Asignación de costes comunes: Una aproximación a través de la teoría de juegos

Por

MARIA ANTONIA GARCIA BENAU y
ANTONIA IVARS ESCORTELL

Profesoras de Economía Financiera y Contabilidad
Universidad de Valencia

1. INTRODUCCION

El problema del reparto de costes puede abordarse a través de la aplicación de la teoría de juegos cooperativos, siempre que se cumplan ciertas condiciones previas.

Esta afirmación podemos entenderla partiendo de un conjunto de usuarios que desean acceder a un determinado servicio. Entre los distintos usuarios puede existir una cooperación de modo que se logren ventajas para cada uno de ellos. Dicha cooperación puede presentarse entre todos los usuarios existentes o también por medio de subcoaliciones entre algunos de ellos. En ambos casos, el tema que abordamos es, una vez determinado el coste total de acceder al citado servicio, cómo debería distribuirse el mismo entre los usuarios.

Ante este problema, la teoría de juegos cooperativos, nos ofrece una aproximación importante, que deseamos recoger. La literatura que abarca este problema plantea su solución formulando el reparto atendiendo a los beneficios obtenidos por la cooperación. En nuestra exposición, abordaremos el tema en función de la asignación de costes en lugar de beneficios, ya que pensamos que, de este modo, la exposición es más clara y no trastoca la evidente relación entre ambos.

El trabajo presentado se encuentra estructurado siguiendo el esquema que indicamos a continuación. En la Sección 2 ponemos de relieve las principales razones que justifican las causas por las que interesa realizar el reparto de costes. La Sección 3 plantea los conceptos básicos de la teoría de juegos para el estudio de los costes comunes. En la Sección 4 abarcamos aquellas soluciones para juegos n-personales cooperativos que pensamos que tienen una relevancia especial en el problema planteado. La Sección 5 realiza una comparación entre las soluciones planteadas y presenta las características fundamentales que las diferencian entre sí. Y, finalmente, en la última sección planteamos un ejemplo de introducción al tema, que pretende, por la simplicidad con que se ha presentado, ofrecer una visión clara y concisa de las soluciones recogidas previamente.

2. JUSTIFICACION DEL REPARTO DE COSTES

La aparición de costes comunes (1) en la empresa surge cuando existen elementos de costes que no pueden afectarse de las clases de costes a los portadores. Por ello, puede plantearse la necesidad de encontrar «bases de reparto» que permitan una asignación más efectiva de los mismos, generando de esta forma información suficiente para la toma de decisiones empresarial.

Si partiéramos de la consideración de la empresa desde una perspectiva global y no individualizada para cada uno de los elementos que la componen, el reparto de costes podría ser innecesario.

Sin embargo, es evidente que la implantación y el desarrollo de la Contabilidad por niveles de responsabilidad (2) exige una evaluación continuada de la actuación de las divisiones de la empresa. Para que dicha evaluación sea completa, debe plantearse el reparto de los costes comunes entre los centros, de modo que cada uno de ellos sea considerado como generador de costes e ingresos (3).

La idea de llegar a repartir estos costes supone encontrar una clave de reparto adecuada y consistente con nuestros objetivos. No obstante, como

(1) Siguiendo a Fernández Pirla, podemos definir los costes comunes como «aquellos costes en los que técnicamente no se puede individualizar la imputación». FERNÁNDEZ PIRLA, J. M.: *Teoría económica de la Contabilidad*. Madrid. ICE. 1970, pág. 234.

(2) Esto implica el establecimiento de un sistema de control de la dirección que permita evaluar a los directores de las distintas divisiones. Puede consultarse, entre otros, FERRARA, W. L.: *Responsibility accounting: A basic control concept*, en THOMAS, W. E.: *Readings in cost accounting, budgeting and control*. Cincinnati. Ohio. South-Western Publishing. 1973, págs. 60-72.

(3) Nos referimos a la consideración de los centros de responsabilidad como «centros de beneficios».

apunta A. Thomas (4), «la mayor parte de los repartos de costes son arbitrarios» (5) y, por tanto, inútiles de cara a la toma de decisiones empresarial (6). A pesar de esta afirmación, y por lo expuesto con respecto a la importancia de la descentralización en la empresa, en muchas ocasiones es conveniente realizar este reparto. Podemos sintetizar los métodos existentes para su distribución en los siguientes grupos (7):

1. Métodos pragmáticos.

Consisten en la asignación de costes basándose en las relaciones técnicas de los productos.

2. Métodos basados en el análisis marginal.

Se basan en las funciones de costes y de demanda de cada producto.

3. Métodos basados en la programación matemática (8).

Se utilizan al extenderse la aplicación de los ordenadores a la gestión empresarial. El problema planteado resuelve decisiones respecto a la combinación de factores a efectuar para obtener una determinada cantidad de los productos.

4. Métodos basados en la teoría de los juegos.

Por todo lo señalado, y a pesar de que compartimos la postura expuesta por Thomas y de que asumimos la arbitrariedad de los métodos clásicos propuestos, pensamos que, en particular, con la utilización de la teoría de juegos, podemos abordar la resolución del citado problema, llegando a conclusiones bastante satisfactorias, ya que la teoría de juegos suministra una medida del efecto interacción entre los factores (9).

---

(4) Véase, entre otros: THOMAS, A. L.: «The allocation problem: Part two». *Studies in Accounting Research 9*. American Accounting Association. 1974.

(5) Esta afirmación ha sido mantenida por la mayoría de los autores que han tratado el tema.

(6) Sin embargo, el propio Thomas señala que existen repartos no arbitrarios que se encuentran «teóricamente justificados». Puede consultarse, por ejemplo, THOMAS, A. L.: «On joint cost allocations». *Cost and Management*. Septiembre-octubre, 1974, págs. 14-21.

(7) Los tres primeros grupos pueden consultarse en: CAÑIBANO, L., y MALLO, C.: «El cálculo de costes en la producción conjunta». *Revista Española de Financiación y Contabilidad*. Abril-junio, 1974, pág. 105.

(8) A este respecto puede consultarse un interesante trabajo realizado por: KAPLAN, R. S., y THOMPSON, G. L.: «Overhead allocation via mathematical programming models». *The Accounting Review*. Abril, 1971, págs. 352-364.

HARTLEY, R. V.: «Decision making when joint products are involved». *The Accounting Review*. Octubre, 1971, págs. 746-755.

(9) Los requisitos mínimos que debe cumplir un método de reparto, podemos expresarlos del siguiente modo: «Debe ser posible especificar el método que se emplee y defenderlo ante otras alternativas». THOMAS, A. L.: «The allocation problem in Financial Accounting Theory». *Studies in Accounting Research 3*. American Accounting Association. 1969, pág. 7.

3. CONCEPTOS BASICOS DE JUEGOS PARA EL ANALISIS DE LOS COSTES COMUNES

Nuestro estudio se encuentra basado en la teoría de juegos cooperativos desarrollada por Von Neumann y Morgenstern (10). Por ello, estamos suponiendo que las partes que intervienen en el juego obtienen ventajas positivas por actuar conjuntamente, es decir, en nuestro caso, el actuar individualmente llevaría a que cada centro tuviera que soportar unos costes más elevados que en el caso de que exista una cooperación (11) entre los departamentos.

El problema planteado se desarrolla considerando las «n» divisiones de la empresa como los «n» jugadores que intervienen en el juego. La cooperación entre ellos vendrá medida por el ahorro de costes que surge al actuar conjuntamente.

