¿Es posible la inmunización financiera? Expresión general de la duration inmunizadora

por
Vicente Meneu
Eliseo Navarro

RESUMEN

Los movimientos que se han producido en los últimos años en la estructura temporal de los tipos de interés y sus repercusiones en la valoración de las carteras de valores han propiciado el desarrollo de numerosa literatura sobre el tema. El trabajo que se presenta abunda en ese sentido de la siguiente forma:

- se obtiene en primer lugar un nuevo planteamiento de la duration, más general que los conocidos hasta el momento pues es posible deducir todos ellos a partir de su expresión.

- se pone en duda la aplicabilidad y validez de las técnicas inmunizadoras tradicionales a través de la duration.

- se propone vías alternativas que den validez a esas técnicas desde una perspectiva más realista y fácilmente aplicable.

Se parte del supuesto de un agente económico que desea invertir, en un instante del tiempo t=0, en una cartera de títulos de renta fija que genera una determinada corriente de pagos, con el objetivo de satisfacer un pago de cuantía P en el instante t=k donde $k \in [p-1,p]$, con independencia de cual sea la evolución de los tipos de interés durante el periodo [0,k]. Supongamos que dicha corriente de pagos es la siguiente:

	a_1	a_2		a_{p-1}	a_p		a_n	CUANTIAS
0	1	2	...	p-1	p	...	n	VENCIMIENTOS

y que la estructura temporal de los tipos de interés (ETTI), para cuya descripción utilizamos la magnitud derivada densidad logarítmica.

$$\theta(o,t,n) \begin{cases} r_1 \text{ si } t = 1 \\ r_2 \text{ si } t = 2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ r_{p-1} \text{ si } t = p-1 \\ r_p \text{ si } t = p \\ \dots\dots\dots\dots \\ r_n \text{ si } t = n \end{cases}$$

El valor que dicha cartera tomaría en el instante t=k -que de acuerdo con los deseos del inversor deberá ser igual a P- sería, de no variar los tipos de interes durante el período [o,k] el siguiente:

$$V_k(r_1,\dots,r_n) = \sum_{t=1}^{n} a_t\, e^{-r_t.t+r_k.k} = P$$

Dicho valor dependerá del que tomen los tipos de interés, por lo que puede considerarse como una función real de "n variables" de clase $C\infty$ y por tanto contínua.

Lo que estamos interesados en analizar es cómo se modificaría el valor de dicha cartera en el instante t=k al producirse **una variación arbitraria** de los tipos de interés inmediatamente después del instante t=0. En tal caso, la densidad logarítmica de la ley que describe ETTI pasa a tomar los siguientes valores:

$$\theta(o,t,n)\begin{cases} r_1^* \text{ si } t = 1 \\ r_2^* \text{ si } t = 2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ r_{p-1}^* \text{ si } t = p-1 \\ r_p^* \text{ si } t = p \\ \dots\dots\dots\dots \\ r_n^* \text{ si } t = n \end{cases}$$

El valor que la cartera tomaría en el instante t=k en caso de que no se produjera ninguna otra variación en los tipos de interés durante el período [o,k] sería:

$$V_k(r_1^*,\dots,r_n^*) = \sum_{t=1}^{n} a_t\, e^{-r_t^*.t+r_k^*.k} \quad [1]$$

Para analizar cómo afecta a V_k una variación de los tipos de interés como la descrita, desarrollaremos por Taylor dicha función en el punto (r_1,........ r_n) lo que proporcionará de forma aproximada el incremento en el valor de la cartera en el instante t=k dentro de un entorno del punto (r_1,........ r_n), es decir, producido por variaciones lo suficientemente pequeñas de los tipos de interés. Así, tenemos que:

$$V_k(r_1^*,\dots,r_n^*) - V_k(r_1,\dots,r_n) = \nabla V_k(r_1,\dots,r_n)\begin{pmatrix} r_1^* - r_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r_n^* - r_n \end{pmatrix}$$

$$+\ 1/2\,(r_1^* - r_1,\dots, r_n^* - r_n)\, H_k(r_1,\dots r_n)\begin{pmatrix} r_1^* - r_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r_n^* - r_n \end{pmatrix} + \text{Resto} \quad [2]$$

donde $\nabla Vk\ (r_1,\ldots\ldots.\ r_n)$ es el vector gradiente de la función V_k en el punto $(r_1,\ldots\ldots.\ r_n)$ y $H_k(r_1,\ldots\ldots.\ r_n)$ es la matriz hesiana de V_k en ese mismo punto. Si analizamos esta matriz hessiana, puede demostrarse fácilmente que la misma define una forma cuadrática semidefinida positiva.

