Una aplicación de la programación Multiobjetivo al reaseguro

Por:

JOSE ANTONIO GIL FANA
ALEJANDRO BALBAS DE LA CORTE
Profesores Titulares del Departamento de Economía Financiera.
Universidad Complutense de Madrid

INTRODUCCION

De todos es conocido que una gran parte de las decisiones a tomar en el ámbito empresarial se dirigen a la consecución de varios objetivos que, en algunas ocasiones, son contradictorios entre sí. La programación multiobjetivo permite instrumentar matemáticamente la resolución de problemas con tales características.

En el presente artículo intentaremos emplear dicha técnica para resolver un problema de reaseguro óptimo, típico de empresas de seguro, armonizando los objetivos de rentabilidad y riesgo respetando las restricciones legales de solvencia.

PRELIMINARES MATEMATICOS

En este epígrafe haremos una rápida exposición de los principales resultados matemáticos que utilizaremos (su justificación puede encontrarse en Balbas y Gil Fana (1987)).

Consideremos el siguiente programa matemático (al que denominaremos primal):

$$\left.\begin{array}{c} \text{Mín } f(x) \\ x \in \Omega \\ g(x) \leq 0 \end{array}\right\} P$$

en el que f es una función real convexa definida en $\Omega < R^n$ convexo, y $g:\Omega \to R^m$ es una función cuyas componentes $g_1,...g_m$ son también convexas.

Para cada $\lambda = (\lambda_1,...\lambda_m) \in R^m$ con $\lambda_i \geq 0 \quad i=1,...,m$ definamos

$$\varphi(\lambda) = \operatorname*{Inf}_{x \in \Omega} \left\{ f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, g_i(x) \right\}$$

y sea Γ el conjunto de los $\lambda \in R^m$ como componentes no negativas tales que $\varphi(\lambda) > -\infty$.

Definiremos el programa dual en la forma

$$\left.\begin{array}{c} \text{Max } \varphi(\lambda) \\ \lambda \in \Gamma \end{array}\right\} D$$

Se demuestra que Γ es convexo si no es vacío y φ es cóncava. Supongamos además que el programa primal P verifica la cualificación de Slater, es decir, existe un $x \in \Omega$ con $g_i(x) < 0 \quad i=1,...,m$ y que

$$\text{Inf}\,\{f(x);\, x \in \Omega,\, g(x) \leq 0\} > -\infty$$

entonces verifica el siguiente resultado:

Teorema fundamental de la dualidad

a) $\text{Inf}\,\{f(x);\, x \in \Omega,\, g(x) \leq 0\} = \text{Máx}\,\{\varphi(\lambda);\, \lambda \in \Gamma\}$

por lo que el máximo dual se alcanza.

b) dados $x \in \Omega$ con $g(x) \leq 0$ y $\lambda \in \Gamma$ se tiene:

x es solución de P y λ es solución de D si, y solo si,

$$\bullet\; f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, g_i(x) \leq f(y) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, g_i(y) \qquad \forall\, y \in \Omega$$

$$\bullet\ \lambda_i\, g_i(x) = 0 \quad i=1,\ldots,m$$

Repasemos, ahora, algunas cuestiones sobre programación multiobjetivo que pueden encontrarse por ejemplo en Goicoechea (1987). Sean G un subconjunto convexo de R^n y f: $G \rightarrow R^r$ una función cuyas componentes $g_1,\ldots, g_r$ son convexas. Consideremos el programa multiobjetivo

$$\left.\begin{array}{c} \text{Mín } f(x) \\ x \in G \end{array}\right\} M$$

en el que los mínimos buscados lo son en sentido de Pareto, es decir, x_o es solución de M si no existe $x \in G$ tal que

$$f_1(x) \leq f_1(x_o),\ldots, f_r(x) \leq f_r(x_o)$$

y alguna de las desigualdades es estricta.

Para resolver el programa M emplearemos la técnica llamada de escalarización, por la que convertimos el problema en la resolución de programas escalares:

Para cada $\alpha = (\alpha_1,\ldots, \alpha_r)$ de componentes no negativas tendremos el programa

$$\left.\begin{array}{l} \text{Mín } \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \alpha_i f_i(x) \\ x \in G \end{array}\right\} M\alpha$$

Refirámonos a las propiedades que ligan los programas M y M_α

Proposición.- Si x_o es solución de M, existe $\alpha = (\alpha_1,\ldots, \alpha_r)$ no nulo con $\alpha_i \geq 0$ i=1,...,r tal que x_o es solución de M_α.

Proposición.- Si $\alpha_1 > 0,\ldots,\alpha_r > 0$ y x_o es solución de M_α, entonces x_o es solución de M.

Proposición.- Si $\alpha_1 \geq 0,\ldots,\alpha_r \geq 0$ y x_o es la única solución de M_α, entonces x_o es solución de M.

En resumen, resolviendo los M_α calculamos todos los óptimos de Pareto.

No obstante, alguno de los puntos obtenidos puede no ser óptimo si α no es estrictamente positivo y la solución obtenida no es única. Este hecho habrá de ser analizado detalladamente.

Es claro que la escalarización se puede reducir a aquellos α no negativos que verifican $\alpha_1+,...,+\alpha_r = 1$.

ENUNCIADO DEL PROBLEMA DE REASEGURO OPTIMO

Consideremos una empresa de seguros que opera en los ramos no vida con las siguientes características:

1.- Su cartera total se encuentra dividida en k subcarteras homogéneas.

Es conocida la distribución de la siniestralidad total de cada una de las subcarteras $F_1,...,F_k$ o al menos su media y desviación típica.

2.- Los ingresos por primas de cada una de las subcarteras vienen dados por

$$P_i'' = (1=\lambda_i) .P_i + G_i \qquad i=1,...,k$$

donde

• P_i'' representa a los ingresos por primas comerciales de la subcartera i

• $P_i = E(X_i)$ prima pura, que coincide con la esperanza matemática de siniestralidad de la subcartera i.