El ahorro de costes se plantea cuando las divisiones deciden formar coaliciones, es decir, agrupaciones de las mismas para conseguir una utilidad. Por eso, el término «ahorro de costes» lo entendemos como la disminución de los costes totales de las divisiones al formar una determinada colación.

Nuestro problema será indicar cómo afecta este ahorro sobre los costes de cada división. Por ello, debemos encontrar algún método de reparto que beneficie a todas las partes. Si dicho método no plantea ventajas en cuanto a la disminución de costes en alguna división, la misma no tendrá razones motivacionales que le lleven a constituir la citada coalición para utilizar los servicios comunes y, por tanto, podría acceder a fuentes ajenas a la coalición que pueden ir en detrimento de la empresa en su conjunto.

Antes de plantear el desarrollo de los modelos matemáticos posteriores (12), conviene precisar una serie de conceptos necesarios para el desarrollo de los mismos:

— La empresa consta de n divisiones que representamos por el conjunto N.

— En un deseo de minimización de costes, el acceder todas las divisiones conjuntamente a los servicios requeridos le supone a la empresa un coste X.

— La utilización de los servicios de un modo independiente por cada una de las divisiones le supone un coste $u(i) = c_i \ \forall i = 1, \ldots, n \ / \ \sum_{i=1}^{n} c_i = C$. Se supone que dicho importe se ha ontenido por una selección eficiente entre las alternativas existentes.

(10) VON NEUMANN, J., y MORGENSTERN, O.: *Theory of games and economic behavior.* Princeton. Princeton University. 1953.

(11) El que exista cooperación significa que hay una coordinación de las estrategias individuales para maximizar la utilidad accesible a una colación.

(12) Para una exposición al respecto, puede consultarse: LUCAS, W. F.: «An overview of the mathematical theory of games». *Management Science*. Enero, 1972, págs. 3-19.

— El coste conjunto es tal que $X \leq C$.

— El ahorro de costes vendrá definido por: $Y = C - X$.

— Nuestro problema será repartir los costes conjuntos X entre las divisiones, considerando el ahorro de costes expuesto.

— Por $P(N)$ representamos las partes de N.

— Todo reparto vendrá expresado por medio de un vector $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, en donde u_i expresa el coste asignado a la división i, para $i = 1, 2, \ldots, n$, de modo que $u_i \geq 0$.

— El problema que abordamos es determinar repartos «satisfactorios». Con ello queremos expresar que el reparto propuesto no debe perjudicar a ninguna de las divisiones que intervienen en el mismo.

— En un deseo de subsanar el problema de la arbitrariedad del reparto, vamos a exigir que para que un reparto sea satisfactorio, reúna los siguientes requisitos:

a. Toda división debe beneficiarse al cooperar en la utilización de servicios comunes. Por ello, $u_i \leq c(i)$ (13).

b. Los costes comunes X deben ser asignados en su totalidad a las divisiones. Ello supone que, en ningún caso, será la alta dirección de la empresa la que haga frente a una parte del mismo a través de bonificaciones. Del mismo modo, las divisiones no deben soportar un coste superior a X, negando, en tal caso, la posible penalización impuesta por la central al acceder conjuntamente al servicio requerido. Por ello, $\sum_{i=1}^{n} u_i = c(N) = X$ (14).

— A todo vector de reparto $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ que cumpla las dos condiciones anteriores, le denominaremos «imputación» (15), siguiendo la terminología de la teoría de juegos (16).

---

(13) Cuando se da esta condición se dice que «el reparto es individualmente racional».

(14) A esta condición se le denomina «optimalidad de Pareto».

(15) Nuestro concepto «imputación» no coincide exactamente con el definido por la teoría de juegos. Esto es debido a que nuestro planteamiento está basado en una función característica definida en términos de costes y no en términos de beneficios. La razón fundamental por la cual seguiremos utilizando el término imputación, y no otro paralelo, es que con el mismo recogemos la idea de un reparto mínimamente satisfactorio.

El concepto imputación puede consultarse en EKELAND, I.: *La théorie des jeux et ses applications a l'économie mathématique*. París. Ed. Press Universitaires de France. 1974, págs. 57-58.

(16) Por lo expuesto en la cita 15, en los apartados sucesivos utilizaremos la misma terminología de la teoría de juegos. No obstante, conviene precisar que al trabajar en términos de costes en lugar de beneficios, los planteamientos clásicos de la teoría de juegos sufrirán determinadas modificaciones que iremos incluyendo paulatinamente. Omitiremos las demostraciones entre estas equivalencias, puesto que las mismas son casi paralelas.

4. APORTACION DE LA TEORIA DE JUEGOS AL REPARTO DE COSTES COMUNES

4.1. PROPUESTA DE MORIARITY

El método que pasamos a desarrollar no se incluye, con generalidad, en las soluciones basadas en la teoría de juegos, sino que se engloba dentro de lo que anteriormente hemos denominado «métodos pragmáticos». Sin embargo, debido a que la propuesta sugerida se encuentra desarrollada sobre uno de los conceptos más destacables de la teoría de juegos (17), pensamos que es válida su inclusión como punto de partida hacia otras propuestas más desarrolladas.

Como señala Moriarity, la razón que justifica la existencia de costes comunes no es otra que el ahorro de costes que se produce con la utilidad de los mismos (18). Por ello, cada portador de costes debe beneficiarse del susodicho ahorro. De este modo, siguiendo la nomenclatura expuesta anteriormente, el ahorro de costes vendrá dado por:

$$Y = C - X$$

La relación de los costes de cada división con respecto a los costes totales será:

$$\frac{c_i}{\sum_{i=1}^{n} c_i} = \frac{c_i}{C}$$

La propuesta de Moriarity consiste en asignar a cada departamento una parte del ahorro generado, en función de la incidencia de los costes individuales de una determinada división con respecto a los costes totales:

$$\text{Ahorro por división} \quad \frac{c_i}{C}\,(C - X)$$

De este modo, tras deducir el ahorro de costes, tendremos un coste imputado a cada división expresado del siguiente modo:

$$c_i - \frac{c_i}{C}\,(C - X) = C_i\,\frac{X}{C}$$

(17) Nos referimos al concepto de «ahorro de costes».

(18) MORIARITY, S.: «Another approach to allocating joint costs». *The Accounting Review*. Octubre 1975, pág. 792.

Con este método, siempre existen determinadas ventajas que conducen a la cooperación conjunta. Sin embargo, pensamos que no existe motivación en cuanto a la reducción individual de costes ya que el beneficio, asignado en función del coste, se reparte en función directa a los costes específicos (19).

4.2. El núcleo

Puesto que nos encontramos realizando una aplicación de los juegos *n*-personales cooperativos a un problema de contabilidad interna, podemos recoger todas las soluciones presentadas por la teoría de juegos al respecto y adaptarlas al caso expuesto. No obstante, y dada la poca relevancia que muestran algunas de ellas, pensamos que posee un mayor interés la exposición de una selección de las mismas que aporte soluciones válidas al problema del reparto de costes.

Dentro de las soluciones seleccionadas, pasamos a desarrollar el núcleo, que aunque individualmente tiene sentido por sí mismo, nos servirá con posterioridad, como base de referencia de las otras soluciones que presentaremos, debido a las conclusiones que de ella deducimos.

Con el fin de que todo reparto que se proponga sea aceptado por todas las divisiones, teniendo en cuenta las posibles coaliciones que se puedan formar, exigiremos que para que se acepte una imputación, ésta no deberá estar bloqueada por ninguna colación (20). Al conjunto de soluciones que no están bloqueadas por ninguna colación se le denomina «núcleo».

