Extrapolación, Interpolación y Filtraje

Por

Doctor Fco. JAVIER URBELZ IBARROLA

Catedrático de Estadística, Actuario.

1. INTRODUCCION

1.1. El presente trabajo está dedicado a conocer algunas de las aplicaciones del Análisis Espectral de las series temporales estacionarias.

Brevemente, de manera simple y a la vez rigurosa, exponemos la Teoría de la Extrapolación (predicción) para procesos estocásticos estacionarios.

Los fundamentos básicos del desarrollo de esta teoría se encuentran en las obras de Wiener, Kolmogorov, Doob, Yaglom, Ruzanov, etcétera, y exclusivamente dedico el capítulo VIII de mi tesis doctoral (1) al tema «Interpolación, Extrapolación y Filtraje», deduciendo fórmulas generales óptimas para extrapolar (o predecir) cuando se conoce el tipo de función de densidad espectral, según sea el proceso estocástico de parámetro (tiempo) discreto o continuo. Casos particulares de nuestras fórmulas concuerdan con ejemplos deducidos directamente por Wiener y Yaglom.

1.2. En un pequeño Apéndice se exponen las representaciones espectrales de los procesos estocásticos y las funciones de covarianza, así como las fórmulas de las funciones de densidad espectral y que el lector interesado puede completar estos conocimientos con la Bibliografía expuesta al final de este artículo.

1.3. Para comprender mejor los conceptos he creído conveniente la previa introducción de unas breves ideas sobre extrapolación, interpolación y filtraje, completadas con ejemplos aclaratorios de tipo lineal estudiados en el dominio del tiempo. Estimo los parámetros y determino las varianzas residuales de los errores de los casos propuestos.

---

(1) «Análisis espectral de procesos estocásticos estacionarios.» Tesis presentada en la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de Bilbao.

Estas consideraciones son el fundamento intuitivo para aplicar el Espacio estocástico de Hilbert (2) con carácter general a la «Teoría de la Extrapolación Lineal» de los procesos estocásticos de tipo estacionario y establecer las ecuaciones espectrales lineales que debe cumplir el predictor lineal óptimo.

La extrapolación lineal está relacionada íntimamente con la característica espectral de la extrapolación lineal, y ésta con la función de densidad del proceso estocástico.

1.4. Nuestro trabajo se centra en las predicciones de tipo lineal por las razones siguientes: La primera, la sencillez del cálculo. La segunda, más científica, es que todo proceso estocástico se considera como familia de variables aleatorias; y si la ley del proceso fuese normal, la esperanza de la componente a predecir en el tiempo $t+m\,(m>0)$ está condicionada por los valores del proceso en distintos momentos del tiempo precedentes y la esperanza matemática condicionada a estos valores que minimiza la varianza residual es de tipo lineal y, además, sigue la ley normal.

El parámetro t (tiempo) o $\{t \in T\}$ conjunto índice asociado a un proceso estocástico $\{\xi(t), t \in T\}$ determina una clasificación del proceso en discreto o continuo. Estos dos casos son los que estudiamos: generalmente las observaciones experimentales se recogen en datos equidistantes del tiempo o de manera continua.

A los procesos estocásticos de tipo discreto suelen denominarse sucesiones estacionarias (3), pero nosotros los denominaremos procesos de parámetro discreto.

La distinción de los procesos estocásticos estacionarios de tipo discreto o continuo es necesaria, porque la metodología y las fórmulas de extrapolación difieren sustancialmente.

1.6. En el caso de tiempo discreto, para obtener la mejor fórmula de extrapolación lineal, aplico la geometría de Hilbert y sigo en gran parte a Yaglom, trasladando al campo complejo las ecuaciones espectrales que debe cumplir la «característica espectral de la extrapolación». He deducido fórmulas muy generales para la obtención de esta característica espectral de la extrapolación y, en consecuencia, también para el predictor lineal óptimo si las funciones de densidades espectrales son de alguno de los tipos estudiados.

1.7. Si se conociese la función de densidad espectral de un proceso estocástico estacionario de tipo discreto $\{t \in Z\}$ la predicción lineal óptima puede:

a) Utilizar solamente n valores de la historia pasada no mejorando la

---

(2) Ver mi trabajo «Aplicaciones del Espacio de Hilbert a la Estadística.» Anales Instituto Actuarios, 1975.

(3) Kolmogorov, A. N.: «Sucesiones Estacionarias en los Espacios de Hilbert.» Trabajos de Estadística, 1959, dos números.

estimación de la predicción, aunque se poseyera más información. (Procesos Markovianos.)

b) Utilizar toda la historia o parte de ella para predecir el valor en el tiempo $t+m$ ($m \geqslant O$) dependiendo de m y de la función de densidad espectral cuando se precise toda o parte de la información pasada.

c) Utilizar siempre toda la historia pasada.

La función de densidad espectral se la supone racional en $e^{i\lambda}$ porque los modelos .autorregresivos, de medias móviles y mixtos tan utilizados en Econometría, sus densidades espectrales son racionales en $e^{i\lambda}$.

Esto nos permite dedicar una atención preferente a las funciones de densidad racionales en $e^{i\lambda}$, porque en definitiva, si conocemos su forma, el proceso pertenecerá a uno de los modelos indicados.

1.8. En el caso de parámetro t continuo, la mejor fórmula de predicción lineal de procesos estocásticos estacionarios se basa en la resolución de la ecuación integral de Wiener-Hopf, que, en el dominio de la frecuencia, trasladada al campo complejo, nos da las condiciones que debe reunir las funciones características espectrales. Hemos deducido fórmulas muy interesantes generalizadas para referida función y, en consecuencia, para expresiones analíticas de «extrapolaciones lineales», cuando se conocen las funciones de densidad espectrales de tipo racional.

Conviene señalar nuestra especial expresión de la característica espectral en forma de determinante y, en consecuencia, la predicción en el tiempo $t+m$ del proceso $\xi\ (t+m)$, está relacionado con los parámetros de la función de densidad espectral.

Estudiamos subcasos de procesos estocásticos estacionarios de parámetro continuo, según el tipo de función de densidad racional, y nos dan fórmulas de extrapolación lineales óptimas:

a) Utiliza para predecir $\hat{\xi}\ (t+m)$ ($m>0$) los valores que toma el proceso en el punto t, $n-1$ procesos formados por los procesos de derivadas sucesivas que toman en el punto t. (Procesos de Markov generalizados).

b) Utiliza los valores que toma el proceso en el punto t y derivadas en el mismo (igual que en el caso anterior) y, además, con integrales del proceso combinadas exponencialmente.

Los mencionados predictores lineales son óptimos y excusa decir la diferencia esencial existente en las fórmulas de extrapolación para procesos estocásticos estacionarios de parámetro t discreto o cuando t sea continuo, porque en este caso las fórmulas son muy complejas.

1.9. Para una mejor comprensión de la lectura de este artículo, aparte de las representaciones espectrales de procesos y de las funciones de covarianza, se precisa de los conocimientos de los desarrollos en serie de Laurentz y el teorema de residuos de las integrales de las funciones de variable compleja.

Las representaciones espectrales del proceso y de la función de covarianza como hemos indicado, se exponen sin demostración en el apéndice unido a este trabajo, así como otras representaciones útiles (4) para la mejor comprensión del trabajo.

1.10. La función de densidad espectral $f(\lambda)$ o su función de distribución permite conocer la estructura del proceso y $F(\lambda)$ nos indica la contribución a la varianza total del proceso hasta la frecuencia λ.

Si existiesen períodos puros, $dF(\lambda)$ tendría saltos en los puntos de discontinuidad del espectro y que proporcionaría un proceso de ciclos perfectamente conocidos. En las series económicas no sucede en general este caso y $f(\lambda)$ es de tipo continuo.

La aplicación a la Teoría de la predicción es tan importante en Econometría cuando se conoce la función de densidad espectral, que nos informa sobre el tipo de predictor lineal óptimo conociendo el espectro, pasando del campo de la frecuencia al campo del tiempo.

1.11. Recordemos finalmente que el estudio de las series temporales puede hacerse en el dominio del tiempo o en el de las frecuencias.

En el dominio del tiempo tiene el grave inconveniente de la irregularidad, que desaparece si se estudia la serie en el dominio de la frecuencia.

Sir Arthur Schuster fue el primero que introdujo su célebre periodograma para el estudio de las «periodicidades ocultas». Este periodograma está relacionado con el espectro, y aunque asintóticamente fuese centrado (previa corrección multiplicándolo por una constante), tenía el grave inconveniente de ser inconsistente, por lo que desgraciadamente era poco fiable.

Este artículo no está destinado a la estimación del espectro, y dejamos este problema (5) para otra ocasión.

Si se conoce la forma teórica del espectro, estudiaremos la predicción trasladando del dominio de frecuencias al dominio del tiempo, obteniendo fórmulas óptimas de predicción para los procesos estocásticos de tipo estacionario.

2. CONCEPTOS PREVIOS

2.1. *Definiciones.*

1.ª *Extrapolación.* Se denomina extrapolación o predicción a la estimación del valor futuro a partir de los datos disponibles del pasado.

2.ª *Interpolación.* Se denomina interpolación a estimar un valor comprendido entre los datos.

(4) Urbelz Ibarrola, F. J., o. c., págs. 332 y siguientes.

(5) Véase mi Tesis Doctoral citada.

3.ª *Filtraje*. Se denomina filtraje a la estimación de los datos de un proceso cuando existe error en la información que deseamos eliminar.

2.2. *Principio de ortogonalidad.*

Las estimaciones lineales se deducen de las condiciones de ortogonalidad del espacio de Hilbert y que proporcionan errores menores en sentido lineal.

2.3. *Predicción lineal simple.*

1. Para aclarar los conceptos expuestos supongamos que de un proceso

$$\{\xi(t), t \in T\} \qquad [1]$$

—discreto o continuo— deseamos predecir su valor en el tiempo $t+m$ cuando se conoce el valor en el tiempo t.