• λ_i recargo para seguridad y beneficio.

• G_i recargo para gastos de gestión.

3.- La empresa dispone de unas reservas de solvencia, cuyo concepto supondremos análogo al de margen de solvencia, de cuantía S.

De acuerdo con la normativa legal sobre solvencia, y con afán de simplicidad, supondremos la exigencia de que las citadas reservas sean superiores a un porcentaje p de las primas comerciales netas de retenciones.

4.- Se ha decidido reasegurar en la modalidad cuota-parte cada una de las subcarteras, siendo $0 \leq a_i \leq 1$ la cuota de reaseguro retenida para todas las pólizas de la subcartera i.

5.- Hagamos ahora algunas consideraciones sobre la forma en que dicha modalidad de reaseguro afecta a la siniestralidad y a otras magnitudes en la empresa de seguros.

• Al acaecer un siniestro de cuantía x correspondiente a una póliza de la subcartera i, el reparto de la misma se hará de la siguiente forma; $a_i x$ a cargo de la compañía cedente y $(1-a_i)$ x a cargo de la aceptante.

• Para el estudio de la siniestralidad total de cada subcartera consideraremos las hipótesis tradicionales de la Teoría del Riesgo (consultar Beard, Pentikainen y Pesonen (1984) o Buhlman (1970)):

-*Sea n el número aleatorio de siniestros de la subcartera i en un período de* exposición, que tomaremos anual. Representaremos por $P_i(n)$ la distribución de probabilidad del citado número de siniestros.

- Sean $x_1, x_2,..., x_n$ las cuantías también aleatorias, de cada uno de los n siniestros. Supondremos que estas variables aleatorias *tienen idéntica distribución*, son independientes entre si y su distribución no depende de n. Representaremos por $V_i(x)$ su función de distribución.

La siniestralidad total en el período anual considerado es

$$x = x_1+,..., +x_n$$

esto es, la suma de las cuantías aleatorias de un número aleatorio de siniestros, y su función de distribución viene dada por la conocida expresión

$$F_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_i(n). V^{*(n)}(X)$$

en la que $V^{*(n)}$ es la convolución n-sima de V.

La media y varianza son

$$E_i(x) = E_i(n). E_i(x)$$

$$\sigma_i^2(x) = E_i(n). \sigma_i^2(x) + \sigma_i^2(n).(E_i(x))^2$$

• Analicemos como influye la mencionada modalidad de reaseguros en la distribución de la siniestralidad total de la cedente.

Es claro que la influencia se produce sobre la distribución de la cuantía de un siniestro: decidida la cuota de reaseguro $a_i \in [0,1]$ la distribución de la cuantía de un siniestro queda:

$$V'_{ir}(a_i x) = V'_i(x)$$

por lo que elementalmente

$$E_{ir}(x) = E_i(n) \cdot a_i \cdot E_i(x) = a_i \cdot E_i(x)$$

$$\sigma^2_{ir}(x) = E_i(n).\, a_i^2 \sigma_i^2(x) + \sigma_i^2(n).\, (a_i E_i(x))^2 = a_i^2 \sigma_i^2(x)$$

y por lo tanto $\sigma_{ir}(x) = a_i \cdot \sigma_i(x)$, con lo que tenemos la media varianza y desviación típica de la distribución de la siniestralidad total de la subcartera i después del reaseguro.

6.- Siendo P_i'' el volumen de primas comerciales de la subcartera i tendremos que

— $a_i P_i''$ quedan en poder de la cedente y

— $(1-a_i)\, P_i''$ va a la aceptante, que pagará a su vez a la cedente una comisión para compensarla de sus gastos de adquisición. Para simplificar, supondremos que la parte del recargo para gastos retenida por la cedente, $a_i G_i$, más la citada comisión, cubren exactamente los gastos de gestión (no implicaría gran complicación que así no sucediera).

Tendremos entonces que las primas recargadas en poder de la cedente de la subcartera i son

$$a_i P_i' = a_i\,(1+\lambda_i)\,P_i = a_i\,P_i + a_i\,\lambda_i\,P_i$$

donde ya que $P_i = E_i(x)$, $a_i P_i = E_{ir}(x)$, esto es, la esperanza matemática de la siniestralidad de la cedente.

Llamando $B_i = \lambda_i P_i$ al beneficio esperado de la subcartera i es claro que $B_i\, a_i = a_i\, \lambda_i P_i$ es el beneficio esperado de la cedente después de reaseguro para dicha subcartera y

$$B_1\, a_1 + ... + B_k\, a_k \qquad \text{(I)}$$

el beneficio esperado para la cartera total después de reaseguro.

7.- En la toma de decisiones sobre el valor de los a_i se han de tener en cuenta:

a) La restricción legal de solvencia: el margen de solvencia ha de superar un determinado porcentaje Γ de las primas comerciales netas de reaseguro (esto supone una simplificación de la normativa legal vigente, véase artículo 78 del reglamento de ordenación del seguro privado; de no hacerlo así complicaría innecesariamente el modelo).

La expresión matemática de esta restricción es

$$P''_i\, a_i + ... + P''_k\, a_k \leq K.S \qquad (K=\frac{1}{P}) \quad (II)$$

en la que $P''_i\, a_i + ... + P''_k\, a_k$ son las primas comerciales comerciales netas de reaseguro.

b) Además de esta restricción legal, que no tiene en cuenta más que la cuantía de la cartera retenida pero no las cualidades de los riesgos retenidos, parece adecuado establecer una medida de la "peligrosidad" de la cartera.

Aun teniendo presente los defectos que poseen hemos elegido la desviación típica (o alternativamente la varianza) de la siniestralidad.

De las consideraciones hechas en 5 resulta que

$$\sigma_1 (x) .a_1 + ... + \sigma_k(x).a_k \qquad (III)$$

es la suma de las desviaciones típicas de las subcarteras retenidas y

$$\sigma_1^2 (x).a_1^2 + ... + \sigma_k^2 (x).a_k^2 \qquad (III')$$

es la suma de las varianzas de las subcarteras retenidas, que en caso de independencia coincide con la varianza de la cartera retenida total.