El cálculo de las imputaciones que están en el núcleo podemos determinarlo, de un modo sencillo, a través de la siguiente caracterización:

Una imputación «$\bar{u}$» está en el núcleo del juego si y sólo si $\forall S \in P(N)$ se cumple en $\sum_{i \in S} u_i \leq c(S)$ (21).

---

(19) El método de Moriarity es objeto de una réplica a través de la exposición de un ejemplo planteado por LOUDERBACK, J. G.: «Another approach to allocating joint costs: A comment». *The Accounting Review*. Julio 1976, págs. 683-685.

No obstante, este autor aplica de un modo indebido el modelo de Moriarity, por lo que este último reafirma su método en: MORIARITY, S.: «Another approach to allocating joint costs: A Reply». *The Accounting Review*. Julio 1976, págs. 686-687. Existe una conjunción de ambos procedimientos en BALACHANDRAN, B. V., y RAMAKRISHMAN, R. T.: «Joint cost allocation: A unified approach». *The Accounting Review*. Enero 1981, págs. 85-96.

(20) Una coalición *S*, se dice que «bloquea una determinada imputación» cuando los miembros qe constituyen dicha coalición se encuentran en una situación más ventajosa que la resultante de la imputación, siempre que se forme esa coalición y se repartan entre sus divisiones el ahorro de costes generado. Es decir. *S* bloquea a la imputación $\bar{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ $\forall i \in S / u_i^S < u_i \sum_{i \in S} u_i' = c(S)$.

(21) Una demostración equivalente a ésta se encuentra desarrollada en EKELAND, I.: *Ob. cit.*, págs. 58-59. No obstante, dicho autor desarrolla su exposición en términos de beneficios, pero nosotros la hemos adaptado mostrándola en términos de costes.

Dada una imputación del núcleo (22), no existen razones que justifiquen la creación de subcoaliciones entre las divisiones de la empresa. Ello se debe a que si se forma la coalición S, las divisiones componentes se repartirán el coste $c(S)$ tal que $\sum_{i \in S} u_i = c(S)$. Estas mismas divisiones en el reparto propuesto por el núcleo tendrán un coste u_i de modo que $\sum_{i \in S} u_i \leq c(S)$.

Esto permite afirmar que a las divisiones que forman la colación S les interesa aceptar el reparto del núcleo, ya que:

— Si $\sum_{i \in S} u_i = c(S)$, implica que a todas las citadas divisiones les sería indiferente aceptar el reparto del núcleo o formar la coalición (23).

— Si $\sum_{i \in S} u_i < c(S)$, implica que las divisiones de la colación S soportan un coste menor aceptando, por tanto, el reparto del núcleo.

Existe gran cantidad de juegos, en los que el núcleo no es vacío. En tales casos, y por todo lo expuesto, aceptaremos su solución como aquella que nos asegura un reparto satisfactorio para todas las divisiones. No obstante, pueden presentarse, juegos en los que el núcleo sea vacío. En dichas situaciones, intentaremos buscar soluciones alternativas que resuelvan nuestro problema.

4.3. ϵ - NÚCLEO

Dentro de las soluciones aportadas por la teoría de juegos, y que pueden transcribirse fácilmente en instrumentos de asignación satisfactoria de los costes comunes entre las divisiones de la empresa, vamos a referirnos a una de ellas, que a pesar de no ser considerada, con generalidad, como una de las vías más claras para resolver problemas de distribución, pensamos que su utilización aporta una visión interesante al mismo.

La solución propuesta por este método abarca dos problemas muy diferenciados entre sí. Esta distinción la hemos efectuado tomando como base la exposición mostrada por Shubik (24). Dichos apartados son los siguientes:

a. *Núcleo vacío*

Existen determinados casos en los que el núcleo del juego propuesto es vacío. En tales circunstancias, podemos aplicar una serie de procedimientos que nos conducen a la existencia del núcleo.

---

(22) Siguiendo a Jensen, a toda imputación que esté en el núcleo, se le denomina «reparto mutuamente satisfactorio». JENSEN, D. L.: «A class of mutually satisfactory allocations». *The Accounting Review*, Octubre 1977, págs. 842-856.

(23) Esta afirmación debe entenderse en sentido global, puesto que puede ocurrir que una determinada división tenga un coste menor si está en la coalición S, a cambio de incrementar los costes de otra división de S.

(24) SHUBIK, M.: «Game theory models and methods in political economy», en ARROW, K. J., e INTRILIGATOR, H. D.: «Handbook in economics». *North Holland* 1981, pág. 305.

Como sabemos, una imputación $\vec{u}$ está en el núcleo cuando se cumple que:

$$\sum_{i \in S} u_i \leq c(S) \text{ (25)}$$

Por tanto, si el núcleo es vacío se verifica para toda imputación $\vec{u}$ que existe al menos un $S \in P(N)$ tal que $\sum_{i \in S} u_i > c(S)$. Un procedimiento para que aparezcan imputaciones en el núcleo consistirá en aumentar el término $c(S)$ de modo que logremos que se cumpla la condición necesaria para que exista núcleo. Para ello, introducimos una constante «ϵ», con significado económico propio y que posteriormente concretaremos para nuestro caso, de modo que (26):

$$\sum_{i \in S} u_i \leq c(S) + \epsilon \qquad \forall S \in P(N)$$

Obsérvese que en las colaciones, S', en las que se cumplía $\sum_{i \in S'} u_i \leq c(S')$ también se cumple $\sum_{i \in S'} u_i \leq c(S') + \epsilon$.

El problema planteado puede resolverse aplicando programación lineal, quedando formulado el programa del siguiente modo:

$$\text{Min } \epsilon$$

$$\sum_{i \in S} u_i \leq c(S) + \epsilon \qquad \forall S \in P(N)$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = c(N)$$

b. *Núcleo no trivial*

Puede suceder que en el problema inicial el núcleo lo formen muchas imputaciones, es decir, que existan muchos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ que cumplan que $\sum_{i \in S} u_i \leq c(S)$.

En un deseo de reducir el conjunto de imputaciones en el núcleo, podemos reformular el problema anterior. Para ello, utilizaremos la constante ϵ, de modo que nos enfrentaremos a un problema del siguiente tipo:

$$\text{Max } \epsilon$$

---

(25) Esta relación se dará en el supuesto de hablar de reparto de costes y no de ahorro de costes. En este último caso, debería cumplirse $\sum_{i \in S} u_i \geq c(S)$.

(26) Obsérvese que el problema inicial queda reformulado en un nuevo problema, en el cual ya existe el núcleo.

sujeto a

$$\sum_{i \in S} u_i \leq c(S) - \epsilon \qquad \forall S \in P(N)$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = c(N)$$

Observemos que la solución obtenida de este problema no tiene por qué resultar una única imputación, sino que pueden existir un número de imputaciones que serán cuantitativamente inferiores a las obtenidas con el problema inicial. La obtención de una u otra solución dependerá, evidentemente, del problema planteado.

4.4. El Nucleolo

Otra de las soluciones propuestas para la resolución de juegos n-personales fue introducida por Schmeridler (27) a través del concepto del «nucleolo».

Planteamos el problema definiendo:

$$e(x, S) = c(S) - \sum_{i \in S} x_i$$

donde:

x es un vector imputación.

$e(x, S)$ mide el «grado de aceptación» de la coalición S con respecto a la imputación x.

Detallemos, en primer lugar, el sentido de «grado de aceptación».

Cuando $e(x, S) \geq 0$, se cumple que $c(S) \geq \sum_{i \in S} x_i$. Esto muestra que los miembros de S aceptan el reparto propuesto, de modo que el coste asignado por el vector imputación a los miembros de S es menor que el que hubieran obtenido al formar la coalición S independientemente de las demás divisiones.