De aquí podemos extraer la conclusión de que, salvo para determinado tipo de variaciones en los tipos de interés -por otra parte muy poco probable- el incremento en el valor de la función V_k debido a una variación de los tipos de interés (con independencia de si se trata de una subida o una bajada) será mayor o igual que cero cuando se cumpla que:

$$\nabla V_k\ (r_1,\ldots,r_n)\begin{pmatrix}\Delta r_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \Delta r_n\end{pmatrix}=0 \qquad [3]$$

expresión que si es desarrollada conduce a la siguiente:

$$k=\frac{\sum_{t=1}^{n} t\,a_t\,e^{-tr_t}\,.\,\Delta r_t}{\sum_{t=1}^{n} a_t\,e^{-tr_t}\,.\,\Delta r_k} \qquad [4]$$

donde "k" es el final del horizonte de planificación del inversor (HPI).

Así pues, llamando D_G (duration generalizada) a la expresión anterior, tenemos que si el perfil temporal de la corriente de pagos generada por la cartera es tal que se cumple que D_G=k, tendremos garantizado que el valor de la cartera en el instante "k" sea, como mínimo, el que dicha cartera habría tenido en caso de que los tipos de interés no hubiesen variado, es decir, **la cartera está inmunizada**. La gran ventaja (y a su vez, como más tarde veremos, la gran desventaja) de la expresión anterior es que es compatible con cualquier hipótesis previa que hagamos en cuanto al comportamiento de la ETTI. Es más, si planteamos las hipótesis que los diferentes autores han realizado al desarrollar la inmunización financiera, la expresión anterior conduce a la duration inmunizadora desarrollada por aquellos (1).

(1) A respecto pueden verse, entre otros, los siguientes trabajos:
- BIERWAG, G.O.: "Imminization, Duration and the Term Structure of Interest Rates". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. Diciembre 1977
- BIERWAG, G.O.: "Measures of Duration". *Economic Inquiry*. Octubre 1978
- FISHER, L. Y WEIL, R.L.: "Coping with the Risk of Interest Rate Fluctuations, Returns to Bondholders from Naive and Optimal Strategies". *Journal of Business*. 1971
- REDINGTON, F.M.: Review of the Principles of Life Office Valuations". *Journal of the Institute of Actuaries*. Vol. 18, 1952

Pero también hemos señalado que ésta era a su vez su gran desventaja, ya que para poder aplicarla es necesario el tener un conocimiento perfecto de la evolución futura de los tipos de interés, ya que según sea ésta, la duration generalizada (D_G) tomará un valor u otro.

La imposibilidad de poder determinar a priori con total exactitud cuáles van a ser las variaciones futuras de la ETTI hace que nos veamos obligados a plantear la inmunización de una forma distinta.

Nuevo planteamiento de la inmunización financiera.

Se presenta a continuación, como un primer paso en la elaboración de una nueva estrategia inmunizadora, la siguiente cuestión: dada una determinada inversión, y por tanto, una determinada corriente de pagos ¿cuál es el conjunto de variaciones de los tipos de interés para los que el valor de dicha inversión, referido siempre a un determinado instante del tiempo (el final del HPI), permanece inalterado?.