8.- Estamos ya en condiciones de formular matemáticamente nuestro problema con un programa multiobjetivo. Habremos de elegir los valores de a_1, a_2, ..., a_k que maximizan el beneficio esperado después de reaseguro (I) minimizando la suma de las desviaciones típicas de las subcarteras retenidas (III), en otro trabajo consideraremos como objetivo (III') (aunque podemos adelantar que no se obtiene un resultado muy distinto), y verificándose además la restricción de solvencia y de variación de los a_i entre 0 y 1.

Esto es

$$\left.\begin{array}{c} \text{Máx } B_1 a_1 + ... + B_k a_k \\ \text{Mín } \sigma_1 (x) .a_1 + ... + \sigma_k(x).a_k \\ \text{sujeto a } P''_1\, a_1 + ... + P''_k\, a_k \leq K.S \\ 0 \leq a_1 \leq 1 \\ 0 \leq a_k \leq 1 \end{array}\right\} PM$$

RESOLUCION DEL PROGRAMA

Procederemos a continuación a la resolución del programa PM. Tal y como hemos elegido los objetivos y restricciones es claramente un programa lineal por lo que cabría emplear el algoritmo del simplex multiobjetivo ideado por Zeleny y Philips (consúltese, por ejemplo, Goicoechea (1987)). Sin embargo, su aplicación suele conducir a un gran número de cálculos y a complejas interpretaciones.

Nosostros seguiremos otro camino que nos permitirá establecer un sencillo algoritmo de resolución a la vez que una sencilla interpretación de las soluciones obtenidas.

Fijémonos ya en el programa PM. Consideremos los conjuntos

$$\Omega = \{(a_1,\ldots,a_k) \in R^k : 0 \leq a_i \leq 1 \ i = 1,\ldots,k\}$$

$$A = \{(a_1,\ldots,a_k) \in \Omega : \Sigma \ P_i'' \ a_i \leq K.S\}$$

Distinguiremos dos casos para los cuales emplearemos sendos procedimientos de resolución:

Caso 1.- $A = \Omega$. Lo que sucederá cuando $\sum_{i=1}^{K} P_i'' \leq K.S$

Esto es el conjunto factible es Ω.

La interpretación de este caso es sencilla: el asegurador directo puede seguir cualquier política de reaseguro sin limitación alguna, desde no reasegurar nada a reasegurar todo. Esto se debe a que su margen de solvencia le permite, desde el punto de vista legal mantener la totalidad de su cartera. La única razón por la que no tome esta decisión es la importancia que de a la "peligrosidad" de la cartera (en relación a la que se de a la pérdida en el beneficio esperado que se produce al reasegurar parte de ella).

Formalicemos las anteriores ideas:

Escribamos los objetivos del programa en la forma

$$\text{Mín } -B_1 a_1 - \ldots - B_k a_k$$

$$\text{Mín } \sigma_1(x).a_1 + \ldots + \sigma_k(x).a_k$$

y procedamos a escalarizar tomando $\alpha \in [0,1]$, que pondera los objetivos y considerando la función

$$f_\alpha(a) = \alpha\,(\sigma_1 a_1 + ... + \sigma_k a_k) + (1-\alpha)(-B_1 a_1 - ... - B_k a_k) = \sum_{i=1}^{K} (\,\alpha\,(\,\sigma_i + B_i) - B_i) a_i$$

y con ella el programa escalar

$$\left.\begin{array}{l} \text{Mín } f_\alpha(a) = \displaystyle\sum_{i=1}^{K} (\,\alpha\,(\,\sigma_i + B_i) - B_i) a_i \\ \qquad\qquad\qquad\text{sujeto a } 0 \le a_1 \le 1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0 \le a_k \le 1 \end{array}\right\} PM_\alpha$$

en el que hemos eliminado la restriccion legal de solvencia por el supuesto hecho anteriormente.

Resolvemos el programa PM_α, notemos que los B_i y σ_i son positivos y los a_i y α están comprendidos entre cero y uno.

De la simple observación de la funciòn objetivo y las restricciones son evidentes los siguientes resultados:

Si hemos tomado $\alpha = 0$, lo que significa que lo único importante es la maximización del beneficio, no dándose importancia a la "peligrosidad" de la cartera, la solución es claramente $a_1 = a_2 = ... = a_k = 1$, esto es, no se cede nada en reaseguro.

Si $\alpha = 1$, pretenderemos minimizar el riesgo lo más posible sin importar la consiguiente disminución de beneficio. Es claro que la solución es $a_1 = a_2 = ... = a_k = 0$, esto es, se reasegura toda la cartera.

Se advierten también fácilmente otras soluciones:

Si $\alpha\,(\sigma_i + B_i) - B_i > 0$, esto es, $\alpha > \dfrac{B_i}{\sigma_i + B_i}$ es claro que para la subcartera i tomaremos $a_i = 0$ (reasegurar todo).

Si $\alpha\,(\sigma_i + B_i) - B_i < 0$, esto es, $\alpha < \dfrac{B_i}{\sigma_i + B_i}$ resulta evidente que para la subcartera i tomaremos $a_i = 1$ (no se reasegura nada).

Si $(\sigma_i + B_i) - B_i = 0$, esto es, $\alpha = \dfrac{B_i}{\sigma_i + B_i}$ resulta que cualquier valor de a_i del intervalo [0,1] es solución

Como vemos las soluciones del programa PM_α solo dependen del valor de los cocientes $R_i = \frac{B_i}{\sigma_i + B_i}$ y de α.

Calculados todos los R_i y puestos en orden creciente de forma que $0 < R_1 \leq R_2 \leq \ldots \leq R_k < 1$ (si es necesario reordenaremos de igual forma los subíndices de las subcarteras) tendremos:

— Cuando $0 < \alpha < R_1$ el óptimo de Pareto obtenido es $(a_1, a_2, \ldots, a_k) = (1, 1, \ldots, 1)$.