Cuando $e(x, S) \leq 0$, se cumple que $c(S) \leq \sum_{i \in S} x_i$. En este caso, el grado de aceptación sería nulo, puesto que las divisiones de S saldrían perjudicadas.

Para el cálculo del nucleolo, formaremos un vector $Z \in R^{2^n - 1}$, donde cada componente viene definido por $e(x, S) \, \forall S \in P(N)$, realizando una ordenación de las mismas siguiendo un orden creciente de aceptación.

Cada imputación dará lugar a un vector de $2^n - 1$ componentes, por lo que procederemos a realizar un orden lexicográfico (28), de modo que selec-

(27) LITTLECHILD, S. C.: «A simple expression for the nucleolus in a special case». *Int. Journal of game theory*. Vol. 3, 1974, pág. 21.

(28) Dados dos vectores Z_i y Z'_i tal que $Z = (Z_1, Z_2, ..., Z_{2n-1})$ $Z' = (Z'_1, Z'_2, ..., Z'_{2n-1})$ se dice que el vector Z es mayor o igual que Z' siguiendo un orden lexicográfico si y sólo si existe un $1 \leq m \leq n$ tal que $\forall j \in \{1, 2, ..., m\}$ $Z_j = Z'_j$ y para $i = m + 1$ $Z_i > Z'_i$.

cionaremos aquella imputación cuyo vector Z asociado sea máximo con respecto a la ordenación efectuada.

Al vector imputación resultante se le denomina nucleolo, pudiendo aplicarse para su resolución el algoritmo de Kopelowitz (29). Como características más significativas del nucleolo señalaremos que su solución es única, y siempre está incluida en el núcleo cuando éste no es vacío. No obstante, si el núcleo es vacío, el reparto propuesto por el nucleolo es una imputación satisfactoria.

4.5. VALOR DE SHAPLEY

L. Shapley (30) propuso un método para determinar el valor para cada jugador en un juego n-personal, basándose en la función característica y haciendo abstracción de otros factores (31).

La aplicación del denominado «valor de Shapley» a los problemas contables fue introducida por Shubik (32) al considerar la incidencia de esta aproximación en la asignación de costes conjuntos (33).

La propuesta planteada por Shapley es la más utilizada por los autores que han trabajado el tema del reparto de costes a través de la teoría de juegos. Su justificación se encuentra en que cumple las condiciones deseables de cualquier reparto satisfactorio, en la mayoría de las ocasiones.

El método de Shapley (34) reparte los costes según el incremento de beneficio que aporta cada división a la coalición del modo siguiente:

$$u_i = \sum_{S \in P(N)} \frac{(s-1)!\,(n-s)!}{n!} \left[c(S) - c(S-i) \right] \qquad i = 1, ..., n$$

donde:

S representa una determinada coalición.

s número de divisiones que integran la coalición S.

---

(29) Puede consultarse un desarrollo de este algoritmo en LITTLECHILD, S. C.: *Ob. cit.*, págs. 22-23.

(30) SHAPLEY, L. S.: «A value of n-person games», in KUHN, H. W., y TUCKER, A. W.: *Contributions to the Theory of games*. Princeton University Press, 1953, págs. 307-317.

(31) Puede consultarse al respecto DAVIS, M.: *Teoría de juegos*. Madrid, Alianza, 3.ª ed., 1979.

(32) SHUBIK, M.: «Incentives, decentralized control, the assignment of joint costs and internal pricing». *Management Science*. Abril 1962, págs. 325-343.

(33) La exposición de Shubik ha sido ampliada por ANTON, H. R.: «Discussion: the budgetary process and Management Control», in BONINI, C. P.; JAEDICKE, R. K., y otros: «Management Controls: New Directions in Basic Research». *McGraw Hill*, 1964, págs. 227-236. Del mismo modo, existe una breve exposición al plantear el tema de los precios de transferencia en ABBEL-KHALIK, A. R., y LUSK, E. J.: «Transfer pricing: A synthesis». *The Accounting Review*. Enero 1974, págs. 8-23.

(34) Puede consultarse una exposición del mismo en: JENSEN, D. L.: *Ob. cit.* CALLEN, J.: «Financial cost allocations: a game theoretic Approach». *The Accounting Review*. Abril 1978, págs. 303-308.

Vamos a efectuar un análisis de la expresión propuesta por Shapley:

El término $c(S) - c(S - i)$ puede tener dos aceptaciones:

— la primera de ellas se basa en el supuesto de considerar que la división «*i*» no forma parte de la coalición *S*. En tal caso, $c(S) = c(S - i)$ y, por tanto, el término analizado será cero.

$$c(S) - c(S - i) = 0$$

Este caso indica que la división *i* no aporta ningún coste a la coalición.

— la segunda aceptación considera que la división i forma parte de la coalición *S* objeto de estudio. En tal caso,

$$c(S) - c(S - i) \geq 0$$

que indica el incremento de costes que supone la incorporación de la división *i* a la coalición $S' = \{ S - i \}$.

Como puede observarse, el reparto está en función del coste generado a través de la expresión $c(S) - c(S - i)$. Dicho reparto se asignará por medio de la proporción:

$$\frac{(s - 1)!\ (n - s)!}{n!}$$

donde $(s - 1)!$ indica el número de permutaciones que se pueden formar con $(s - 1)$ división, excluida la división *i*; $(n - s)!$ es el número de permutaciones de las divisiones que no están en la colación *S*; n! es el número de permutaciones que se pueden formar con las *n* divisiones.

Al considerar en el cociente anterior la relación entre casos favorables de que la división *i* aparezca en el lugar «*s*» y casos posibles, estamos refiriéndonos al concepto de probabilidad. En todas las situaciones, abordamos la inclusión de la división en el lugar «*s*», cada alternativa se supone equiprobable, ponderándola adecuadamente según la expresión utilizada (35).

Por todo lo señalado, podemos afirmar que aunque el reparto de Shapley cumple las condiciones de un buen reparto, no permite ninguna flexibilidad a la dirección en cuanto a la asignación de costes, puesto que presenta un único esquema de reparto.

Del mismo modo, el análisis de Shapley puede resultar laborioso cuando el número de divisiones que formar en juego es muy elevado. En tales casos, existen algoritmos desarrollados que agilizan su cálculo (36).

(35) Puede consultarse una aplicación del valor de Shapley a un caso concreto en LITTLECHILD, S. C., y OWEN, G.: «A simple expression for the Shapley value in a special case». *Management Science*. Noviembre 1973, págs. 370-372.

(36) Puede consultarse al respecto: MEGIDO, N.: «Computational complexity of the game theory approach to cost allocation for a tree». *Mathematics of Operations Research*. Agosto 1978, págs. 189-196.

Para terminar, señalaremos que el valor de Shapley es considerado como un instrumento útil en una toma descentralizada de decisiones (37) e igualmente dicho reparto satisface las condiciones de núcleo para gran parte de los problemas de asignación de repartos comunes (38), aunque existen casos en los que no pertenece al núcleo.

El esquema propuesto hasta ahora de la aproximación de Shapley podríamos denominarlo «reparto simple de Shapley». Su determinación nos ha lleva a la conclusión de que su valor no siempre se encuentra en el núcleo, por lo que pueden formarse subcoaliciones que actuando independientemente incrementen los costes totales de la empresa. Reulta evidente que esta actuación afectaría a los resultados potenciales de la empresa de un modo negativo, lo que plantea como insatisfactorio el reparto de costes propuesto.