2. El planteamiento lineal más simple es:

$$\xi(t+m) = a\,\xi(t) + \varepsilon(t) \qquad \underset{\text{(a constante)}}{E\,\varepsilon(t) = 0} \qquad [2]$$

siendo $\varepsilon(t)$ un proceso incorrelacionado con $\xi(t)$. La estimación es:

$$\hat{\xi}(t+r) = a\,\xi(t) \qquad [3]$$

Por el principio de ortogonalidad indicado, tendremos:

$$E\left\{(\xi(t+m) - a\,\xi(t))\,\overline{\xi(t)}\right\} = E\left\{\varepsilon(t)\,\overline{\xi(t)}\right\} = 0 \Rightarrow$$

$$B(m) = \hat{a}\,B(o) \Rightarrow \quad \hat{a} = \frac{B(m)}{B(o)} \qquad [4]$$

recordando la fórmula [4] del apéndice de la función de covarianza.

3. La fórmula de predicción es:

$$\hat{\xi}(t+m) = \frac{B(m)}{B(o)}\,\xi(t) \qquad [5]$$

4. El error cuadrático es:

$$\sigma^2_m = E\left\{\xi(t+m) - \hat{a}\,\xi(t)\right\}\overline{\xi(t+m)} = B(o) - \hat{a}\,B(-m) =$$

$$= B(o) - \frac{|B(m)|^2}{B(o)} \qquad [6]$$

5. Todo proceso cuyo error [6] sea nulo, se denomina determinista. Esto significa que $\xi(t+m)$ puede predecirse exactamente por los elementos $\{\xi(t-h)\}$

2.4. *Filtraje lineal simple.*

1. En el caso de procesos

$$\{\xi(t), \quad \eta(t), \quad t \in T\} \tag{7}$$

discretos o continuos, y mutuamente estacionarios, deseamos determinar $\xi(t)$ en función del valor conocido $\eta(t)$ que contiene una información perturbadora que habremos de considerar.

2. La ecuación lineal más simple es:

$$\hat{\xi}(t) = a\,\eta(t) \tag{8}$$

y los procesos $\xi(t)$, y $\eta(t)$ están ligados por

$$\xi(t) = a\,\eta(t) + \varepsilon(t); \qquad E\,\varepsilon(t) = 0 \tag{9}$$

El error $\varepsilon(t)$ deber ser ortogonal a $\eta(t)$.

$$E\left[(\xi(t) - a\,\eta(t))\,\overline{\eta(t)}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{a} = \frac{B_{\xi\eta}(o)}{B_{\eta\eta}(o)} \tag{10}$$

3. El filtraje del proceso $\xi(t)$ es:

$$\hat{\xi}(t) = \frac{B_{\xi\eta}(o)}{B_{\eta\eta}(o)} \cdot \eta(t) \tag{11}$$

4. La varianza residual puede escribirse:

$$\sigma^2 = E\,\{\,|\,\xi(t) - a\,\eta(t)\,|\,\overline{\xi(t)}\,\} = B_{\xi\xi}(o) - \hat{a}\,B_{\eta\xi}(o) = B_{\xi\xi}(o) - \frac{|\,B_{\xi\eta}(o)\,|^2}{B_{\eta\eta}(o)} \tag{12}$$

2.5. *Predicción lineal simple con filtraje.*

1. De forma análoga, supuestos los procesos [7]. si deseamos predecir en el tiempo $t+m$, el proceso $\xi(t+m)$ conociendo una información del proceso $\eta(t)$ en t, conteniendo información perturbadora, la estimación lineal puede plantearse:

$$\hat{\xi}(t+m) = a\,\eta(t) \tag{13}$$

y por el principio de ortogonalidad:

$$E\,/\,\xi(t+m) - a\,\eta(t)\,/\,\overline{\eta(t)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{a} = \frac{B_{\xi\eta}(m)}{B_{\eta\eta}(o)} \tag{14}$$

2. En consecuencia:

$$\hat{\xi}(t+m) = \frac{B_{\xi\eta}(m)}{B_{\eta\eta}(o)}\,\eta(t) \tag{15}$$

es la predicción óptima simple con filtraje.

3. El error es:

$$\sigma^2_m = E\{|\xi(t+m) - \hat{\xi}(t+m)|^2\} =$$

$$= E|\xi(t+m) - a\eta(m)|\overline{\xi(t+m)} = B_{\xi\xi}(o) - aB_{\eta\xi}(-m) =$$

$$= B_{\xi\xi}(o) - \frac{|B_{\xi\eta}(m)|^2}{B_{\eta\eta}(o)} \qquad [16]$$

2.6. *Interpolación con filtraje.*

1: Sean los procesos [7] teniendo los valores en dos puntos: t_1 y t_2. La interpolación se presenta cuando deseamos conocer el valor de $\xi(t)$, siendo $t_1 < t < t_2$. Si $t > t_2$ sería extrapolación.

2. El planteamiento para estimar $\xi(t)$ de forma lineal puede ser:

$$\hat{\xi}(t) = a\,\eta(t_1) + b\,\eta(t_2) \qquad [17]$$

3. Si fuera interpolación sin filtraje, la estimación sería:

$$\hat{\xi}(t) = a\,\xi(t_1) + b\,\xi(t_2) \qquad [18]$$

por lo que es un caso particular del precedente.

4. Las condiciones de ortogonalidad nos darán las ecuaciones:

$$E\{[\xi(t) - \hat{\xi}(t)]\overline{\eta(t_i)}\} = 0; \qquad \{i = 1, 2\} \qquad [19]$$

$$B_{\xi\eta}(t-t_1) = aB_{\eta\eta}(o) + bB_{\eta\eta}(t_2 - t_1) \qquad [20]$$

$$B_{\xi\eta}(t-t_2) = a\overline{B_{\eta\eta}(t_2 - t_1)} + bB_{\eta\eta}(o)$$

5. Determinadas las constantes y sustituidas en [17] nos da la mejor fórmula de interpolación lineal de dos puntos. Y también: para que [20] sea compatible con [18] el determinante siguiente ha de ser nulo:

$$\begin{vmatrix} \hat{\xi}(t) & \eta(t_1) & \eta(t_2) \\ B_{\xi\eta}(t-t_1) & B_{\eta\eta}(o) & B_{\eta\eta}(t_2-t_1) \\ B_{\xi\eta}(t-t_2) & \overline{B_{\eta\eta}(t_2-t_1)} & B_{\eta\eta}(o) \end{vmatrix} = 0 \qquad [21]$$

El estudio y conceptos anteriores los hemos hecho en el dominio del tiempo. Es inmediata la extensión de extrapolación, interpolación y filtraje cuando se conozcan n puntos.

En las Secciones siguientes nos dedicaremos a la extrapolación de procesos estacionarios de parámetro discreto y continuo cuando las *f.* de *d.* espectral son de tipo conocido.

3. EXTRAPOLACIÓN LINEAL DE PROCESOS ESTACIONARIOS DE PARAMETRO DISCRETO: PLANTEAMIENTO Y SOLUCIONES.

3.1. *Introducción.*

1. Sean

$$\xi(t-1),\ \xi(t-2)\ldots\ \xi(t-n) \tag{1}$$

vectores pertenecientes a un subespacio de Hilbert $H_n(\xi)$. Una estimación puede hacerse eligiendo convenientemente $g(.)$:

$$\hat{\xi}(t+m) = g\,[\xi(t-1), \ldots \xi(t-n)] \tag{2}$$

2. La varianza de $\hat{\xi}(t+m)$ será:

$$\sigma^2_{m,n}\, E\{\,|\,\xi(t+m) - \hat{\xi}(t+m)\,|^2\,\} \tag{3}$$

Yaglom (1) justifica la elección de la función $g(.)$ sea del tipo lineal por simplicidad de cálculo y por las propiedades de las variables normales —n— dimensionales.

3. La Envolvente lineal de los vectores [1] es un proceso:

$$L_{m,n}(t) = \sum_{K=1}^{n} \alpha_K\, \xi(t-K); \qquad \forall\, \alpha_k \in C \tag{4}$$

que pertenece también el espacio $H_n(\xi)$.

4. La distancia de $\xi(t+m) \in H_n(\xi)$ a [4] será mínima cuando la diferencia:

$$\xi(t+m) - L_{m,n}(t) \tag{5}$$

sea ortogonal a cada uno de los vectores [1]. Luego el producto escalar es:

$$[\,\xi(t+m) - L_{m,n}(t), \xi(t-k)\,] = 0 \qquad (k = 1, 2, 3\ldots n) \tag{6}$$

o

$$B(k+m) - \sum_{h=1}^{n} \alpha_h\, B(k-h) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots\ldots n) \tag{7}$$

recordando la fórmula [4] del Apéndice.

---

(1) A. M. Yaglom: «Theory of Stationary Random Fonctions.» Prentice Hall, 1962, págs. 97 y siguientes.

El sistema anterior de n ecuaciones con n incógnitas nos permite calcular las constantes que sustituidas en [4] nos dará una estimación en el tiempo $t+m$, y existirá una perpendicular cuya distancia [5] será mínima cuando los vectores [1] sean linealmente independientes, porque hemos tomado como base del espacio $H_n(\xi)$ los vectores [1]. La solución es válida también siempre que el determinante de [7] no sea nulo.