Si $\alpha = R_1$, tendríamos $(a_1, 1, \ldots, 1)$ con $a_1 \in [0,1]$

— Cuando $R_1 < \alpha < R_2$ tendremos $(0,1,\ldots,1)$ y si $\alpha = R_2, (0, a_2 1, \ldots, 1)$ con $a_2 \in [0,1]$. También es claro que si $\alpha = R_1 = R_2 < R_3$, la solución será $(a_1, a_2, 1, \ldots, 1)$ con $a_1, a_2 \in [0,1]$

De esta forma iríamos obteniendo distintas soluciones según los valores de los R_i y α, hasta el caso en que $R_k < \alpha$, en el que la solución será $(0,0,\ldots,0)$, o que $R_i = \ldots = R_k = \alpha$ en el que cualquier punto de $[0,1]^k$ es solución.

Para fijar las ideas, conviene recurrir a algunas representaciones gráficas. Consideremos el caso más simple de que existan únicamente dos subcarteras. El conjunto factible vendrá representado por el cuadro de la figura 1.

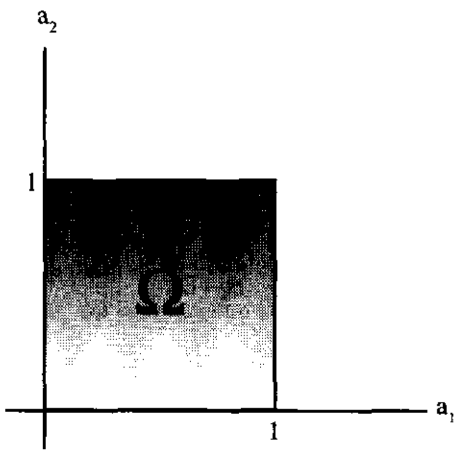

Figura 1

Según los valores de R_1, R_2 y α, los óptimos de Pareto se situarán en alguno de los vértices del cuadrado, en alguna de sus aristas o en toda su superficie. En las figuras 2 y 3 nos referimos a los casos $R_1 < R_2$ y $R_1 = R_2$.

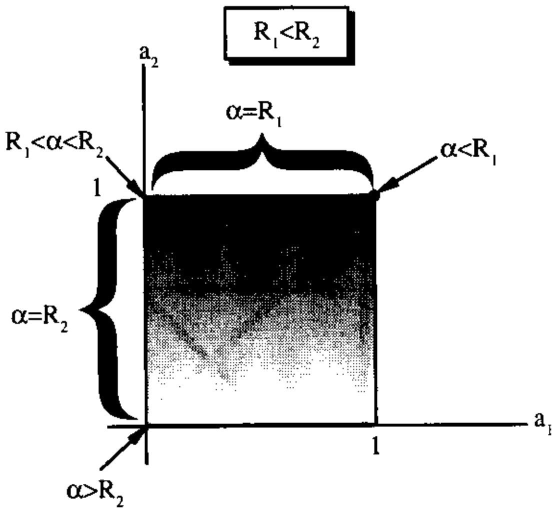

Figura 2

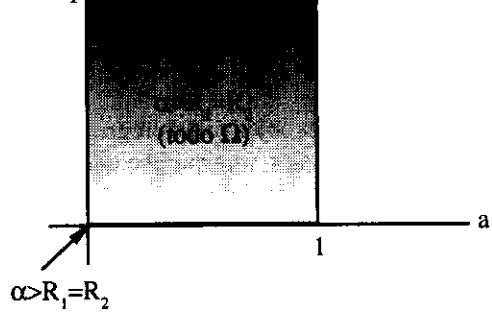

Figura 3

De igual forma, si tuviésemos tres subcarteras, el conjunto factible sería un cubo (figura 4) y los óptimos de Pareto dependiendo de los valores de R_1, R_2, R_3 y α se situarían en alguno de los vértices del mismo, en una de sus aristas, de sus caras o en todo él. No creemos que el lector tenga dificultad en situarlos, y en cualquier caso representamos la línea de óptimos para $R_1<R_2<R_3$.

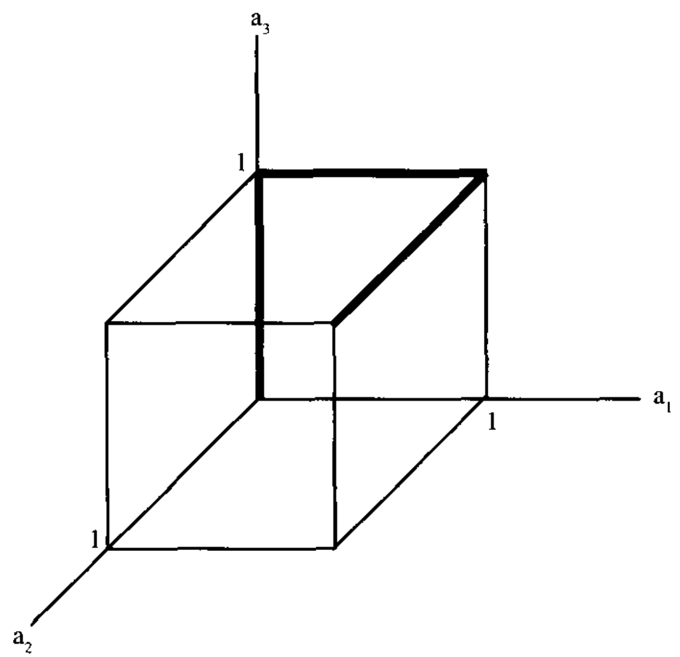

Figura 4

Fijémonos ahora en las funciones objetivo del programa PM, denominémoslas B(a) y σ(a). Es claro que ambas son lineales, y ya que el conjunto factible Ω es convexo, la imagen por (B(a) y σ(a)) del mismo también será un convexo de R^2, que coincidirá con la envoltura convexa de las imágenes de los vértices de Ω.