Por ello, y en un deseo de lograr que la solución a la que lleguemos reúna las condiciones del núcleo, Hamlen, Hamlen y Tschirhart (39) proponen una generalización del reparto anterior (40). Para ello, proponen la modificación de dos de los axiomas básicos, pero tomados de uno en uno, de modo que se mantengan el resto de hipótesis invariables.

En uno de los casos planteados por dichos autores rechazan la ponderación de Shapley y proponen su sustitución por un cociente que muestre la relación entre las demandas individuales de las divisiones con respecto a la demanda total (41). Esto nos permite pensar que, al igual que los autores examinados consideran las demandas a la hora de calcular la ponderación, nosotros podríamos referirnos a cualquier otro concepto que tenga una importancia relevante dentro del tema que nos ocupa. Por ello, desde nuestro punto de vista, si sustituyésemos la anterior relación por la existente entre los costes individuales de una sección con respecto a los totales, obtendríamos un cociente que se aproximaría más fielmente a nuestro planteamiento. No obstante, pensamos que la ponderación obtenida mostraría gran similitud con la propuesta por Moriarity, lo que asemejaría ambas soluciones.

La segunda modificación propuesta por Hamlen, Hamlen y Tschsirhart (42) es la determinación de las ponderaciones de modo que todas ellas sean iguales. De esta forma, cada división recibiría una parte de las contribuciones residuales efectuadas por las coaliciones a las que pertenece. No obstante, a pesar de que esta visión simplifica el reparto, no muestra bases con rigor que permitan su aceptación.

---

(37) HAMLEN, S.; HAMLEN, W., y TSCHIRHART, J.: «The use of core Theory in evaluating joint cost allocation schemes». *The Accounting Reiew*. Julio 1977, pág. 624.

(38) Posteriormente critican dicho procedimiento sugiriendo una generalización del mismo a través de los axiomas de Loehman y Whinston. Su reparto es tal que requiere sólo el axioma de aditividad.

(39) HAMLEN, S.; HAMLEN, W., y TSCHIRHART, J.: «The use of the generalized Shapley Allocation in joint cost allocation». *The Accounting Review*. Abril 1970, págs. 269-287.

(40) Su propuesta se encuentra basada en los axiomas de Loehman y Winston.

(41) HAMLEN, S.; HAMLEN, W., y TSCHIRHART, J.: *Ob. cit.*, año 1980, págs. 276-277.

(42) HAMLEN, S.; HAMLEN, W., y TSCHIRHART, J.: *Ob. cit.*, año 1980, págs. 277-279.

5. ANALISIS COMPARATIVO DE LAS SOLUCIONES PLANTEADAS

Las soluciones mostradas en el apartado anterior suponen una selección representativa de todas las existentes en juegos *n*-personales cooperativos.

Debido a las peculiaridades de cada una de ellas, podemos agruparlas en dos apartados:

— El primero de ellos recoge aquellas soluciones que utilizan un determinado «factor de ponderación» a la hora de la asignación de costes. Dentro de este apartado agruparíamos la propuesta de Moriarity y el valor de Shapley.

— El segundo grupo abarca métodos de reparto realizados por medio de imputaciones. En este apartado recogemos las soluciones de núcleo, nucleolo y ϵ-núcleo.

Esta clasificación no debe entenderse en sentido estricto, ya que existe una relación entre ambas (43). A este respecto, señalamos que la solución de Shapley cumple las propiedades del vector imputación.

La propuesta de Moriarity y la generalización del reparto de Shapley pueden plantear esquemas de asignación paralelos. Esta circunstancia se presentará cuando la distribución se realice utilizando la relación existente entre los costes individuales de una división y los costes totales de la empresa. Por ello, pensamos que el denominado «reparto generalizado de Shapley» propuesto por Hamlen, Hamlen y Tschirhart no es más que una aproximación a la solución ya expuesta por Moriarity.

Esquemáticamente, la comparación entre la solución de Moriarity y el reparto de Shapley podemos representarla del siguiente modo:

Concepto	Moriarity	Shapley
— Ahorro de costes total	$C - X$	$C - X$
— Ponderación del ahorro de costes	$\frac{c_i}{C}$	$\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$
— Reparto de costes a la división *i*	$c_i - \frac{c_i}{C}(C-X)$	$\sum_{S \in P(N)} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}[c(S)-c(S-i)]$

El segundo de los grupos presentados abarca las soluciones relacionadas con las imputaciones. Puesto que su exposición analítica ya se ha realizado

(43) Gonzalo Angulo realiza una demostración de cuándo la propuesta de Moriarity y el valor de Shapley están en el núcleo. GONZALO ANGULO, J. A.: *Modelos normativos para el cálculo y el control de costes en la empresa*. Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Madrid, 1979, págs. 209-212 y 219-220.

en apartados anteriores, procederemos a desarrollar las relaciones que existen entre ellas, tomando como punto de referencia el núcleo.

Sabemos que si existe núcleo, todo vector que esté en él cumple que $\sum_{i \in S} u_i \leq c(S)$, o, lo que es lo mismo, que $c(S) - \sum_{i \in S} u_i \geq 0$. A partir de esta imputación podemos construir un vector Z de $2^n - 1$ componentes, ordenados de forma creciente, en el cual por definición, las mismas serán mayores o iguales que cero. Como el nucleolo consiste en elegir un vector x de modo que el vector Z asociado sea maximal con respecto al orden lexicográfico, resulta evidente que el vector elegido pertenece al núcleo.

En el supuesto de que no exista núcleo, el razonamiento anterior no tiene sentido, por lo que en este caso, el nucleolo resulta una alternativa a tener en cuenta.

Con respecto al nucleolo, conviene también realizar una reflexión en relación a los componentes de cada vector Z. El primer componente de Z está formado por $e(x, S) = c(S) - \sum_{i \in S} u_i$ de modo que dicho valor sea menor o igual que $e(x, S') \forall S' \epsilon P(N) \wedge S' \neq S$. Esto indica, como vimos anteriormente, el grado de aceptación de la coalición S. El orden lexicográfico nos conduce a maximizar este primer componente, representando el mismo a la coalición más desfavorecida. Por ello, podemos concluir afirmando que con el nucleolo se intenta mejorar, a las coaliciones más descontentas con orden prioritario respecto a las más favorecidas.

En relación con la solución mostrada por ϵ-núcleo, conviene realizar un análisis del valor ϵ dentro de nuestro contexto. El valor ϵ lo podemos entender, en nuestro caso, como incentivos o penalizaciones creados por la dirección central. Al iniciar el estudio de este tema, planteamos como hipótesis de partida el hecho de que debían repartirse todos los costes comunes, sin incurrir, en ningún momento, en un exceso o defecto en dicho reparto. No obstante, creemos que la inclusión de este método, a pesar de lo apuntado, permite obtener una visión más amplia de la empresa y de la descentralización en la toma de decisiones. Por ello, pensamos que ϵ puede reflejar las bonificaciones o penalizaciones impuestas por la central en pro a la consecución de un reparto de costes satisfactorio (44).

Una vez expuesto el sentido de ϵ, queremos realizar un análisis del método de reparto ϵ-núcleo que nos permita extraer ciertas conclusiones. Para ello, distingamos dos casos:

a.—Puede suceder que al determinar el ϵ-núcleo, obtengamos una sola imputación; deducida del problema de programación lineal planteado. Debido a la coincidencia de este programa con el primer paso del algoritmo de Kopelowitz para el cálculo del nucleolo, tenemos:

(44) Existen otras soluciones de juegos n-personales aplicados al reparto de costes. A este respecto, pueden consultarse los métodos «nucleolo proporcional» y «nucleolo disruptive», en LEMAIRE, J.: «An application of game theory: cost allocation». *Astin Bulletin*. Vol. 14, n.º 1, 1984, págs. 71-72.