5. La varianza de la predicción es la distancia al cuadrado de [5] cuando los valores de α_k son los de [7]:

$$\sigma^2_{m,n} = \left\| \xi(t+m) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \xi(t-k) \right\| =$$

$$= \left(\xi(t+m) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \xi(t-k), \quad \xi(t+m) \right) =$$

$$= B(o) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{B(m+k)} \qquad [8]$$

Pero de [7] tomando complejos y sustituyendo en [8], y recordando la representación espectral de la función de covarianza (fórmula [5] del Apéndice):

$$\sigma^2_{m,n} = B(o) - \sum_{k=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} \alpha_k \overline{\alpha}_h B(h-k) = \qquad [8']$$

$$= B(o) - \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e^{-i\lambda k} \right|^2 f(\lambda)\, d\lambda \qquad [8'']$$

6. Kolmogorov ha demostrado que el error de la predicción es:

$$\sigma^2_n = \exp\left[\frac{1}{2\pi}\right] \int_{-\pi}^{\pi} \log \{ 2\pi f(\lambda) \}\, d\lambda \qquad [8''']$$

y cuando el proceso es determinista e error de la predicción es cero, cumpliéndose si (2):

$$\int_{-\pi}^{\pi} ln\, f(\lambda)\, d\lambda = -\infty$$

(2) Edward James Hannan: «Multiple Time Series.» Wiley, 1970, págs. 137 y siguientes, y D. R. Cox and H. D. Miller: «The Theory of Stochastic Processes.» Chapman and Hall, 1972, London, pág. 326.

3.2. *Representación espectral.*

1. Las funciones de covarianza [7] sustituidas por sus representaciones espectrales, nos dan las condiciones:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} [e^{i\lambda m} - \sum_{h=1}^{n} \alpha_h e^{-i\lambda h}] f(\lambda) \, d\lambda = 0 \, ; \qquad (k = 1, 2, 3 \dots n) \qquad [9]$$

o

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} [e^{i\lambda m} - \Phi_{m,n}(\lambda)] f(\lambda) \, d\lambda = 0 \qquad [9']$$

siendo

$$\Phi_{m,n}(\lambda) = \sum_{h=1}^{n} \alpha_h e^{-i\lambda h} \qquad [10]$$

la función que se denomina característica espectral de la extrapolación.

2. El problema de encontrar los coeficientes α_h queda reducido a encontrar una función $\Phi_{m,n}(\lambda)$ que sea combinación lineal de las potencias $e^{-i\lambda}$, $e^{-2i\lambda} \dots e^{-i\lambda n}$ que satisfaga la [9']. Si encontramos esta función, los coeficientes α_h serán los mismos que los de [7], y en consecuencia la combinación lineal [4] con estos coeficientes es la mejor estimación lineal de $\xi\,(t+m)$.

3. El error puede expresarse espectralmente:

$$\sigma^2_{m,n} = \int_{-\pi}^{\pi} | e^{im\lambda} - \Phi_{m,n}(\lambda) |^2 f(\lambda) \, d\lambda \qquad [11]$$

$$= B(o) - \int_{-\pi}^{\pi} | \Phi_{m,n}(\lambda) |^2 f(\lambda) \, d\lambda \qquad [12]$$

según lo indicado en [8''] y de acuerdo con [10].

4. Si en lugar de ser n dimensiones $n \to \infty$ las representaciones espectrales [9] y [9'] son:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} \left[e^{i\lambda m} - \sum_{h=1}^{\infty} \alpha_h e^{-i\lambda h} \right] f(\lambda) \, d\lambda = 0; \qquad k = 1, 2, 3, \dots \qquad [13]$$

o sus equivalentes:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} [e^{i\lambda m} - \Phi_m(\lambda)] f(\lambda) \, d\lambda = 0; \qquad k = 1, 2, 3, \dots \qquad [13]$$

siendo

$$\Phi_m(\lambda) = \sum_{h=1}^{\infty} \alpha_h e^{-i\lambda h} \qquad [14]$$

la característica espectral de extrapolación. Si la multiplicamos por $e^{i\lambda t} d\mathfrak{d}(\lambda)$ e integramos entre $(-\pi, +\pi)$ tendremos:

$$\hat{\xi}(t+m) = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\lambda) e^{i\lambda t} d\mathfrak{d}(\lambda) = \sum_{h=1}^{\infty} \alpha_h \xi(t-h) \qquad [15]$$

La [12], [13'] y [15] nos indican las condiciones que necesariamente tiene que cumplir la [14].

5. Obtenida la función $\Phi_m(\lambda)$ su desarrollo:

$$\Phi_m(\lambda) \approx \alpha_1 e^{-i\lambda} + \alpha_2 e^{-i\lambda 2} + \alpha_3 e^{-i\lambda 3} + \dots \qquad [16]$$

nos permite encontrar los coeficientes α_k que sustituidos en la [15] obtendremos la mejor fórmula de extrapolación lineal.

6. Yaglom (3) siguiendo las ideas de Kolmogorov (4) y Wiener (5) sintetiza las condiciones que se deducen de [13'], [14] y [16]:

a) $\Phi_m(\lambda)$ es un desarrollo de potencias de $e^{-i\lambda}$ enteras.

b) La función:

$$\psi_m(\lambda) = [e^{i\lambda m} - \Phi_m(\lambda)]\, f(\lambda) \qquad [17]$$

contendrá potencias de $e^{i\lambda}$, es decir:

$$\psi_m(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ik\lambda} \qquad [17']$$

pues al sustituir [17'] en [13'] las integrales para $k = 1, 2 \dots$, son nulas cumpliéndose las condiciones precisas. Finalmente:

c) La serie [16] de la característica espectral es convergente.

---

(3) A. M. Yanglom, o. c., págs. 108 y siguientes.

(4) A. A. Kolmogorov: «Sucesiones Estacionarias en Espacios de Hilbert.» Trabajos de Estadística, 1953 (dos números).

(5) Norbert Wiener: «Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series.» Cambridge, 1970, págs. 106 y siguientes.

3.3. *Traslación a variable compleja.*

1. Las condiciones precedentes son estudiadas por Yaglom introduciendo la variable compleja (6):

$$z = e^{i\lambda} \qquad [18]$$

caso de estar situada sobre el círculo unidad coincide con las [13'], [14] y [17].

Para que [16] sea convergente, la función:

$$\Phi^{x}_{m}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{z^k} \qquad [19]$$

es analítica fuera y sobre el círculo unidad y se verifica:

$$\Phi^{x}_{m}(\infty) = 0; \qquad |z| \to \infty \qquad [20]$$

En todo punto del círculo unidad $|z| = 1 \quad \Rightarrow \quad z = e^{i\lambda}$ es:

$$\Phi^{x}_{m}(e^{i\lambda}) = \Phi_{m}(\lambda) \qquad [21]$$

2. De forma semejante, haremos:

$$f^{x}(e^{i\lambda}) = f(\lambda) = f^{x}(z) \qquad [22]$$

siendo $f^{x}(z)$ función compleja y que en el círculo unidad coincidirá con $f(\lambda)$.

3. La función:

$$\psi^{x}_{m}(z) = [z^{m} - \Phi^{x}_{m}(z)]\, f^{x}(z) \qquad [23]$$

es analítica dentro del círculo unidad y sobre la circunferencia, pudiendo desarrollar en serie de potencias de z y las singularidades serán fuera del círculo unidad.

Sintetizamos las condiciones:

1.ª $\Phi^{x}_{m}(z)$ es una función analítica fuera del círculo y sobre la circunferencia de radio unidad. Sólo puede tener singularidades dentro del círculo unidad.

2.ª $\Phi^{x}_{m}(\infty) = 0$.

3.ª $\psi^{x}_{m}(z)$ es una función analítica dentro y sobre el contorno de la circunferencia. Sólo puede tener singularidades fuera del círculo unidad.

Examinaremos en la sección siguiente algunas fórmulas que hemos deducido partiendo de estas condiciones y para los procesos con *f.* de *d.* de tipos concretos bastante generalizados.

---

(6) La v. c. toma más precisamente valores $\rho e^{i\lambda}$ pero la sustitución [18] es para relacionar entre los dos tipos de funciones coincidentes en el círculo unidad.

4. EXTRAPOLACION LINEAL DE PROCESOS ESTACIONARIOS DE TIPO DISCRETO DE FUNCION DE DENSIDAD ESPECTRAL.

4.1. A) *Del tipo:*

$$f(\lambda) = \frac{c}{\prod_{h=1}^{n} | e^{i\lambda} - a_h |^2}; \qquad -\pi < \lambda < \pi \tag{1}$$

siendo a_h reales $| a_h | < 1$.

4.2. *Solución:*

· 1. Traslademos $f(\lambda)$ a variable compleja según [18] y [22] de 3.3.

$$f^x(z) = \frac{cz^n}{(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n)(1-a_1 z)\ldots(1-a_n z)} \tag{2}$$

Por la 1.ª condición $\Phi^x(z)$ es uniformemente convergente fuera del círculo y sobre la circunferencia, pudiendo tener singularidades dentro del mismo. Recordando [2] y el desarrollo de [14] expresado en [19] de la Sección anterior, para que cumpla las condiciones impuestaas, puede expresarse así:

$$\Phi^x{}_m(z) = \frac{\gamma_m(z)}{z^n} \tag{3}$$

y tendrá las singularidades dentro del círculo unidad si $\gamma_m(z)$ es [4] una función entera; y cumplirá la condición 2.ª si $\Phi_m(\infty) = 0$ por lo que el grado de $\gamma_n(z)$ es inferior a n. Recordando la condición 3.ª y como $f^x(z)$ tiene singularidades dentro del círculo unidad, éstas se eliminan si se anula el otro factor de [23] de 3.3. antes indicado para los puntos en donde $f^x(z)$ es analítica dentro del circulo:

$$\begin{aligned} [z^m - \Phi^x(z)] &= 0 \\ z &= a_h \end{aligned} \tag{4}$$

y así carece $\psi^x{}_m(z)$ de las singularidades en mencionados puntos siendo analítica dentro del círculo unidad.