Para dar una respuesta a esta preguna es necesario volver la vista a la ecuación [2]. En ella venía expresado el incremento en el valor de una cartera en un instante $k \in [p-1,p]$ debido a una variación en la ETTI (de $\theta(o,t,n)$ a $\theta^*(o,t,n,)$). Dicho incremento venía dado de forma aproximada y para variaciones lo suficientemente pequeñas de los tipos de interés, por el primer término del segundo miembro de dicha ecuación; es decir:

$$\nabla V_k \approx V_k(r_1,\ldots,r_n) \begin{pmatrix} \Delta r_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta r_n \end{pmatrix} \qquad [5]$$

Es por esta razón que resulta muy interesante, considerar al conjunto de las variaciones de los tipos de interés como dotado de una **estructura algebraica de espacio vectorial** lo que permitirá interpretar la expresión [10] como una **aplicación lineal** donde el espacio de origen (de dimensión "n") es precisamente el conjunto de las variaciones de los tipos de interés y el espacio final (de dimensión 1) el incremento en el valor de la cartera en el instante t=k. Dicha aplicación lineal vendría definida precisamente por el vector gradiente de la función V_k en el punto $(r_1,\ldots\ldots r_n)$.

Así, a la pregunta de cuál es el conjunto de variaciones en los tipos de interés que deja inalterado el valor de la cartera en t=k, la respuesta sería el núcleo de la aplicación lineal definida por el vector gradiante, es decir aquellos vectores $(r_1,\ldots\ldots r_n)$, tales que:

$$\nabla V_k\,(r_1,\ldots,r_n) \begin{pmatrix} \Delta r_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta r_n \end{pmatrix} = 0 \qquad [6]$$

En cualquier caso es necesario señalar que para estos vectores del núcleo, el incremento de valor de la cartera que originan no sería realmente nulo, ya que al eliminar los dos últimos términos de la ecuación [2] estamos cometiendo un error. Pero, al ser la matriz hessiana semidefinida positiva, dicho error será siempre positivo, es decir, estaremos minusvalorando el verdadero incremento en el valor de la cartera (excepto aquel conjunto de variaciones de los tipos de interés para el que

$$\Delta \vec{r}' \, Hk \, \Delta \vec{r} = 0$$

para los que no podemos realizar ninguna afirmación). Así pues, para los vectores del núcleo de la aplicación lineal definida por el vector gradiente de V_k el incremento real en el valor de V_k será, no nulo, sino ligeramente positivo.

Por otra parte si profundizamos algo más en el estudio de este conjunto, podemos ver que se trata de un subespacio de dimensión n-1 (no tenemos más que aplicar el teorema de la dimensión). Y lo que es más importante aún, si dotamos el espacio vectorial de las variaciones de los tipos de interés del producto escalar y la métrica habituales, aquel subconjunto formado por las variaciones de los tipos de interés que dejan inalterado el valor de la cartera en t=k (que denominaremos **hiperplano inmunizado**), sería un **conjunto nunca denso en el conjunto de las variaciones de los tipos de interés**. Esto podría interpretarse como que la probabilidad de que efectivamente se produzca una variación de los tipos de interés que deje inalterado el valor de la cartera es nula, es decir, **el logro de la inmunización financiera**, tal y como ha sido planteado hasta ahora, es **prácticamente imposible**. Al fin y al cabo ésta fue la conclusión a la que llegamos al desarrollar la duration generalizada y ver que para poderla aplicar y seguir una estrategia inmunizadora era necesario hacer una previsión exacta de cuál iba a ser la variación de los tipos de interés.

A la vista de las dificultades que plantea la aplicación de la inmunización financiera, sobre todo las relativas a las hipótesis de partida, resulta necesario abordar el problema que la inmunización pretende resolver, de una forma distinta. En una primera etapa, el cuerpo teórico que vamos a desarrollar servirá fundamentalmente para **comparar distintas carteras** de valores generadoras cada una de ellas de una determinada corriente de pagos, de forma que a partir de las expectativas del inversor, así como de su HPI particular, pueda escoger entre aquellas carteras alternativas la más adecuadas.