ϵ-núcleo

$$\text{Max } \epsilon$$

$$\epsilon \leq c\,(S) - \sum_{i \in S} u_i$$

$$u_i = c\,(N)$$

Kopelowitz

Primer paso:

$$\text{Max } K$$

$$K \leq c\,(S) - \sum_{i \in S} u_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = c\,(N)$$

En el supuesto de unicidad del ϵ-núcleo el algoritmo de Kopelowitz concluye, ya que en el caso de que existan infinitas soluciones procederíamos a efectuar el paso 2.

Segundo paso:

$$\text{Max } K$$

Sujeto a: $\forall S \in I_1$

siendo $I_1 = \{ S \in P\,(N) / K_1 = c\,(S) - \sum_{i \in S} u_i \}$

$$K_1 = c\,(S) - \sum_{i \in S} u_i$$

$$K \leq c\,(S) - \sum_{i \in S} u_i \qquad \forall\ S \quad \epsilon \quad P\,(N) - I_1$$

$$\sum_{i \in S} u_i = c\,(N)$$

llamando a K_1 el máximo calculado en el paso 1, lo que muestra la coincidencia de ϵ-núcleo con el nucleolo cuando el primero de ambos permite obtener una única imputación.

b.—En este segundo caso consideramos que en la determinación del ϵ-núcleo nos aparecen infinitas soluciones. En este caso, el nucleolo será una imputación que pertenece al conjunto deducido del ϵ-núcleo.

Por todo lo apuntado, gráficamente la relación existente entre las soluciones planteadas, podría representarse, en el supuesto de que el núcleo no fuese vacío.

6. UN EJEMPLO DE APLICACION

Vamos a exponer un ejemplo de aplicación que permita observar, de un modo sencillo, cuál sería la asignación de costes comunes propuesta siguiendo las directrices mostradas por cada una de las soluciones anteriores.

Supongamos que la empresa Delta desea acceder a un servicio de publicidad ofrecido por la empresa Alfa.

La estructura organizativa interna de Delta consta de tres departamentos (1, 2, 3), cada uno de los cuales elabora un producto concreto.

Las tres divisiones desean llevar a cabo una campaña publicitaria que eleve las ventas de los mismos. Se sabe que si cada división decidiese afrontar individualmente la campaña de sus productos, los costes en que incurrirían son:

$c(1) = 5.000$
$c(2) = 3.000$
$c(3) = 7.000$

Del mismo modo, si decidiesen agruparse para acceder al citado servicio, formando coaliciones, los costes de cada posible coalición, se situarían en:

$c(1, 2) = 7.000$
$c(1, 3) = 10.000$
$c(2, 3) = 10.000$
$c(1, 2, 3) = 12.000$

Puesto que Delta se encuentra organizada bajo una estructura descentralizada, y ya que cada división debe analizar individualmente sus costes y sus ingresos, ¿cuál sería el reparto de costes comunes que debería hacerse entre las mismas?

Para ello, procedemos a la aplicación empírica de las soluciones desarrolladas en los apartados anteriores.

a.—*Propuesta de Moriarity*

Al formar las tres divisiones una coalición, incurrimos en el siguiente ahorro de coste:

$$Y = C - X = (5.000 + 3.000 + 7.000) - 12.000 = 3.000$$

De este modo, tendremos:

Divisiones	Ahorro de costes por departamento	Ctes. divisionales util. serv. comunes	Ctes. divisionales sin cooperación
1	$\frac{5.000}{15.000}$ 3.000 = 1.000	5.000—1.000 = 4.000	5.000
2	$\frac{3.000}{15.000}$ 3.000 = 600	3.000— 600 = 2.400	3.000
3	$\frac{7.000}{15.000}$ 3.000 = 1.400	7.000—1.400 = 5.600	7.000
	3.000	12.000	15.000

Resulta evidente la aplicación de esta propuesta ante cada una de las posibles coaliciones, por lo que obviaremos su cálculo.

b.—*El Núcleo*

El núcleo está formado por todos los vectores imputación, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)/$ tales que:

$$\sum_{i \in S} u_i \leq c(S) \quad \forall S \in P(N)$$

$$\sum_{i=1}^{3} u_i = c(N).$$

La adaptación a nuestro problema es la siguiente:

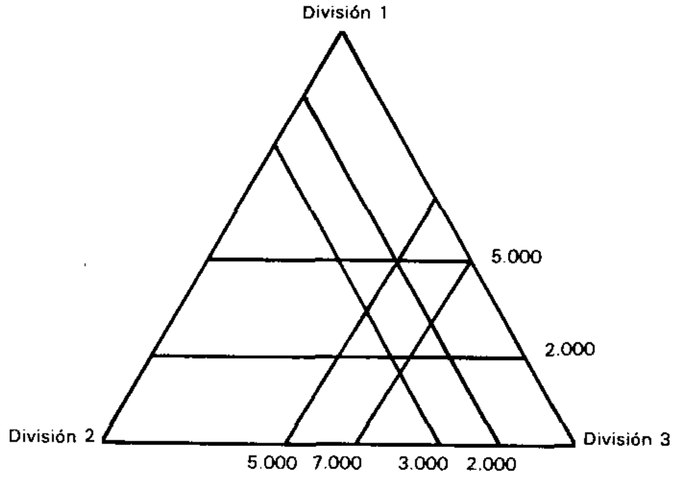
$$u_1 \leq 5.000$$
$$u_2 \leq 3.000$$
$$u_3 \leq 7.000$$
$$u_1 + u_2 \leq 7.000$$
$$u_1 + u_3 \leq 10.000$$
$$u_2 + u_3 \leq 10.000$$
$$u_1 + u_2 + u_3 = 12.000.$$

La resolución de las anteriores inecuaciones nos da como resultado las siguientes cotas:

$$2.000 \leq u_1 \leq 5.000$$
$$2.000 \leq u_2 \leq 3.000$$
$$5.000 \leq u_3 \leq 7.000$$

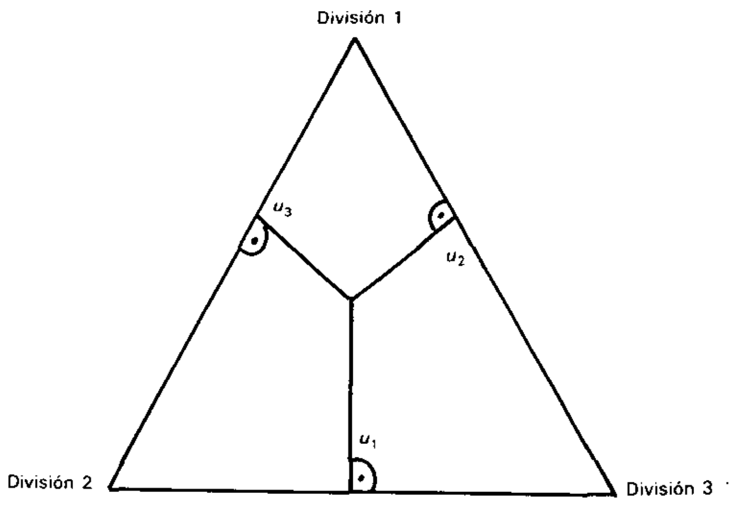
con la condición de que: $u_1 + u_2 + u_3 = 12.000$.