I La función $\gamma_m(z)$ es de la forma:

$$\gamma_m(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_{n-1} z^{n-1} \tag{5}$$

Por las expresiones [3], [4] y [5] haciendo $z = a_h$ tendremos las condiciones:

$$a_h^{n+m} = A_0 + A_1 a_h + A_2 a_h^2 + \dots A_{n-1} a_h^{n-1}; \qquad (h = 1, 2, \dots n) \qquad [6]$$

Las ecuaciones [6] unidas a [5] forma un sistema de $n+1$ ecuaciones con n incógnitas. Para que sea compatible según el teorema de Rouche-Frobenius el determinante formado por los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes debe ser cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 & \dots & z^{n-1} & \Upsilon_m(z) \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} & a_1^{n+m} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} & a_2^{n+m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} & a_n^{n+m} \end{vmatrix} = 0 \qquad [7]$$

Por cálculo sencillo tenemos:

$$\Upsilon_m(z) = \frac{-\begin{vmatrix} 0 & z^{n-1} & \dots & z & 1 \\ a_1^{n+m} & a_1^{n-1} & \dots & a_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^{n+m} & a_n^{n-1} & \dots & a_n & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1^{n-1} & \dots & a_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^{n-1} & \dots & a_n & 1 \end{vmatrix}} \qquad [8]$$

Dividiendo [8] por z^n según la [3] y siendo $z = e^{i\lambda}$ de acuerdo con [14] y [19] de 3.2. y 3.3., la característica espectral de la extrapolación lineal es:

$$\Phi_m(\lambda) = \frac{-\begin{vmatrix} 0 & e^{-i\lambda} & e^{-i2\lambda} & \dots & e^{-i(n-1)\lambda} & e^{-in\lambda} \\ a_1^{n+m} & a_1^{n-1} & a_1^{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^{n+m} & a_n^{n-1} & a_n^{n-2} & \dots & a_n & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} \qquad [9]$$

Δ representa el denominador de [8].

Multiplicando [9] por $e^{i\lambda t}\,d\,\mathfrak{z}(\lambda)$ e integrando entre $(-\pi, \pi)$ y recordando la [15] de 3.2. anterior, tenemos el valor óptimo extrapolado linealmente cuando la *f* de *d.* espectral sea del tipo [1]:

$$\hat{\xi}(t+m) = \frac{-\begin{vmatrix} 0 & \xi(t-1) & \xi(t-2) & \dots & \xi(t-n+1) & \xi(t-n) \\ a_1^{n+m} & a_1^{n-1} & a_1^{n-2} & \dots & a_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^{n+m} & a_n^{n-1} & a_n^{n-2} & \dots & a_n & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} \qquad [10]$$

4.3. *OBSERVACION IMPORTANTE:* Para la predicción cuando la *f.* de *d.* espectral sea del tipo [1] no necesitamos más que *n* valores pasados, y aunque dispongamos de toda la historia pasada no mejoraremos la predicción.

Desarrollando por la primera línea, tenemos una expresión del tipo de Markov de orden —*n*—.

Examinaremos dos casos de [10] según los diversos tipos particulares de la *f.* de *d.* espectral [1]:

CASO NUM. 1:

$$f(\lambda) = \frac{c}{|e^{i\lambda} - a|^2}; \qquad |a| < 1 \qquad [11]$$

1. Entonces la [10] se reduce:

$$\hat{\xi}(t+m) = \frac{-\begin{vmatrix} 0 & \xi(t-1) \\ a^{1+m} & 1 \end{vmatrix}}{1} = a^{m+1}\,\xi(t-1) \qquad [12]$$

CASO NUM. 2:

$$f(\lambda) = \frac{c}{|e^{i\lambda} - a_1|^2\,|e^{i\lambda} - a_2|^2}; \qquad |a_i| < 1 \qquad [13]$$

La [10] es ahora:

$$\hat{\xi}(t+m) = \frac{-\begin{vmatrix} 0 & \xi(t-1) & \xi(t-2) \\ a_1^{2+m} & a_1 & 1 \\ a_2^{2+m} & a_2 & 1 \end{vmatrix}}{a_1 - a_2} =$$

$$= \frac{(a_1^{m+2} - a_2^{m+2})\,\xi(t-1) - (a_1^{m+2}\,a_2 - a_2^{m+2}\,a_1)\,\xi(t-2)}{a_1 - a_2} \qquad [14]$$

Las fórmulas [12] y [14] de las extrapolaciones óptimas cuando la *f.* de densidad espectrales son de la forma [11] y [13] han sido deducidas por Yaglom (1) directamente coincidiendo con las nuestras.

4.4. B) *Procesos con f. de d. espectral del tipo:*

$$f(\lambda) = \frac{c}{|e^{i\lambda} - a|^{2n}}; \qquad |a| < 1 \tag{15}$$

1. Este es un caso particular de [1], pues las raíces del denominador son iguales. Y estudiaremos este caso, aunque el problema es más general: Si a_1 se repitiese α_1 veces; a_2, α_2 veces, etc., entonces la *f.* de *d.* sería:

$$f(\lambda) = \frac{c}{\prod_{i=1}^{v} |e^{i\lambda} - a_i|^{2\alpha i}}; \qquad |a_i| < 1 \tag{16}$$

Examinando [10] numerador y denominador, las columnas de los determinantes son iguales, siendo indeterminado.

Aplicando L'Hôpital (2) reiteradas veces, tendremos para la extrapolación lineal óptima con *f.* de *d.* espectral [15] representando n^k variaciones ordinarias:

$$(t+m) = \frac{-\begin{vmatrix} 0 & \xi(t-1) & \xi(t-2) & \dots & \xi(t-n+1) & \xi(t-n) \\ a^{n+m} & a^{n-1} & a^{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ (n+m)\,a^{n+m-1} & (n-1)\,a^{n-2} & (n-2)\,a^{n-2} & \dots & 1 & 0 \\ (n+m)^{(2}\,a^{m+n-2} & (n-1)^{(2}\,a^{n-3} & (n-2)^{(2}\,a^{n-3} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n+m)^{(n-1}\,a^{m-n+1} & \underline{|n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a^{n-1} & a^{n-2} & \dots & a^2 & a & 1 \\ (n-1)\,a^{n-2} & (n-2)\,a^{n-3} & \dots & 2a & 1 & 0 \\ (n-1)^{(2}\,a^{n-3} & (n-2)^{(2}\,a^{n-4} & \dots & \underline{|2} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{|n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}} \qquad [1$$

(1) A. M. Yaglom, o. c., págs. 110 y 111.

(2) En el sentido de que $a_i \to a$.

CASO NUM. 3:

$$f(\lambda) = \frac{c}{|e^{i\lambda} - a|^4}; \qquad |a| < 1 \tag{18}$$

La [17] es:

$$\hat{\xi}(t+m) = \frac{-\begin{vmatrix} 0 & \xi(t-1) & \xi(t-2) \\ a^{2+m} & a & 1 \\ (2+m)\,a^{1+m} & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} =$$

$$= (m+2)\,a^{m+1}\,\xi(t-1) - (m+1)\,a^{m+2}\,\xi(t-2) \tag{19}$$

CASO NUM. 4:

$$f(\lambda) = \frac{c}{|e^{i\lambda} - a_1|^4\,|e^{i\lambda} - a_2|^2} \tag{20}$$

La [20] es del tipo [16] y en la [10] existiría una indeterminación por la duplicidad de la raíz a_1.

Aplicando L'Hôpital una vez, tendremos:

$$\hat{\xi}(t+m) = \frac{-\begin{vmatrix} 0 & \xi(t-1) & \xi(t-2) & \xi(t-3) \\ a_1^{m+3} & a_1^2 & a_1 & 1 \\ (m+3)\,a_1^{m+2} & 2\,a_1 & 1 & 0 \\ a_2^{m+3} & a_2^2 & a_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 & 1 \\ 2\,a_1 & 1 & 0 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \end{vmatrix}} \tag{21}$$

Desarrollando por la primera línea obtendremos la mejor fórmula de extrapolación lineal cuando la *f.* de *d.* espectral sea la [20].

4.5. OBSERVACION IMPORTANTE:

El valor de n es el número de raíces del denominador aunque sean iguales. Es decir, de la [16] obtendremos:

$$n = \sum_{i=1}^{v} \alpha_i$$

y será el máximo de valores que precisamos $\{\xi(t-h)\}$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$ para la extrapolación óptima.

5. EXTRAPOLACION LINEAL DE PROCESOS ESTACIONARIOS $\{\xi(t), t \in Z\}$ CON *f.* DE *d.* ESPECTRAL DEL TIPO:

$$f(\lambda) = c \prod_{k=1}^{n} | e^{i\lambda} - b_k |^2 ; \qquad | b_k | < 1 \qquad [1]$$

siendo b_k real.

5.1. *Planteamiento:*

Pasando [1] a variable compleja según [21], [22] y [23] de 3.3.:

$$f^x(z) = \frac{c}{z^n} \prod_{k=1}^{n} (z - b_k)(1 - b_k z) \qquad [2]$$

lo que implica que $\Phi(z)$ solamente puede tener las singularidades en $z - b_k$ $(k = 1, 2, \ldots n)$ y puede escribirse:

$$\Phi^x{}_m(z) = \frac{\gamma_m(z)}{\prod_{k=1}^{n} (z - b_k)} \qquad [3]$$

pues [3] debe ser analítica fuera y sobre el círculo unidad.

Para que [3] cumpla las [14] y la 1.ª Condición de 3.2. y 3.3. $\gamma_m(z)$ ha de ser una función entera y, además, de grado n—1, ya que según la condición 2.ª $\Phi^x{}_m(\infty) = 0$.

Pero por [23] de 3.3. $\psi^x{}_m(z)$ tiene que ser analítica dentro del circulo unidad y como, según [2] $f^x(z)$ tiene un polo en el origen de orden n:

$$[z^m - \Phi^x{}_m(z)] \quad \Rightarrow \quad z^m \prod_{k=1}^{n} (z - b_k) - \sum_{k=0}^{n-1} A_k z^k \qquad \begin{matrix}[3\ a]\\ [3\ b]\end{matrix}$$

deberá [3 b] ser divisible por z^n.