En el caso de dos subcarteras, los vértices de Ω son (0,0), (0,1), (1,0) y (1,1) y la imagen de Ω por (B(a) y σ(a)) es la envoltura convexa de (0,0), (B_2,σ_2), (B_1,σ_1) y $(B_1+B_2,\sigma_1+\sigma_2)$ (imágenes por la citada función de los vértices de Ω.

La forma de la imagen de Ω por ($B(a)$ y $\sigma(a)$) dependerá de la relación entre los cocientes R_1 y R_2. Así por ejemplo, si $R_1 < R_2$ y los B_I y σ_I tales como en la figura 5 tendremos:

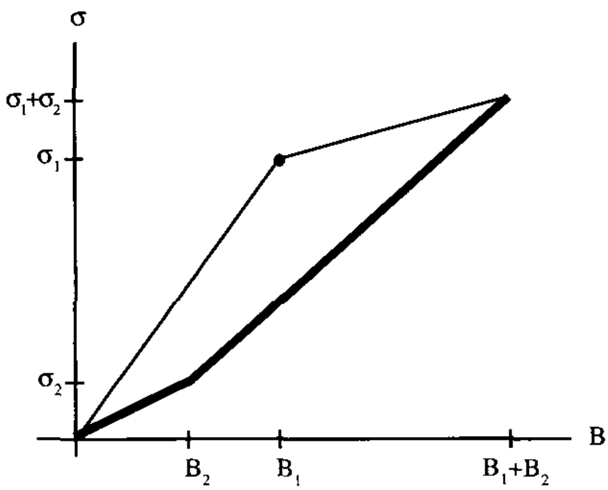

Figura 5

La línea de trazo grueso en la figura anterior se denomina línea de eficiencia y es la imagen de los óptimos de Pareto encontrados al resolver el programa PM por la función ($B(a)$, $\sigma(a)$). Es claro que cada uno de los puntos de la línea de eficiencia se caracteriza porque no nos podemos trasladar a otro mejorando los dos objetivos a la vez.

Caso 2.- $A \neq \Omega$. Puede comprobarse fácilmente que este caso se da cuando

$$\sum_{i=1}^{K} P_i'' > K.S.$$

La interpretación es fácil: la situación de solvencia del asegurador no le permite seguir cualquier política de solvencia habiendo de renunciar a aquellas de máxima retención.

La representación del conjunto factible, que dependerá ahora de la restricción de solvencia, puede ser para los casos de dos y tres subcarteras como los de las figuras 6 y 7.

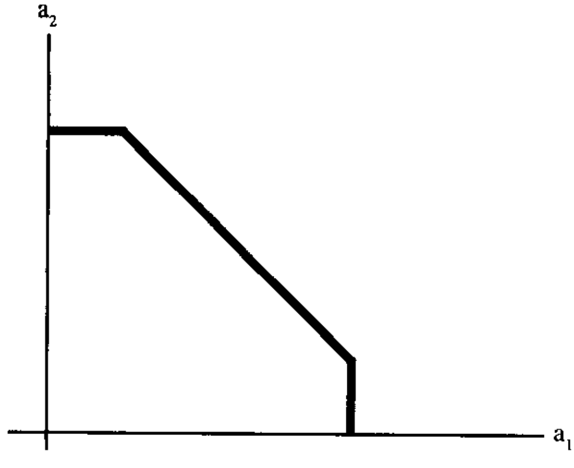

Figura 6

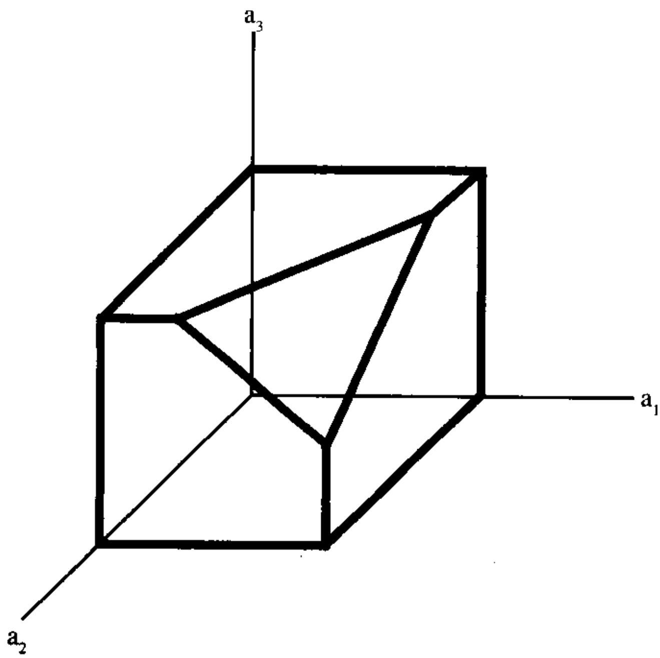

Figura 7

Consideremos entonces el siguiente programa

$$\left.\begin{array}{r} \text{Mín } f_{\alpha}(x)= \sum_{i=1}^{K}[\alpha(\sigma_i+B_i)-B_i]a_i \\ \text{sujeto } aP''_i a_i+...+P''_k a_k \leq K.S. \\ 0\leq a_1\leq 1 \\ \dots\dots\dots \\ 0\leq a_k\leq 1 \end{array}\right\} PM'_{\alpha}$$

cuya formulación se realiza análogamente a lo expuesto en el caso 1, pero que resolveremos ahora recurriendo a las propiedades de dualidad.