Como observamos, el problema presentado muestra un núcleo no vacío con infinitas imputaciones, cuya representación gráfica es la siguiente:



Analicemos con detalle la representación gráfica. En los juegos formados por tres jugadores cada imputación puede representarse mediante un punto interior a un triángulo equilatero cuya altura es *c (N),* debido a la propiedad de que la suma de las distancias de todo punto interior de un triángulo equilatero a cada uno de los lados es constante e igual a su altura.

El coste asignado a la división *c (i), i* = 1, 2, 3, se representa por un punto interior a un triángulo equilatero cuya distancia al lado opuesto del vértice i nos mide *c (i).* De este modo, en el siguiente gráfico:



se representa por $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ un vector imputación en donde u_1 nos mide el coste asignado a la división 1, u_2 el asignado a la división 2 y u_3 el de la división 3, tal que $u_1 + u_2 + u_3 = c\,(N)$, siendo $c\,(N)$ la altura del triángulo equilatero.

c.—ϵ-*Núcleo*

Tal y como hemos observado en la solución del núcleo, existen infinitas imputaciones dentro de él. A través del ϵ-núcleo se pueden reducir las mismas con el empleo del término ϵ.

El problema queda presentado del siguiente modo:

Max ϵ

Sujeto a: $\sum_{i \epsilon S} u_i \leq c\,(S) - \epsilon$. $\quad \forall S \epsilon P(N)$

$\sum_{i=1}^{3} u_i = c\,(N)$

Siendo $u_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, 3.$

En nuestro caso concreto, se debe resolver:

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } \epsilon \\
&\text{sujeto a:} \\
u_1 &\leq 5.000 - \epsilon \\
u_2 &\leq 3.000 - \epsilon \\
u_3 &\leq 7.000 - \epsilon \\
u_1 + u_2 &\leq 7.000 - \epsilon \\
u_1 + u_3 &\leq 10.000 - \epsilon \\
u_2 + u_3 &\leq 10.000 - \epsilon \\
u_1 + u_2 + u_3 &= 12.000 \\
u_i \geq 0 \quad i &= 1, 2, 3.
\end{aligned}
$$

Para resolver este problema de programación lineal mediante el método de las penalidades, se introducen las variables de holgura y la variable artificial, quedando el problema modificado del siguiente modo:

$$
\begin{aligned}
\text{Max } \quad \epsilon + M u_1^a \; &/ \; M \epsilon R^- \\
u_1 + u_1^h &= 5.000 - \epsilon \\
u_2 + u_2^h &= 3.000 - \epsilon \\
u_3 + u_3^h &= 7.000 - \epsilon \\
u_1 + u_2 + u_4^h &= 7.000 - \epsilon \\
u_1 + u_3 + u_5^h &= 10.000 - \epsilon \\
u_2 + u_3 + u_6^h &= 10.000 - \epsilon \\
u_1 + u_2 + u_3 + u_1^a &= 12.000
\end{aligned}
$$

$$u_i^h \geq 0 \qquad i = 1, 2, 6 \qquad u_1^a \geq 0 \qquad u_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, 3$$

La resolución de este problema nos permite obtener en la tabla sexta la solución óptima ($u_i = 4.000$, $u_2 = 2.500$, $u_3 = 5.500$), y en la tabla séptima, la solución: ($u_1 = 3.000$, $U_2 = 2.500$, $u_3 = 6.500$).

Obsérvese que la solución es de arista, lo que implica múltiples soluciones. De este modo, hemos conseguido acotar las imputaciones del núcleo, obteniendo las siguientes imputaciones:

$$d(3.000,\ 2.500,\ 6.500) + (1\text{-}d)\ (4.000,\ 2.500,\ 5.500) =$$
$$= (u_1,\ u_2,\ u_3)$$

para todo $d \in [0,1]$.

Aunque se ha reducido el conjunto de imputaciones siguen existiendo infinitas soluciones.

d.—*El Nucleolo*

Para calcular el nucleolo, siguiendo la exposición efectuada anteriormente, debemos resolver el problema de programación lineal:

Max δ

sujeto a:

$$c(S) - \sum_{i \in S} u_i \geq \delta \qquad \forall S \in P(N)$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = c(N)$$

$$u_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, 3.$$

En nuestro caso, tendremos:

Max δ

$$5.000 - u_1 \geq \delta$$
$$3.000 - u_2 \geq \delta$$
$$7.000 - u_3 \geq \delta$$
$$7.000 - u_1 - u_2 \geq \delta$$
$$10.000 - u_1 - u_3 \geq \delta$$
$$10.000 - u_2 - u_3 \geq \delta$$

$$u_1 + u_2 + u_3 = 12.000$$
$$u_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, 3.$$

Dada la similitud con el problema planteado en la resolución del ϵ-núcleo, sabemos que es una solución de arista dada por la envoltura lineal convexa de los puntos: ($u_1 = 4.000$, $u_2 = 2.500$, $u_3 = 5.500$) y ($u_1 = 3.000$, $u_2 = 2.500$, $u_3 = 6.500$), siendo $\delta = 5.00$. Puesto que la solución no es única debemos proceder a aplicar el segundo paso del algoritmo de Kopelowitch:

Para ello partimos de la solución ($u_1 = 4.000$, $u_2 = 2.500$, $u_3 = 5.500$ y $\delta = 500$) modo que I_1 está formado por las coaliciones: { {2} {1, 2} {1, 3} } ya

$$\begin{aligned} 3.000 - 2.500 = 500 = \delta &= 3.000 - u_2 \\ 7.000 - 4.000 - 2.500 = \delta &= 7.000 - u_2 - u_2 \\ 10.000 - 4.000 - 5.500 = \delta &= 10.000 - u_1 - u_3 \end{aligned}$$

debiendo resolver el siguiente problema:

$$\text{Max} \quad \delta$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{aligned} 5.000 - u_1 &\geq \delta \\ 7.000 - u_3 &\geq \delta \\ 10.000 - u_2 - u_3 &\geq \delta \\ u_1 + u_2 + u_3 &= 12.000 \\ 3.000 - u_1 &= 500 \\ 7.000 - u_1 - u_2 &= 500 \\ 10.000 - u_1 - u_3 &= 500 \\ u_i \geq 0 \qquad i &= 1,\ 2,\ 3. \end{aligned}$$

Resolviendo este problema obtenemos una única solución (45):

$$u_1 = 4.000, \qquad u_2 = 2.500 \text{ y } u_3 = 5.500$$

e.—*Valor de Shapley*

La asignación de Shapley, según el ahorro de costes que aporta cada división entra a formar parte en una coalición, nos permite obtener:

$$u_1 = (1/3)\,5.000 + (1/6)\,4.000 + (1/6)\,3.000 + (1/3)\,2.000 = \frac{21.000}{6} = 3.500$$

$$u_2 = (1/3)\,3.000 + (1/6)\,2.000 + (1/6)\,3.000 + (1/3)\,2.000 = \frac{5.000}{2} = 2.500$$

$$u_3 = (1/3)\,7.000 + (1/6)\,5.000 + (1/6)\,7.000 + (1/3)\,5.000 = 6.000 = 6.000$$

(45) La solución obtenida es independiente del punto de partida que se tome.