5.2. *Solución:*

Desarrollando [3 b] en potencias de z, los coeficientes de z^k $(k = 0, 1, \ldots n-1)$ serán iguales a cero. Esto nos permite determinar los coeficientes A_k(1), y en consecuencia tendremos la función característica de la extrapolación lineal óptima para los procesos estocásticos estacionarios $\{t \in Z\}$ y con *f.* de *d.* espectral del tipo [1].

---

(1) Estos coeficientes vendrán dados en función de los b_k.

CASO NUM. 1:

$$f(\lambda) = c \mid e^{i\lambda} - b \mid^2 \qquad [4]$$

Trasladando a v. compleja:

$$f^x(z) = \frac{c(z-b)(1-bz)}{z} \qquad [4']$$

La [3 b] se convierte:

$$z^m (z-b) - A_0 = z^{m+1} - b z^m - A_0 \qquad [5]$$

a) SUBCASO: $m=0$. Para que [5] sea divisible por z ha de ser:

$$b + A_0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A_0 = -b \qquad [6]$$

Luego:

$$\Phi^x{}_0(z) = \frac{-b}{z-b} \qquad \Rightarrow \qquad \Phi_0(\lambda) = -b\, e^{-i\lambda} - b^2 e^{-2i\lambda} - \ldots \qquad [7]$$

La fórmula de extrapolación es:

$$\hat{\xi}(t) = -b\,\xi(t-1) - b^2 \xi(t-2) - b^3 \xi(t-3) \ldots \qquad [8]$$

b) SUBCASO: $m > 1$. Para que [5] sea divisible por z es preciso que:

$$A_0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \Phi_m(\lambda) = 0$$

y

$$\hat{\xi}(t+m) = 0\,; \qquad (m > 1) \qquad [9]$$

El conocimiento de toda la secuencia pasada es innecesaria porque no mejoramos la predicción.

CASO NUM. 2:

$$f(\lambda) = c \mid e^{i\lambda} - b_1 \mid^2 \mid e^{i\lambda} - b_2 \mid^2 \qquad [10]$$

La traslación de [10] a variable compleja es:

$$f^x(z) = \frac{c(z-b_1)(z-b_2)(1-b_1 z)(1-b_2 z)}{z^2} \qquad [10']$$

Y la [3 b] es, en nuestro caso:

$$z^{m+2} - (b_1 + b_2)\, z^{m+1} + b_1 b_2 z^m - (A_0 + A_1 z) \qquad [11]$$

debe ser divisible por z^2.

a) Para $m = 0 \Rightarrow$

$$A_0 = b_1 b_2 ; \qquad -A_1 = -(b_1 + b_2) \qquad [12]$$

Luego por las [3], [3'] y [12], tenemos:

$$\Phi_0^x(z) = \frac{b_1 b_2 + (b_1 + b_2) z}{(z - b_1)(z - b_2)} = \frac{A}{z - b_1} + \frac{B}{z - b_2} \qquad [13]$$

si se descompone en fracciones simples.

En consecuencia desarrollando [13] por potencias

$$b_j / z \ (j = 1, 2)\ (z = e^{i\lambda})$$

tendremos, de acuerdo con la [15] de 3.2.

$$\hat{\xi}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} [A\, b_1^k + B\, b_2^k]\, \xi(t - k - 1) \qquad [14]$$

Las constantes A y B se determinan por los métodos sencillos conocidos $\Rightarrow$

$$A = \frac{b_1^2}{b_2 - b_1} ; \qquad B = \frac{-b_2^2}{b_2 - b_1} \qquad [15]$$

b) Para $m = 1$. La [11] se convierte:

$$z^3 - (b_1 + b_2)\, z^2 + b_1 b_2 z - A_0 - A_1 z \qquad [16]$$

y para que sea divisible por z^2 debe ser:

$$A_0 = 0 ; \qquad A_1 = b_1 b_2 \qquad [17]$$

$$\Phi_1^x(z) = \frac{b_1 b_2}{(z - b_1)(z - b_2)} = \frac{b_1 b_2}{b_1 - b_2} \left[\frac{1}{z - b_1} - \frac{1}{z - b_2} \right] \qquad [18]$$

Recordando las [15], [19] y [21] de 3.2. y 3.3., tenemos que la fórmula de extrapolación lineal es:

$$\hat{\xi}(t+1) = \frac{b_1 b_2}{b_1 - b_2} \sum_{k=0}^{\infty} (b_1^k - b_2^k)\, \xi(t-k-1) \qquad [19]$$

c) $m > 2$. La [11] será divisible por z^2 siempre que:

$$A_0 = A_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\xi}(t+m) = 0\,; \qquad m > 2 \qquad [20]$$

5.3. *OBSERVACION IMPORTANTE:*

1.ª Cuando tenemos un proceso estacionario de parámetro discreto con función de densidad espectral [10] y tenemos la secuencia $\xi(t-1)$, $\xi(t-2) \ldots$ las extrapolaciones óptimas en sentido lineal para estimar $\hat{\xi}(t)$ o $\hat{\xi}(t+1)$ precisamos toda la historia; pero para la predicción $\hat{\xi}(t+m) = 0$ $(m > 2)$ no precisamos ningún conocimiento de la historia pasada (2).

2.ª La misma observación es cuando la *f.* de *d.* espectral sea del tipo [1]. En este caso, para que la [3 b] sea divisible por z^n, para $m > n$ habrán de ser todos los $A_h = 0$

$$\hat{\xi}(t+m) = 0\,; \qquad m > n \qquad [21]$$

Si $0 < m < n$ precisaríamos toda la historia de ξ $(t-h)$, $(h = 1, 2 \ldots)$.

6. EXTRAPOLACION LINEAL DE PROCESOS ESTACIONARIOS DE *f.* DE *d.* ESPECTRAL RACIONAL DEL TIPO

$$f(\lambda) = \frac{|B(e^{i\lambda})|^2}{|A(e^{i\lambda})|^2}\,; \qquad |a| < 1 \quad |b| < 1 \qquad [1]$$

Remitimos al lector a la o. c. de Yaglom.

Estudiaremos el caso más sencillo de:

$$f(\lambda) = c\,\frac{|e^{i\lambda} - b|^2}{|e^{i\lambda} - a|^2} \qquad [2]$$

Trasladando a variable compleja, tenemos:

$$f^{x}(z) = \frac{c\,(z-b)(1-bz)}{(z-a)(1-az)} \qquad [3]$$

(2) A. M. Yaglom: o. c., pág. 118, comenta este hecho explicando la incorrelación: $B(m) = 0 \quad m > 2$ de este caso concreto.

Sustituyendo en [23] de la Sección 2, tenemos:

$$\psi^x_m(z) = [z^m - \Phi^x_m(z)] \frac{c(z-b)(1-bz)}{(z-a)(1-az)} \qquad [4]$$

Las únicas singularidades que $\Phi^x_m(z)$ puede tener es dentro del círculo unidad, porque ha de ser analítica sobre la circunferencia y exterior al círculo, lo que nos permite escribir:

$$\Phi^x_m(z) = \frac{\gamma_m(z)}{z-b} \qquad [5]$$

Para que cumpla $\Phi^x_m(\infty) = 0$ debe ser $\gamma_m(z)$ constante $\Rightarrow$

$$\Phi^x_m(z) = \frac{A}{z-b} \qquad [6]$$

Por otra parte $\psi^x_m(z)$ como debe ser analítica dentro del círculo unidad y como la [3] tiene un polo para $z=a$, se eliminará de la [4] si:

$$\left[z^m - \frac{A}{z-b}\right]_{z=a} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A = a^m(a-b) \qquad [7]$$

y así $\psi^x_m(z)$ será analítica dentro del círculo unidad.

La característica espectral de extrapolación es:

$$\Phi_m(\lambda) = \frac{a^m(a-b)}{e^{i\lambda} - b} \qquad [8]$$

Desarrollando [8] en potencias de $e^{-i\lambda}$ y recordando [15] y [16] de 3.2., tendremos:

$$\hat{\xi}(t+m) = (a-b)\,a^m\,[\xi(t-1) + b\,\xi(t-2) + b^2\,\xi(t-3) + \ldots] \qquad [9]$$

Examinando la *f.* de *d.* espectral [2] puede interpretarse como un proceso mixto de medias móviles y autorregresivo ($m=n=1$).

OBSERVACION IMPORTANTE:

Para predecir precisamos el conocimiento de toda la historia pasada de los valores $\xi(t-h)$ $(h=1, 2, \ldots)$

7. EXTRAPOLACION DE PROCESOS ESTOCASTICOS ESTACIONARIOS DE PARAMETRO CONTINUO

7.1. *Teoría general. Ecuación integral de Wiener-Hopf* (1).

1. La predicción del proceso

$$\{\xi(t), t \in T\} \qquad [1]$$

en el momento $t+m$, se puede expresar por la expresión lineal:

$$\hat{\xi}(t+m) = \int_0^{\infty} \xi(t-u)\, h(u)\, du; \qquad u > 0 \qquad [2]$$

2. Supondremos un subespacio de Hilbert $H(\xi)$ donde $\{\xi(u), u \leqslant t\}$ son los vectores componentes. La distancia de $\xi(t+m)$ a la estimación [2] para que sea mínima, deberá anularse el producto interno.

$$[\xi(t+m) - \xi(\hat{t}+m), \xi(v)] = 0 \qquad \Rightarrow \qquad [3]$$

$$B(t+m-v) = \int_0^{\infty} B(t-u-v)\, h(u)\, du; \qquad \forall\, v \leqslant t \qquad [3']$$

Si hacemos $t - v = r \geqslant 0$ la [3'] la escribiremos:

$$B(m+r) = \int_0^{\infty} B(r-u)\, h(u)\, du; \qquad r \geqslant 0 \qquad [3'']$$

La ecuación integral [3''] se denomina de Wiener-Hopf (2).