Dado que K.S. > 0, para a = 0 es claro que se verifica la condición de Slater mencionada en los preliminares. Considerando el teorema fundamental de la dualidad, tendremos el siguiente resultado:

Proposición.- Sean $a = (a_1,...,a_k) \in A$ y $\lambda \geq 0$. Entonces a es la solución de PM'_{α} y λ es solución dual si, y sólo si,

a) a resuelve $\text{Mín}_{y\in\Omega} \sum_{i=1}^{K} (\alpha (\sigma_i+B_i) - B_i) + \lambda P''_i y_i - \lambda KS$

b) $\lambda (\sum_{i=1}^{K} P''_i a_i - KS) = 0$

En particular, el punto a es la solución primal y $\lambda = 0$ es solución dual si, y sólo si,

c) a resuelve $\text{Mín}_{y\in\Omega} \sum_{i=1}^{K} (\alpha (\sigma_i+B_i) - B_i) y_i$

Esta condición supone que a resulva el programa PM_{α} del caso 1, por lo que ahora siguen siendo óptimos de Pareto los puntos obtenidos en la resolución de PM_{α} que sigan siendo factibles, esto es, que verifiquen la restricción de la solvencia.

Ejemplos gráficos para dos subcarteras serían (para distintas relaciones entre α, R_1 y R_2 y situaciones de la restricción de solvencia) los representados en las figuras 8 y 9.

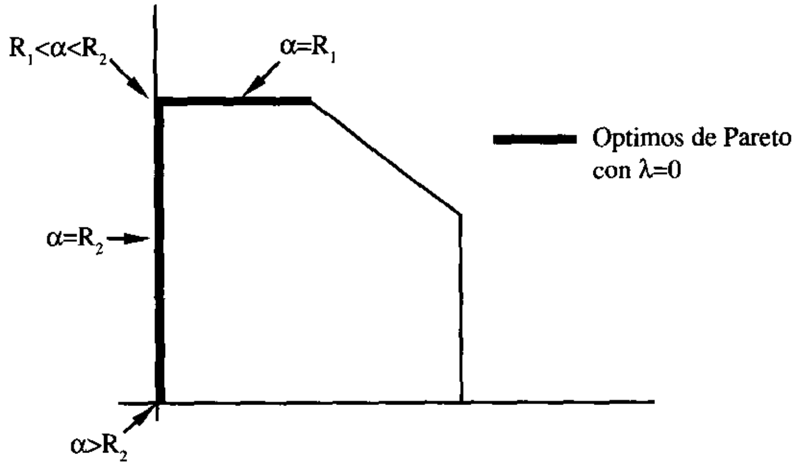

Figura 8

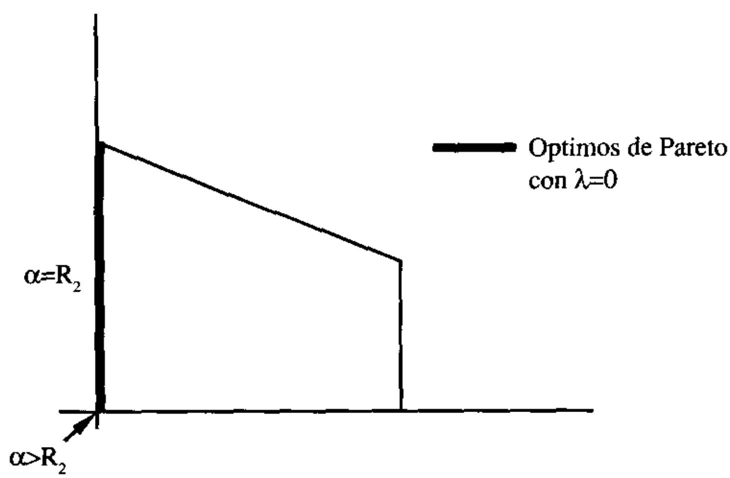

Figura 9

es claro que todos los puntos serían óptimos de Pareto (para $\lambda = 0$) cuando $R_1 = R_2$.

Intentaremos, a continuación, encontrar las soluciones del programa PM'_α sin imponer que $\lambda = 0$.

Puesto que PM_{α}' es claramente un programa convexo (es lineal), tiene un programa dual asociado, busquémoslo.

La función dual será

$$\varphi_{\alpha}(\lambda) = \underset{y \in \Omega}{\text{Mín}} \sum_{i=1}^{K} \left(\alpha\,(\sigma_i + B_i)) - B_i + \lambda\, P_i'' \right) y_i - \lambda\, KS$$

Como Ω es compacto, el mínimo anterior siempre se alcanza de forma que cualquier $\lambda \geq 0$ es solución factible dual. Además, según se dijo, la función dual es cóncava y, por consiguiente, continua en los puntos $\lambda > 0$ (véase Balbas y Gil Fana (1987)).

Probemos el siguiente resultado:

Proposición $\varphi_{\alpha}(\lambda)$ es continua en todo $\lambda \geq 0$.

Demostración.- Basta probar que φ_{α} es continua en cero. Puesto que λ KS es claramente continuo, demostremos el resultado para

$$l_{\alpha}(\lambda) = \underset{y \in \Omega}{\text{Mín}} \sum_{i=1}^{K} \left(\alpha\,(\sigma_i + B_i)) - B_i + \lambda\, P_i'' \right) y_i$$

Para $0 \leq \lambda \leq 1$ e $y \in \Omega$ definamos

$$\psi_{\alpha}(\lambda, y_1, \ldots, y_n) = \psi_{\alpha}(\lambda, y) = \sum_{i=1}^{K} \left(\alpha\,(\sigma_i + B_i)) - B_i + \lambda\, P_i'' \right) y_i$$

de la compacidad del dominio deducimos que ψ_{α} es uniformemente continua, de forma que $\forall \in > 0, \exists\, \delta > 0$ tal que

$$\|(\lambda, y) - (\lambda', y')\| < \delta \rightarrow |\psi_{\alpha}(\lambda, y) - \psi_{\alpha}(\lambda', y')| < \varepsilon \qquad \text{(i)}$$