Como hemos expuesto anteriormente, todo valor de Shapley es una imputación, por lo que

$$\sum_{i=1}^{3} u_i = 12.000 = c(1, 2, 3).$$

Pasamos a realizar la comparación de las soluciones anteriores:

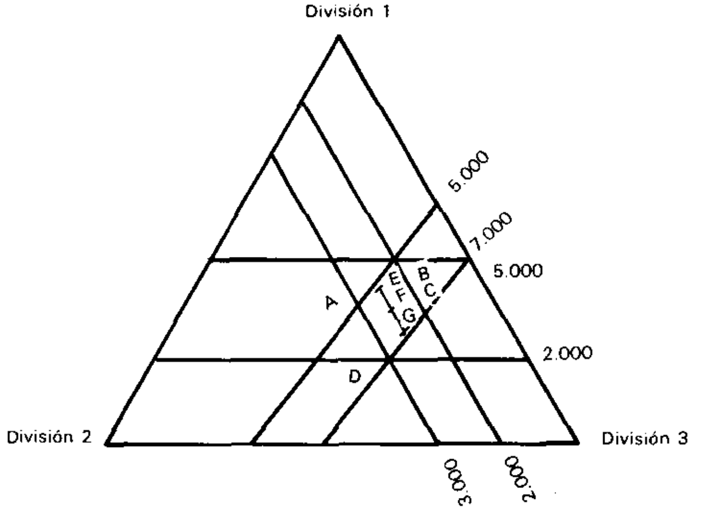
Ctes. asig. a divisiones / Solución	DIVISION 1	DIVISION 2	DIVISION 3
MORIARITY	4.000	2.400	5.600
NUCLEO $u_1+u_2+u_3=c(N)$	$2.000 \leq u_1 \leq 5.000$	$2.000 \leq u_2 \leq 3.000$	$5.000 \leq u_3 \leq 7.000$
ϵ-NUCLEO d [0,1]	4.000-1.000d	2.500	5.500 + 1.000d
NUCLEOLO	4.000	2.500	5.500
VALOR DE SHAPLEY	3.500	2.500	6.000

La comparación de las soluciones recogidas en el presente ejemplo nos permite poder reafirmar las conclusiones expuestas en el planteamiento teórico desarrollado anteriormente.

En el planteamiento del nucleolo vimos que el esquema de reparto propuesto mejoraba a la división que se encontraba en una situación más desfavorable. En este caso es a la división 3 a la que se le asigna un ahorro de costes mayor. Dentro de esta misma línea resaltamos la propuesta de Moriarity, la cual asigna un ahorro de costes superior a aquellas divisiones que tienen unos costes individuales mayores. Por ello, puesto que la división 3 representa aproximadamente el 47 por 100 de la suma de los costes individuales de los tres centros, se le asigna un ahorro de coste proporcionalmente superior que a las otras, de modo que dicho ahorro disminuye considerablemente los costes que se le han asignado.

Tal y como expuesto en el desarrollo analítico anterior, las soluciones propuestas por ϵ-núcleo y nucleolo, en el caso de que el núcleo no sea vacío, se encuentra incluido en el núcleo. El presente ejemplo pone de manifiesto dicha propiedad.

Si representamos gráficamente las anteriores soluciones tenemos:



El núcleo vendrá definido por el área ABCD.

El ϵ-núcleo reduce el área anterior y la sitúa en EFG.

El nucleolo vendrá definido por la imputación E.

El valor de Shapley lo constituye el reparto F.

BIBLIOGRAFIA

ABDEL-KHALIK, A. R., y LUSK, E. V.: «Transfer pricing: A synthesis». *The Accounting Review*. Enero 1974, págs. 8-23.

ANTON, H. R.: «Discussion: The budgetary process and management control», in BONINI, C. P.; JAEDICKE, R. K., y WAGNER, H. M.: «Management Controls. New Directions in Basic Research». *McGraw Hill,* 1964, págs, 227-236.

BALACHANDRAN, B. V., y RAMAKRISHMAN, R. T.: «Joint cost allocation: A unfied approach». *The Accounting Review*. Enero 1981, págs. 85-96.

CALLEN, J.: «Financial cost allocations: A game theoretic approach». *The Accounting Review*. Abril 1978, págs. 303-308.

CAÑIBANO, L., y MALLO, C.: «El cálculo de costes en la producción conjunta». *Revista Española de Financiación y Contabilidad*. Abril-junio 1974, págs. 99-123.

DAVIS, M.: *Teoría de juegos*. Madrid, Alianza, 1979 (3.ª ed.).

EKELAND, I.: *La theòrie des jeux et ses applications a l'économie mathématique*. París, Ed. Press Universitaires de France, 1974.

FERNÁNDEZ PIRLA, J. M.: *Teoría económica de la contabilidad*. Madrid, ICE 1970.

FERRARA, W. L.: *Responsibility Accounting: A basic control concept*, en THOMAS, W. E.: *Readings in cost accounting, budgeting and control.* Cincinnati, Ohio, South-Western Publishing 1973, págs. 60-72.

GONZALO ANGULO, J. A.: *Modelos normativos para el cálculo y el control de costes en la empresa.* Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Madrid, 1979.

HAMLEN, S.; HAMLEN, W., y TSCHIRHART, J.: «The use of core theory in evaluating joint cost allocation schemes». *The Accounting Review.* Julio 1977, págs. 616-627.

— «The use of the generalized Shapley allocation in joint cost allocation». *The Accounting Review.* Abril 1980, págs. 269-287.

HARTLEY, R. V.: «Decision making when joint products are involved». *The Accounting Review.* Octubre 1971, págs. 746-755.

JENSEN, D.: «A class of mutually satisfactory allocations». *The Accounting Review.* Octubre 1977, págs. 842-856.

KAPLAN, R. S., y THOMPSON, G. L.: «Overhead allocation via mathematical programming models». *The Accounting Review.* Abril 1971, págs. 352-364.

LEMAIRE, J.: «An application of game theory: cost allocation». *Astin Bulletin.* Vol. 14, n.º 1, 1984, págs. 61-81.

LITTLECHILD, S. C.: «A simple expression for the nucleolus in a special case». *Int. Journal of game Theory.* Vol. 3, 1974, págs. 21-29.

— y OWEN, G.: «A simple expression for the Shapley value in a special case». *Management Science.* Noviembre 1973, págs. 370-372.

LOUDERBACK, J. G.: «Another approach to allocating joint costs: A comment». *The Accounting Review.* Julio 1976, págs. 683-685.

LUCAS, W. F.: «An overview of the mathematical theory of games». *Management Science.* Enero 1972, págs. 3-19.

MEGIDO, N.: «Computational complexity of the game theory approach to cost allocation for a tree». *Mathematics of Operations Research.* Agosto 1978, págs. 189-196.

MORIARITY, S.: «Another approach to allocating joint costs». *The Accounting Review.* Octubre 1975, págs. 791-795.

— : «Another approach to allocating joint costs: A reply». *The Accounting Review.* Julio 1976, págs. 686-687.

SHAPLEY, L. S.: «A value of *n*-person games», in KUHN, H. W., y TUCKER, A. W.: «Contributions to the Theory of games». *Princeton Univesity Press*, 1953, págs. 307-312.

SHUBIK, M.: «Incentives, decentralized control, the assignment of joint costs and internal pricing». *Management Science.* Abril 1962, págs. 325-343.

— :«Game Theory models and methods in political economy», en ARROW, K. J., e INTRILIGATOR, H. D.: «Handbook in economics». *North Holland*, 1981, págs. 285-325.

THOMAS, A. L.: «The allocation problem in Financial Accounting Theory». *Studies in Accounting Research 3.* American Accounting Association 1969.

— : «The allocation problem: Part two». *Studies in Accounting Research 9.* American Accounting Association, 1974.

— : «On joint cost allocations». *Cost and Management.* Septiembre-octubre 1974, págs. 14-21.

VON NEUMANN, J., y MORGENSTEIN, O.: «Theory of games and Economic behaviour». *Princeton*, Princeton University, 1953.