3. La varianza de la predicción para que sea mínima cumpliendo [3''] será:

$$\sigma^2_m = [\xi(t+m) - \hat{\xi}(t+m), \xi(t+m)] =$$

$$= B(0) - \int_0^{\infty} B(-m-u)\, h(u)\, du = \sigma^2 - \int_0^{\infty} \overline{B(m+u)}\, h(u)\, du \qquad [4]$$

---

(1) Titchcmarsh: «Theory of Fourier Integral», o. c., pág. 339. «The Method of Hopf and Wiener.»

(2) N. Wiener, o. c., págs. 56 y siguientes, plantea y resuelve el problema aplicando la teoría de mínimos cuadrados combinando con el cálculo de variaciones.

y recordando la [3''] tomando complejos, haciendo $u=v$ y $r=u$, y sustituyendo en [4], tendremos:

$$\sigma^2_m = B(0) - \int_0^\infty \int_0^\infty \overline{B(u-v)\,h}\,(u)\,h(v)\,du\,dv = \qquad [4']$$

$$= B(0) - \int_0^\infty \left| \int_0^\infty e^{-i\lambda u} h(u) \right|^2 f(\lambda)\,d\lambda \qquad [4'']$$

4. El problema es encontrar la función $h(u)$ que cumpla la [3']. Esta ecuación integral no es sencilla de resolver y depende de la *f.* de *d.* espectral del proceso y de m.

7.2. *Representación espectral de la extrapolación de procesos de parámetro continuo.*

1. La representación espectral de la [3''] considerando que el proceso [1] tiene *f.* de *d.* espectral $f(\lambda)$ es semejante a la estudiada en 3.2. (ver fórmula 5 del Apéndice) para los procesos discretos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda r}\,[e^{i\lambda m} - \Phi_m(\lambda)]\,f(\lambda)\,d\lambda = 0; \quad \forall\, r \geqslant 0; \quad m > 0 \qquad [5]$$

2. La característica espectral de extrapolación del proceso es:

$$\Phi_m(\lambda) = \int_0^\infty h(u)\,e^{-i\lambda u}\,du \qquad [6]$$

3. Multiplicando [6] por $e^{i\lambda t}\,d\delta(\lambda)$ e integrando en todo el eje real, recordando [2] y la [1] del Apéndice:

$$\hat{\xi}(t+m) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_m(\lambda)\,e^{i\lambda t}\,d\delta(\lambda) = \int_0^\infty \xi(t-h)\,h(u)\,du \qquad [7]$$

Encontrar $\Phi_m(\lambda)$ no es tan sencillo como en las sucesiones, pues su desarrollo veremos que contiene términos de derivadas y de integrales.

Concretando las condiciones de Yaglom (3) son:

1.ª La característica de extrapolación $\Phi_m(\lambda)$ debe cumplir la [5] para $r \geqslant 0$.

2.ª $\Phi_m(\lambda)$ debe ser de cuadrado integrable respecto de $f(\lambda)$, por la limitación de la [4'']:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\,\Phi(\lambda)\,|^2 f(\lambda)\,d\lambda < \infty \qquad [8]$$

---

(3) A. M. Yanglom: o. c., págs. 145 y siguientes.

3.ª $\Phi_m(\lambda)$ debe ser limite en *m. c.* de una sucesión de combinaciones lineales $e^{-i\lambda u}\ (u > 0)$ o sea:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} | \Phi_m(\lambda) - \Phi_{m,n}(\lambda)|^2 f(\lambda)\, d\lambda = 0 \qquad [9]$$

4.ª La fórmula del error se obtiene recordando [4''] y [6]:

$$\sigma^2_m = B(0) - \int_{-\infty}^{\infty} | \Phi_m(\lambda)|^2 f(\lambda)\, d\lambda \qquad [10]$$

5.ª La solución más simple de la [5] se presenta cuando la *f.* de covarianza es analítica y que la [6] sea:

$$\Phi_m(\lambda) = e^{i\lambda m} \qquad [11]$$

al sustituir [11] en [7] recordando las representaciones espectrales:

$$\hat{\xi}(t+m) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(t+m)}\, d\delta(\lambda) = \xi(t+m) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} (i\lambda)^k\, d\delta(\lambda) \right] \frac{m^k}{|k} = \sum_{m=0}^{\infty} \xi^{(k}(t) \frac{m^k}{|k} \qquad [12]$$

predice exactamente el valor del proceso por el desarrollo de Taylor, para los procesos estocásticos derivables *m. c.*

7.3. *Extrapolación lineal de procesos de parámetro* t *continuo: Traslación a variable compleja.*

1. La demostración de las condiciones que indicaremos puede verse en Yaglom (4).

Nos limitaremos a enunciarlas sin demostración en la hipótesis de la continuidad de $f(\lambda)$ y que esta función sea una función racional de λ.

2. *Condiciones:*

1.ª La función [6] en el campo complejo debe ser analítica en el semiplano inferior. Las únicas singularidades que puede tener son en el semiplano superior y cuando $|\lambda| \to \infty$ en el semiplano inferior $\Phi_m(\lambda)$ no supere a alguna potencia de $|\lambda|$.

2.ª La función que aparece en [5]:

$$\psi_m(\lambda) = [e^{i\lambda m} - \Phi_m(\lambda)]\, f(\lambda) \qquad [13]$$

(4) A. M. Yanglom: o. c., págs. 150 y siguientes.

debe ser analítica en el semiplano superior, y si $|\lambda| \to \infty$ en el semiplano superior $\psi_m(\lambda)$ y decrece con $|\lambda|^{-1-\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$

3.ª La integral acotada:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_m(\lambda)|^2 f(\lambda)\, d\lambda < \infty \qquad [14]$$

es de cuadrado integrable respecto de $f(\lambda)\, d\lambda$.

En el caso que $f(\lambda)$ sea racional λ una función $\Phi_m(\lambda)$ que cumpla estas tres condiciones nos permitirá obtener la extrapolación lineal óptima (5).

8. EXTRAPOLACION DE PROCESOS CUANDO LA *f.* DE d. ESPECTRAL ES:

A) DEL TIPO:

$$f(\lambda) = \frac{c}{\prod_{k=1}^{n} (\lambda^2) + \alpha_k^2)} = \frac{c}{\prod_{k=1}^{n} (\lambda - \alpha_k i)(\lambda + \alpha_k i)} \qquad [1]$$

1. Formemos la función [13] de 7.3.

$$\psi_m(\lambda) = c \frac{e^{i\lambda m} - \Phi_m(\lambda)}{\prod_{k=1}^{n} (\lambda - \alpha_k i)(\lambda + \alpha_k i)}; \qquad \alpha_k > 0 \qquad [2]$$

Para que [2] sea analítica en el semiplano superior el numerador deberá anularse para

$$\lambda = \alpha_k i\,(6) \qquad \Rightarrow \qquad \Phi_m(\alpha_k i) = e^{-\alpha_k m}; \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad [3]$$

y así se cumple parcialmente la condición 2.ª porque se anula en [2] numerador y denominador en los puntos $\lambda \alpha_k$

2. Pero relacionando con la condición 1.ª $\Phi_m(\lambda)$ será de la forma:

$$\Phi_m(\lambda) = A_0 + A_1 \lambda + A_2 \lambda^2 + \ldots + A_{n-1} \lambda^{n-1} \qquad [4]$$

porque [4] es analítica en el semiplano inferior y, además, $\psi_m(\lambda) \to \lambda^{-1\varepsilon}$ en el semiplano superior cuando $|\lambda| \to \infty$.

(5) Otros autores trasladan a *v. c.* en el semiplano de la izquierda y derecha descomponiendo $f(\lambda)$ en raíces pares simétricas.

(6) $\alpha_k i$ no es necesariamente imaginario puro. Es preciso pertenezca al semiplano superior.

3. La [4] cumplirá las condiciones [3]. Sustituyendo $\lambda = \alpha_k i$:

$$e^{-\alpha_k m} = A_0 + A_1 \alpha_k i + A_2 (\alpha_k i)^2 + \ldots + A_{n-1} (\alpha_k i)^{n-1}\,; \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, n \quad [5]$$

4. La compatibilidad de [5] y [4] exige que el determinante de los coeficientes de las incógnitas y términos independientes sea nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \ldots & \lambda^{n-1} & \Phi_m(\lambda) \\ 1 & \alpha_1 i & (\alpha_1 i)^2 & \ldots & (\alpha_1 i)^{n-1} & e^{-\alpha_1 m} \\ 1 & \alpha_2 i & (\alpha_2 i)^2 & \ldots & (\alpha_2 i)^{n-1} & e^{-\alpha_2 m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \alpha_n i & (\alpha_n i)^2 & \ldots & (\alpha_n i)^{n-1} & e^{-\alpha_n m} \end{vmatrix} = 0 \qquad [6]$$

5. La característica espectral del proceso puede ponerse en forma explícita multiplicando las columnas $k+1$ por i^k ($k = 1, 2, \ldots, n-1$) y tras simples operaciones, despejando $\Phi_m(\lambda)$ tendremos:

$$\Phi_m(\lambda) = \frac{(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & i\lambda & (i\lambda)^2 & \ldots & (i\lambda)^{n-1} & 0 \\ 1 & -\alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & (-\alpha_1)^{n-1} & e^{-\alpha_1 m} \\ 1 & -\alpha_2 & \alpha_2^2 & \ldots & (-\alpha_2)^{n-1} & e^{-\alpha_2 m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & -\alpha_n & \alpha_n^2 & \ldots & (-\alpha_n)^{n-1} & e^{-\alpha_n m} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & (-\alpha_1)^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & -\alpha_n & \alpha_n^2 & \ldots & (-\alpha_n)^{n-1} \end{vmatrix}} \qquad [7]$$

6. La fórmula de extrapolación lineal se obtiene multiplicando la [7] por $e^{i\lambda t}\, d\,\delta(\lambda)$ e integrando a lo largo del eje real.

