del número de días de enfermedad por asegurado y como esta cifra está sometida a oscilaciones aleatorias, $S(t)$ representa un proceso aleatorio.

Para no complicar el ejemplo prescindiremos de considerar que los gastos se ven también afectados por oscilaciones estacionales y supondremos que $S(t)$ sigue un desarrollo continuado. Por tanto, $S(t)$ representa un proceso aleatorio continuado. Suponemos también que dicho proceso puede ser descrito por la siguiente ecuación:

$$d\,S(t) = m(t)\,dt + \delta^2(t)\,dy(t)$$

En esta fórmula $y(t)$ representa un proceso del movimiento de Brown para el que rige:

$$E\{y(t_2) - y(t_1)\} = 0\,,$$
$$E\{[y(t_2) - y(t_1)]^2\} = |t_2 - t_1|$$

El momento aleatorio de este proceso se introduce exclusivamente por y(t). El valor probable del saldo se calculará según las normas de las integrales estocásticas para una difusión constante $\delta^2(t) = \delta^2$ por la fórmula

$$E\left\{ S(t) \right\} = \int_0^t m(\tau)\, d\tau$$

Parece ser que podemos considerar como constante una difusión $\delta^2(t)$ siempre y cuando el período no sea demasiado largo.

Podemos preguntar ahora por la probabilidad de que el capital inicial K más el saldo S(t) sea menor que 0. En este caso es evidente que los medios económicos del Asegurador no bastan para cubrir los pagos. Supongamos que K sea el capital inicial en el momento s, y w(K,s,T) la probabilidad de que $K + S(t) - S(s)$ sea alguna vez menor que 0 en el intervalo $s < t \leqq T$. Podemos demostrar ahora que esta función debe satisfacer las condiciones marginales $w(\infty,s,T) = 0$, $w(K,s,s) = 0$ y $\lim\limits_{K \to o} w(K,s,T) = 1$ y que se cumpla la ecuación.

$$\frac{y w(K,s,T)}{y s} + m(t) \frac{y w(K,s,T)}{y K} + \frac{\delta^2(t)}{2} \frac{y^2 w(K,s,T)}{y K^2} = 0$$

La solución de esta ecuación es, por lo general, muy difícil. En el caso de que m y δ^2 sean constantes, se obtiene

$$W(K,s,T) = e^{-\frac{2mk}{\delta^2}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta^2 (T-s)}}\, e^{-\frac{mK}{\delta^2} - \frac{m^2}{2\delta^2}(T-s)}$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{m\xi}{\delta^2}} \left[e^{-\frac{(\xi-K)^2}{2\delta^2(T-s)}} - e^{-\frac{(\xi+K)^2}{2\delta^2(T-s)}} \right] . d\xi$$

Esto nos da la llamada probabilidad de ruina para el período (s,T). Para el caso especial $m(t) = 0$ tenemos la fórmula

$$W(K,s,T) = \frac{2}{\sqrt{2\pi\delta^2(T-s)}} \int_k^\infty e^{-\frac{\xi^2}{2\delta^2(T-s)}}\, d\xi$$

$m(t) = 0$ quiere decir, que el valor de expectación del saldo es cero; es decir, que podemos contar con un desarrollo equilibrado. Para las Entidades del seguro austriaco que, por lo general, se financian por el sistema de derramas, se da casi siempre esta circunstancia. Tomando como base las frecuencias observadas en los días de indemnización diarios antes indicados, podemos considerar en el presente sistema de seguro de enfermedad que $\delta^2 = 6\ ^{0}/_{0}$. Si queremos tolerar una probabilidad de ruina del $5\ ^{0}/_{0}$ para un período de diez años, entonces será $w(K,0,10) = 0{,}05$. Como es fácil de comprobar, esto se dará para $\delta^2 = 0{,}06$ siempre y cuando K equivalga al $31\ ^{0}/_{0}$ del desembolso anual.

Hasta aquí hemos considerado solamente los pagos por indemnización diaria. Si tenemos también en cuenta las indemnizaciones en especie, entonces tenemos que contar para el Seguro de Enfermedad austriaco con una reserva de seguridad necesaria aproximadamente del $12{,}5\ ^{0}/_{0}$ de los desembolsos de un año o —dicho de otra forma— con 1,5 veces el desembolso medio mensual. Si queremos que la «seguridad» se establezca para 40 años, será necesario disponer de una reserva de seguridad doble.

He descrito este modelo en forma muy simplificada, pero tampoco en su descripción completa y detallada no rebasa las condiciones que hemos de poner a su aplicación práctica, basada en los datos estadísticos disponibles.

Estimadas señoras y señores: he tratado de facilitarles una breve visión de conjunto sobre los modernos trabajos en el terreno de la investigación empresarial y su aplicación al negocio de seguros. La investigación empresarial utiliza modelos matemáticos y, por ello, he basado mi trabajo en esta clase de modelos. No siempre me ha sido posible describir totalmente los modelos empleados. He tratado de seguir un camino medio entre una descripción superficial y un análisis matemático a fondo. No sé si me habrá sido posible conseguirlo, pero seguramente habré abusado de su atención y de su paciencia. Por su atención y por esta paciencia les doy mis más expresivas gracias.