De la compacidad de Ω se deduce (teorema de Weierstrass) que $\psi_{\alpha}(\lambda, y)$ alcanza un mínimo en y para cada λ fijo. Llamemos entonces y (λ) a un elemento de Ω tal que

$$\psi_{\alpha}(\lambda, y(\lambda)) \leq \psi_{\alpha}(\lambda, y) \quad \forall\, y \in \Omega \qquad \text{(ii)}$$

es decir

$$\psi_\alpha(\lambda, y(\lambda)) = l_\alpha(\lambda) \qquad \forall\, \lambda \in [0,1] \qquad \text{(iii)}$$

Finalmente, fijado $y \in \Omega$, la función ψ_α es creciente con λ, es decir,

$$\lambda \leq \lambda' \rightarrow \psi_\alpha(\lambda, y) \leq \psi_\alpha(\lambda', y) \qquad \forall\, \lambda \geq 0 \qquad \text{(iv)}$$

de (i), (ii), (iii), y (iv) se deduce

$$l_\alpha(\lambda) = \psi_\alpha(\lambda, y(\lambda)) \geq \psi_\alpha(0, y(\lambda)) \geq \psi_\alpha(0, y(0)) = l_\alpha(0)$$

y si $|\lambda| < \delta$ entonces

$$l_\alpha(\lambda) = \psi_\alpha(\lambda, y(\lambda)) \leq \psi_\alpha(\lambda, y(0)) = [\psi_\alpha(\lambda, y(0)) - \psi_\alpha(0, y(0))] + \psi_\alpha(0, y(0)) \leq \varepsilon + \\ + \psi_\alpha(0, y(0)) = \varepsilon + l_\varepsilon(0)$$

De (v) y (iv) es

$$l_\alpha(0) - \varepsilon \leq l_\alpha(\lambda) \leq l_\alpha(0) + \varepsilon \quad \text{ó}$$

$$|l_\alpha(\lambda) - l_\alpha(0)| < \varepsilon \qquad \text{si } |\lambda| < \varepsilon$$

q.e.d.

Fijando ahora $\alpha \in [0,1]$, introduzcamos la siguiente notación

$$u_i = \frac{(1-\alpha) B_i - \alpha\sigma_i}{P_i} \qquad i = 1,...,k$$

Demostremos dos importantes resultados

Proposición.- $u_i \geq 0$ si, y sólo sí, $\alpha \leq R_i$ $\quad i = 1, ..., k$

Demostración. Basta considerar la siguiente cadena de equivalencias

$$u_i \geq 0 \Leftrightarrow (1 - \alpha) B_i - \alpha\sigma_i \geq 0 \Leftrightarrow B_i - \alpha(B_i + \sigma_i) \geq 0 \Leftrightarrow R_i \geq \alpha.$$

q.e.d.

El siguiente teorema, que más adelante nos proporcionará un algoritmo, nos permitirá afirmar que la solución dual de PM'_α está en alguno de los u_i (y sólo hay k posibles), así como dar la solución primal a partir de los u_i.

Teorema. a) Sea $i \in \{1,...,k\}$ tal que

1.- $\alpha < R_i$ (ó $u_i > 0$)

2.- $\sum_{u_j > u_i} P''_j \leq K.S.$

3.- $\sum_{u_j \geq u_i} P''_j \geq K.S.$

entonces u_i es la solución dual de PM'_α y las soluciones primales son las que verifican

$$\left.\begin{array}{c} a_j = 0 \text{ si } u_j < u_i \\ a_j = 1 \text{ si } u_j > u_i \\ a_j \in [0,1] \text{ si } u_j = u_i \\ \sum_{i=1}^{k} P''_i a_i = K.S. \end{array}\right\}$$

b) Si ningún $i \in \{1,...,k\}$ verifica las condiciones 1,2 y 3, entonces la solución dual de PM'_α es $\lambda = 0$, y la solución primal es una de las ya conocidas.

Demostración. Del teorema fundamental de la dualidad se deduce que PM_α tiene solución dual, y del teorema de Weierstrass que tiene solución primal. Además, ya hemos dicho que $\forall\ \lambda \geq 0$ es

$$\varphi_\alpha(\lambda) = -\lambda K S + \underset{y \in \Omega}{\text{Mín}} \sum_{i=1}^{K} (\ \alpha (B_i + \sigma_i) - B_i) + \lambda P''_i y_i \quad (1)$$

y obviamente, el mínimo anterior se alcanza en el punto

$$\left.\begin{array}{ll} y_i = 0 \text{ si} & \alpha (B_i + \sigma_i) - B_i + \lambda P''_i > 0 \\ y_i = 1 \text{ si} & \alpha (B_i + \sigma_i) - B_i + \lambda P''_i < 0 \\ y_i \text{ arbitrario si} & \alpha (B_i + \sigma_i) - B_i + \lambda P''_i = 0 \end{array}\right\} (2)$$

lo que es equivalente a

$$\left.\begin{array}{l} y_i = 0 \text{ si} \quad \lambda > \dfrac{(1-\alpha)\, B_i - \alpha\sigma_i}{P_i''} = u_i \\ y_i = 1 \text{ si} \quad \lambda < u_i \\ y_i = \text{arbitrario si} \quad \lambda = u_i \end{array}\right\} \quad (3)$$

sustituyendo el y anterior en (1) se obtiene

$$\varphi_\alpha(\lambda) = -\lambda\, K\, S + \sum_{\lambda \leq u_i} \left(\alpha\, (\sigma_i + B_i)) - B_i + \lambda\, P_i'' \right)$$

(también podría escribirse $\lambda < u_i$ en el sumatorio).