Recordando la representación de la derivada K (ver fórmula [8] del Apéndice), y como para multiplicar un determinante basta multiplicar cualquier fila (y lo mismo integrar, lo haremos donde se encuentran las variables) la mejor fórmula de extrapolación lineal para los procesos que tengan *f.* de *d.* espectral del tipo [1] será:

$$\hat{\xi}(t+m) = \frac{(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} \xi(t) & \xi'(t) & \xi''(t) & \ldots & \xi^{(n-1)}(t) & 0 \\ 1 & -\alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & (-\alpha_1)^{n-1} & e^{-\alpha_1 m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & -\alpha_n & \alpha_n^2 & \ldots & (-\alpha_n)^{n-1} & e^{-\alpha_n m} \end{vmatrix}}{D} \qquad [8]$$

Hemos indicado D el denominador de [7].

La [8] es la mejor fórmula de extrapolación y se observa que se precisa el conocimiento de $\xi(t)$ y de las derivadas hasta la $n-1$ inclusive, en el punto t del proceso.

7. Examinemos casos particulares simples:

CASO $n=1$:

$$f(\lambda) = \frac{c}{\lambda^2 + \alpha^2} \qquad [9]$$

que corresponde a $B(r) = c' e^{-\alpha|r|}$, es decir, semejante a la distribución [1] de Caychy.

La predicción lineal óptima es:

$$\hat{\xi}(t+m) = \frac{(-1)^2 \begin{vmatrix} \xi(t) & 0 \\ 1 & e^{-\alpha m} \end{vmatrix}}{1} = e^{-\alpha m}\, \xi(t) \qquad [10]$$

no precisando más que un término. La [10] coincide con la que directamente deduce Yaglom (2).

CASO $n=2$:

$$f(\lambda) = \frac{c}{(\lambda^2 + \alpha_1^2)(\lambda^2 + \alpha_2^2)} \qquad [11]$$

Por ser del tipo [1] y $n=2$ sustituiremos en [8] y desarrollando, tenemos para la fórmula de extrapolación lineal:

$$\hat{\xi}(t+m) = \frac{\alpha_1 e^{-\alpha_2 m} - \alpha_2 e^{-\alpha_1 m}}{\alpha_1 - \alpha_2}\, \xi(t) + \frac{e^{-\alpha_2 m} - e^{-\alpha_1 m}}{\alpha_1 - \alpha_2}\, \xi'(t) \qquad [12]$$

CASO $n=2$ PERO DE RAICES COMPLEJAS (no necesariamente imaginarias puras):

Yaglom (o. c., pág. 155) resuelve un ejemplo de extrapolación cuando la *f.* de *d.* espectral es del tipo (3):

$$f(\lambda) = \frac{c}{\lambda^4 + \alpha^4} =$$

$$= \frac{c}{\left(\lambda + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\alpha\right)\left(\lambda - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\alpha\right)\left(\lambda + \frac{1-i}{\sqrt{2}}\alpha\right)\left(\lambda - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\alpha\right)} \qquad [13]$$

(2) A. M. Yaglom: o. c., págs. 153 y 154. Wiener: o. c., pág. 65, estudia la *f.* de *d.*: $f(\lambda) = 1/1+\lambda^2$, siendo la predicción: $e^{-m}\xi(t)$

(3) Wiener lo estudia cuando: $f(\lambda) = 1/1+\lambda^4$ o. c., pág. 65.

Las raíces del denominador son los complejos y las pertenecientes al semiplano superior: ($\alpha_1 i, \alpha_2 i$ complejos no necesariamente imaginarios puros):

$$\begin{aligned} \alpha_1 i &= \frac{1+i}{\sqrt{2}}\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\alpha \\ \alpha_2 i &= -\frac{1-i}{\sqrt{2}}\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\alpha \end{aligned} \qquad [14]$$

La fórmula de extrapolación la tendremos sustituyendo estos valores en la [8] para $n=2$:

$$\hat{\xi}(t+m) = \frac{(-1)^3 \begin{vmatrix} \xi(t) & \xi'(t) & 0 \\ 1 & -\frac{1-i}{\sqrt{2}}\alpha & e^{-m\frac{1-i}{\sqrt{2}}\alpha} \\ 1 & -\frac{1+i}{\sqrt{2}}\alpha & e^{-m\frac{1+i}{\sqrt{2}}\alpha} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1-i}{\sqrt{2}}\alpha \\ 1 & -\frac{1+i}{\sqrt{1}}\alpha \end{vmatrix}} \qquad [15]$$

$$\hat{\xi}(t+m) = e^{-\frac{\alpha m}{\sqrt{2}}}\left[\cos\frac{\alpha m}{\sqrt{2}} + \operatorname{sen}\frac{\alpha m}{\sqrt{2}}\right]\xi(t) + \frac{\sqrt{2}}{\alpha}\, e^{-\frac{\alpha m}{\sqrt{2}}}\left(\operatorname{sen}\frac{\alpha m}{\sqrt{2}}\right)\xi'(t) \qquad [16]$$

La solución de nuestra fórmula [16] coincide con la deducida directamente por Yaglom (o. c., págs. 155-6) y con la de Wiener.

B) DEL TIPO:

$$f(\lambda) = \frac{c}{\prod_{k=1}^{v}(\lambda^2 + \alpha_k^2)^{v_k}} = \frac{c}{\prod_{k=1}^{v}(\lambda - \alpha_k i)^{v_k}(\lambda + \alpha_k i)^{v_k}} \qquad [17]$$

siendo

$$\sum_{k=1}^{v} v_k = n \qquad [17']$$

y $\alpha_k i$ es un número complejo perteneciente al semiplano superior no necesariamente imaginario puro.

1. La *f.* de *d.* [17] es un caso particular de la [1] porque se repiten los factores del denominador.

2. La característica espectral de la [17] tendrá numerador y denominador de [7] para α_1, v_1 filas iguales; para α_2, v_2, etc., por tanto será indeterminado y aplicaremos L'Hôpital para resolver la indeterminación. Si α_1 se repite en [17] v_1 veces derivaremos como lo hicimos en la Sección 3 B). Si todas fuesen iguales derivaríamos:

a) El numerador a partir de la 3.ª línea que sería la derivada de la 2.ª línea; la 4.ª línea que sería la 2.ª y así sucesivamente.

b) El denominador a partir de la 2.ª línea.

Después sustituiríamos todas las líneas por el valor de la raíz.

3. Sin perder generalidad, supongamos:

$$f(\lambda) = \frac{c}{(\lambda^2 + \alpha^2)^3} \qquad [18]$$

Todas las raíces son iguales y $n=3$, y $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$. La [7] se convierte:

$$\Phi_m(\lambda) = \frac{-\begin{vmatrix} 1 & \lambda i & (\lambda i)^2 & 0 \\ 1 & -\alpha & \alpha^2 & e^{-\alpha m} \\ 0 & -1 & 2\alpha & -m\,e^{-\alpha m} \\ 0 & 0 & 2 & m^2 e^{-\alpha m} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\alpha & \alpha^2 \\ 0 & -1 & 2\alpha \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}} \qquad [19]$$

Igualmente la [8] y tras sencillos cálculos, después de simplificar, tenemos para la mejor fórmula de extrapolación lineal del proceso con *f.* de *d.* espectral [18]:

$$\hat{\xi}(t+m) = 1/2\, e^{-\alpha m}[1 + (1+\alpha m)^2]\,\xi(t) + e^{-\alpha m}\, m(\alpha m + 1)\,\xi'(t) + 1/2\, m^2 e^{-\alpha m}\,\xi''(t) \qquad [20]$$

4. OBSERVACION IMPORTANTE

Todas las fórmulas de extrapolación de procesos que tengan *f.* de *d.* espectral [1] o [17] se precisan no solamente el valor de $\xi(t)$ sino las derivadas sucesivas en mencionado punto y como máximo n—1, siendo n la mitad del grado λ del denominador o determinado por [17'].

9. EXTRAPOLACION GENERAL DE PROCESOS ESTACIONARIOS CON *f.* DE *d.* ESPECTRAL DEL TIPO

$$f(\lambda) = C \frac{\prod_{j=1}^{r} (\lambda^2 + \beta_j^2)}{\prod_{k=1}^{n} (\lambda^2 + \alpha_k^2)}; \qquad r < n; \qquad \beta > 0 \tag{1}$$

1. El numerador de [1] siempre ha de ser de grado inferior al denominador para que se cumpla la [4''] de 7.1., y sin raíces comunes y así siempre necesariamente supondremos que $B'(0) < \infty$.

2. Formemos la función [13] de 7.3. descomponiendo en factores el numerador y denominador de [1]:

$$\psi_m(\lambda) = c\,[e^{i\lambda m} - \Phi_m(\lambda)] \frac{\prod_{j=1}^{r} (\lambda - \beta_j i)(\lambda + \beta_j i)}{\prod_{k=1}^{n} (\lambda - \alpha_k i)(\lambda + \alpha_k i)} \tag{2}$$

3. $\alpha_k i, \beta_j i$ son números complejos pertenecientes al semiplano superior.

4. Para que [2] sea analítica en el semiplano superior como [1] tiene polos en los puntos $\lambda = \alpha_k i$ pertenecientes a referido semiplano debe cumplir la función $\Phi_m(\lambda)$ las condiciones:

$$|e^{i\lambda m} - \Phi_m(\lambda)|_{\lambda = \alpha_k i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_m(\alpha_k i) = e^{-m\alpha_k}; \qquad (k = 1, 2, 3, ..., n) \tag{3}$$

5. Por otra parte $\Phi_m(\lambda)$ debe ser analítica en el plano inferior y las únicas singularidades las tendrá en el semiplano superior; es decir: en los puntos $\beta_j i$ $(j = 1, 2, ..., r)$ pudiendo escribirse de la forma:

$$\Phi_m(\lambda) = \frac{\gamma_m(\lambda)}{\prod_{j=1}^{r} (\lambda - \beta_j i)} \tag{4}$$

porque $\beta_j i$ pertenecen al semiplano superior y no son necesariamente imaginarios puros.