Para ello, se determinará cuál es el conjunto de variaciones de los tipos de interés que dan lugar a incrementos positivos en el valor de la cartera para un instante del tiempo "k". Dicho conjunto es precisamente el semiespacio, que denominaremos **semiespacio de beneficio**, definido por el hiperplano inmunizado, es decir aquellos r tales que:

$$\nabla V_k (r_1,...,r_n) \, . \, \Delta \vec{r} \geq 0 \quad [7]$$

Obviamente, cada corriente de pagos da lugar a un semiespacio de beneficios determinado, lo que puede ser utilizado para comparar las distintas carteras de valores, ya que cada uno de aquellos semiespacios indica el conjunto de variaciones de los tipos de interés que incrementan el valor de la cartera en "k". A partir de ahí el proceso de decisión deberá tener en cuenta las expectativas del inversor. De esta forma si el inversor considera que las posibles variaciones de los tipos de interés se situarán dentro de un determinado conjunto, el inversor escogerá aquella cartera cuyo semiespacio de beneficio incluya a dicho conjunto.

No resulta difícil una vez hecho el análisis anterior estudiar cuál es el conjunto de variaciones de los tipos de interés que para un HPI predeterminado proporcionan una rentabilidad fijada de antemano (llamémosla R). Dicho conjunto será precisamente un hiperplano (que podemos denominar **hiperplano de rentabilidad R**), que dividirá el espacio de las variaciones de los tipos de interés en dos semiespacios: uno de ellos corresponderá al conjunto de variaciones en los tipos de interés que proporciona, siempre para ese período previamente fijado que es el HPI, una rentabilidad superior a R y el segundo al conjunto de variaciones de los tipos de interés que proporcionan una rentabilidad inferior a R. Evidentemente el análisis realizado hasta ahora no sería más que un caso particular de este nuevo enfoque que a mi juicio proporciona una mayor flexibilidad al inversor, ya que le puede parecer razonable el obtener una rentabilidad inferior (o superior) a la que proporcionaría la cartera si no varían los tipos de interés. En cualquier caso, si el objetivo de rentabilidad del inversor es el que una determinada cartera proporcionaría de no variar los tipos de interés (que denotaremos por R^*) estaríamos analizando el caso de la inmunización financiera, siendo el hiperplano de rentabilidad R^* el hiperplano inmunizado y el semiespacio de rentabilidad superior a R^* el semiespacio de beneficio.

Para determinar cuál es el hiperplano de rentabilidad R debemos fijarnos de nuevo en el vector gradiente. Hay que tener en cuenta que, según sea la rentabilidad que se exija a la inversión, el valor de la cartera al final del HPI (es decir en t=k) deberá ser uno u otro. En concreto si la cantidad invertida en la cartera es de una cuantía igual al V_0 (es decir, el valor de la cartera en el instante t=0, antes de producirse la variación en los tipos de interés), el valor final que deberá exigir a la cartera para que proporcione una rentabilidad igual a R será $V_0 e^{R.K}$.

Así pues, siendo V_k el valor que la cartera habría tenido al final del HPI en caso de no variar los tipos de interés, la ecuación del hiperplano de rentabilidad R vendría dada por la expresión (2):

$$\nabla V_k (r_1,...,r_n) \cdot \vec{\Delta_r} = [V_0\, e^{R.k} - V_k] \qquad [8]$$

(2) En realidad el conjunto de $\vec{\Delta r}$ que satisfaga la expresión anterior no proporcionaría exactamente la rentabilidad R sino una rentabilidad ligeramente superior. Esto es debido a que estamos trabajando despreciando el Resto de la expresión [4], por lo que nos estamos moviendo siempre en un mundo "aproximado" al real.

y el semiespacio de rentabilidad superior a R delimitado por el anterior hiperplano será:

$$\nabla V_k (r_1,...,r_n) \cdot \Delta \vec{r}) \geq [V_0 e^{R.k} - V_k] \qquad [9]$$

A la vista de estas expresiones y la correspondiente a los hiperplanos inmunizados podemos ver como los hiperplanos de rentabilidad R no son más que el hiperplano inmunizado desplazado, desplazamiento que dependerá obviamente del R que hayamos prefijado.

A partir de aquí el proceso de decisión del inversor sería similar al desarrollado con anterioridad.

Este nuevo planteamiento de la inmunización abre unas posibilidades nuevas con un mayor grado de aplicabilidad y flexibilidad a la hora de tomar decisiones. Algunos desarrollos y aplicaciones concretas están siendo estudiadas en estos momentos y sus resultados aparecerán en próximos trabajos.