De forma alternativa, podríamos escribir

$$\varphi_\alpha(\lambda) = \sum_{\lambda \leq u_i} \left(\alpha\, (\sigma_i + B_i) - B_i \right) + \lambda \left(\sum_{\lambda \leq u_i} P_i'' - KS \right) \quad (4)$$

La expresión (4) es claramente la ecuación de una recta que cambia de pendiente en los puntos $\lambda = u_i$ tal y como se indica en las figuras 10 y 11

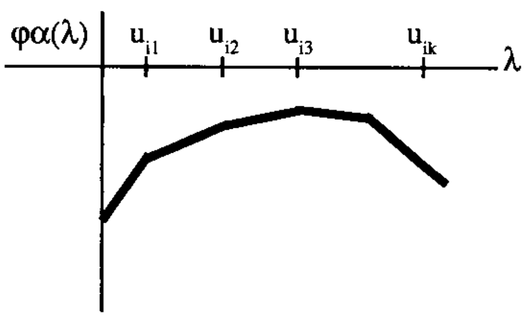

Figura 10

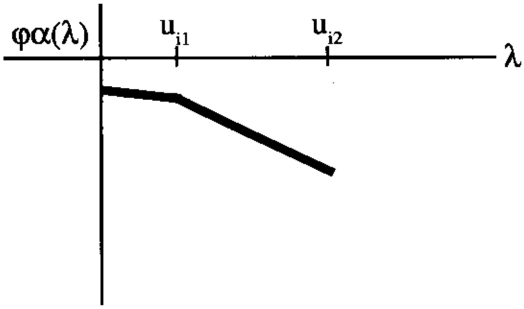

Figura 11

Naturalmente, el máximo (que existe) estará en aquel, ó aquellos, puntos u_i donde cambie el signo de la derivada por la derecha (que será ≤ 0) y la derivada por la izquierda (que será ≥ 0). Esto sucederá en los u_i que verifiquen las condiciones 1,2 y 3 del apartado a) o en $\lambda = 0$ si ningún u_i verifica estas condiciones.

Supongamos que u_i verifica las condiciones 1, 2 y 3. Del teorema fundamental de la dualidad, la solución primal de aquel $a = (a_1,...a_k)$ que verifique

$$\text{a resuelve} \qquad \underset{\Omega}{\text{Mín}} \ -\lambda K S + \sum_{j=1}^{K} \left(\alpha (B_j+\sigma_j)-u_j P''_j \right) y_i$$

$$u_j \left(\sum_{j=1}^{K} P''_j a_j - KS \right) = 0$$

De las condiciones (3) se deduce

$$\left.\begin{array}{r} a_j = o \text{ si } u_j < u_i \\ a_j = 1 \text{ si } u_j > u_i \\ a_j \in [0,1] \text{ si } u_j = u_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{k} P_i a_i = K.S. \end{array}\right\}$$

q.e.d.

La interpretación del resultado es simple. Si se verifica a). una vez determinado u_i (solución dual), tendremos que para aquellas subcarteras j tales que $u_j < u_i$, $a_j = o$, esto es, se reaseguran completamente; para aquellas para las que $u_j > u_i$, $a_j = 1$ no reasegurándose nada y, finalmente para aquellas que verifiquen $u_j = u_i$ podremos elejir cualquier $a_j \in [0,1]$ siempre que se verifique la igualdad

$$\sum_{i=1}^{k} P_i'' a_i = K.S.$$

Si se da b), la solución dual es cero y los a_j se determinan tal y como se indicó al comienzo del estudio de caso 2.

Estamos en condiciones de establecer un algoritmo de resolución:

a) Ordénense los cocientes $R_i = \frac{B_i}{B_i + \sigma_i}$ de forma que

$$0 < R_1 \leq R_2 \leq ... \leq R_k < 1$$

b) Obténganse los óptimos que llevan asociada una solución dual igual a cero.

c) Para $\alpha \in [0,1]$ calcúlense los $u_i = \frac{(1-\alpha) B_i - \alpha\sigma_i}{P_i''}$

d) Considérese aquel i_o tal que

$$a < R_{i_0} \leq R_{i_0+1} \leq ... \leq R_k < 1$$

y para cada $i \geq i_o$ calculemos las sumas

$$\sum_{u_j > u_i} P_j'' \quad y \quad \sum_{u_j \geq u_i} P_j''$$

serán soluciones duales aquellos u_i tales que la primera de las sumas sea menor o igual que K.S. y la segunda mayor o igual que K.S.

Si no hubiere ninguno, la solución dual cero no nos interesa más.

Conocido u_i calcularemos la solución del primal PM'_α de acuerdo al criterio establecido en el último teorema.

Notemos que habrá muchos valores de α que conducirán al mismo punto $(a_1,a_2,...,a_k)$ como solución de Pareto ya que, si al variar α no cambiamos la disposición de los u_i, con $\alpha < R_i$, (en orden ascendente) las soluciones primal y dual serán las mismas.

Por consiguiente basta con considerar ciertos valores de α, que dependerá de como varían los u_i al variar α, y que se pueden determinar fácilmente en ejemplos numéricos.

Si u_i es la solución y ningún u_j (para $j \neq 1$), la solución primal obtenida es única ya que sólo la variable a_i puede ser ajustada para verificar la igualdad

$$\sum_{i=1}^{K} P_i'' \, a_i + K.S.$$

Cuando se desea comprobar si una arista, cara, ... del conjunto factible está formada por óptimos de Pareto, habrá que ver si algún α va a conseguir que los correspondientes u_i y u_j sean iguales, es decir, ver si

$$\frac{(1-\alpha)\, B_i - \alpha\sigma_i}{P_i''} = \frac{(1-\alpha)\, B_j - \alpha\sigma_j}{P_j''}$$

tiene alguna solución $\alpha \in (0,1)$. En tal caso, habrá que comprobar que $u_i = u_j$ es la solución dual como se indicó antes.

BIBLIOGRAFIA

BALBAS, A Y GIL, J.A.- "Programación Matemática". Ed. AC. 1987

BEARD, PENTIKAINEN Y PESONEN.- "Risk Theory". Methuen & Co. LTD. 1984

BUHLMANN, H.- "Mathematical Methods in Risk Theory". Springer-Verlag. 1970

GOICOECHEA, HANSEN Y DUCKSTEEN.- Multiobjetive decision analysis with engeneering business applications". Wiley. 1987.