6. La forma [4] no modifica las condiciones de la [2] porque $\Phi_m(\lambda)$ sigue siendo analítica en el semiplano superior si $\gamma_m(\lambda)$ es una función entera. Pero $\psi_m(\lambda)$ cuando $|\lambda| \to \infty$ no tiene que superar a alguna potencia entera de λ y de forma que [2] decrezca con $|\lambda|^{-1-\epsilon}$.

7. La función entera $\gamma_m(\lambda)$ cumplirá las condiciones si es de la forma:

$$\gamma_m(\lambda) = A_0 + A_1 \lambda + A_2 \lambda^2 + \dots + A_{n-1} \lambda^{n-1} \tag{5}$$

De la [4] y [5] obtenemos:

$$A_0 + A_1 \lambda + A_2 \lambda^2 + \dots + A_{n-1} \lambda^{n-1} - \Phi(\lambda) \prod_{j=1}^{r} (\lambda - \beta_j i) = 0 \tag{6}$$

Y las ecuaciones [3] pueden escribirse sustituyendo en la [6]:

$$A_0 + A_1 \alpha_k i + A_2 (\alpha_k i)^2 + \dots + A_{n-1} (\alpha_k i)^{n-1} - e^{-\alpha_k m} \prod_{j=1}^{r} (\alpha_k i - \beta_j i) = 0; \quad (k = 1, 2, \dots, n) \tag{7}$$

El sistema [7], para que sea compatible con la [6] el determinante formado por los coeficientes de las incógnitas (A_h, $h = 0, \dots, n—1$) y los términos independientes, deberá ser cero.

Por lo que:

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \dots & \lambda^{n-1} & \Phi_m(\lambda) \prod_{j=1}^{r} (\lambda - \beta_j i) \\ 1 & \alpha_1 i & (\alpha_1 i)^2 & \dots & (\alpha_1 i)^{n-1} & e^{-\alpha_1 m} \prod_{j=1}^{r} (\alpha_1 i - \beta_j i) \\ 1 & \alpha_2 i & (\alpha_2 i)^2 & \dots & (\alpha_2 i)^{n-1} & e^{-\alpha_2 m} \prod_{j=1}^{r} (\alpha_2 i - \beta_j i) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_n i & (\alpha_n i)^2 & \dots & (\alpha_n i)^{n-1} & e^{-\alpha_n m} \prod_{j=1}^{r} (\alpha_n i - \beta_j i) \end{vmatrix} = 0 \tag{8}$$

8. La función característica la deduciremos de forma parecida a como deducimos la [17] a partir de la [16] de la Sección 6. Multiplicaremos la columna $k+1$ por i^k ($k = 1, 2, \dots, n—1$) y la última columna por i^r (introduciendo dentro del factor multiplicativo) y como:

$$i^r \prod_{j=1}^{r} (\lambda - \beta_j i) = \prod_{j=1}^{n} (i \lambda + \beta_j) \tag{9}$$

después de efectuadas estas operaciones, dividiendo la primera fila por la [9], tendremos:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\prod\limits_{j=1}^{r}(i\lambda+\beta_j)} & \dfrac{(i\lambda)}{\prod\limits_{j=1}^{r}(i\lambda+\beta_j)} & \cdots & \dfrac{(i\lambda)^{n-1}}{\prod\limits_{j=1}^{r}(i\lambda+\beta_j)} & \Phi_m(\lambda) \\ 1 & -\alpha_1 & \cdots & (-\alpha_1)^{n-1} & e^{-\alpha_1 m}\prod\limits_{j=1}^{r}(\beta_j-\alpha_1) \\ \cdot & & & & \\ 1 & -\alpha_2 & \cdots & (-\alpha_2)^{n-1} & e^{-\alpha_i m}\prod\limits_{j=1}^{r}(\beta_j-\alpha_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & -\alpha_n & \cdots & (-\alpha)^{n-1} & e^{-\alpha_n m}\prod\limits_{j=1}^{r}(\beta_j-\alpha_n) \end{vmatrix} = 0 \qquad [10]$$

por ser

$$i^r \prod_{j=1}^{r}(\alpha_k i-\beta_j i) = \prod_{j=1}^{r}(i^2\alpha_k+\beta_j) = \prod_{j=1}^{r}(\beta_j-\alpha_k) \qquad [11]$$

Haciendo una partición de la matriz del determinante en la primera fila con $1\times n = M_1$ y la última columna en dos, el determinante [10] puede escribirse:

$$\begin{vmatrix} M_1 & \Phi_m(\lambda)+0 \\ M_2 & O \quad \Pi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M_1 & \Phi_m(\lambda) \\ M_2 & O \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_1 & 0 \\ M_2 & \Pi \end{vmatrix} = 0 \qquad [10']$$

siendo M_1 la matriz $1\times n$ de la primera fila; M_2 la matriz cuadrada de las $n\times n$ siguiente filas formadas por los elementos $(-\alpha_h)^{k-1}$; Π la matriz de la última columna de los productos en que aparece este símbolo. Y O la matriz columna formados por los elementos nulos.

De la [10'], despejando $\Phi_m(\lambda)$ tenemos:

$$\Phi_m(\lambda) = (-1)^{n+1}\frac{\begin{vmatrix} M_1 & O \\ M_2 & \Pi \end{vmatrix}}{|M_2|} \qquad [12]$$

La característica espectral de extrapolación [12] recordando la descomposición hecha, puede escribirse finalmente:

$$\Phi_m(\lambda) = \frac{(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\prod_{j=1}^{r}(i\lambda+\beta_j)} & \dfrac{(i\lambda)}{\prod_{j=1}^{r}(i\lambda+\beta_j)} & \cdots & \dfrac{(i\lambda)^{n-1}}{\prod_{j=1}^{r}(i\lambda+\beta_j)} & 0 \\ 1 & -\alpha_1 & \cdots & (-\alpha_1)^{n-1} & e^{-\alpha_1 m}\prod_{j=1}^{r}(\beta_j-\alpha_1) \\ 1 & -\alpha_2 & \cdots & (-\alpha_2)^{n-1} & e^{-\alpha_2 m}\prod_{j=1}^{r}(\beta_j-\alpha_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & -\alpha_n & \cdots & (-\alpha)^{n-1} & e^{-\alpha_n m}\prod_{j=1}^{r}(\beta_j-\alpha_n) \end{vmatrix}}{|M_2|} \qquad [13]$$

siendo

$$|M_2| = \begin{vmatrix} 1 & -\alpha_1 & \cdots & (-\alpha_1)^{n-1} \\ 1 & -\alpha_2 & \cdots & (-\alpha_2)^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & -\alpha_n & \cdots & (-\alpha_n)^{n-1} \end{vmatrix} \qquad [14]$$

9. La fórmula de extrapolación la obtendremos multiplicando la [13] por $e^{i\lambda t}\,d\delta(\lambda)$ e integrando respecto de λ en todo el eje real, recordando [7], y como la variable se encuentra en la primera línea, multiplicaremos e integraremos los elementos de esta línea. El elemento $a_{1,\,k+1}$ estará formado por integrales del tipo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda t}(i\lambda)^k\,d\delta(\lambda)}{\prod_{j=1}^{r}(i\lambda+\beta_j)} = \int_0^{\infty} \overset{(r)}{\cdots} \int e^{-\sum_{j=1}^{r}\beta_j r_j}\, \xi^{(k}\left(t-\sum_{j=1}^{r} u_j\right)\prod_{j=1}^{r} du_j \qquad [15]$$

recordando las fórmulas [11] del Apéndice matemático.

OBSERVACIONES IMPORTANTES

1.ª La característica espectral para la extrapolación lineal [13] de procesos estacionarios de *f.* de *d.* espectral [1] presenta las dificultades indicadas en 9.

Para eliminar las integrales múltiples [15] que aparecerían en la extrapolación, puede desarrollarse la [13] por los elementos de la primera fila, escribiendo de nuevo:

$$\Phi_m(\lambda) = \frac{\sum_{k=1}^{n} A_{k-1}(i\lambda)^{k-1}}{\prod_{j=1}^{r}(\beta_j + i\lambda)} \qquad [16]$$

A_{k-1} son los coeficientes relacionados con los adjuntos de los elementos $(i\lambda)^{k-1}$ del determinante [13], pero recordando el signo y el denominador [14].

Según [1], por ser $n > r$, el grado del numerador de la [16] será mayor o igual que el denominador. Efectuando la división el cociente será un polinomio de $(i\lambda)$ y de grado $n—r—1$. El resto se descompondrá en fracciones simples, lo que permite escribir la [16] así:

$$\Phi(\lambda) = B_0 + B_1(i\lambda) + \ldots + B_{n-r-1}(i\lambda)^{n-r-1} + \sum_{j=1}^{r} \frac{C_j}{\beta_j + i\lambda} \qquad [16']$$

Los coeficientes B_h se determinan por simple división y los C_j por las conocidas fórmulas de descomposición en fracciones simples y que tanto se utilizan en cálculo integral. Multiplicando la [16'] por $e^{i\lambda t}\, d\mathfrak{F}(\lambda)$ e integrando, tendremos que la mejor fórmula de extrapolación lineal para procesos estocásticos con *f.* de *d.* espectral [1] es de la forma:

$$\hat{\xi}(t+m) = B_0\,\xi(t) + B_1\,\xi'(t) + \ldots + B_{n-r-1}\,\xi^{(n-r-1)}(t) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{r} C_j \int_0^{\infty} e^{-\beta_j u_j}\, \xi(t-u_j)\, du_j \qquad [17]$$

recordando las [8] y [9] del Apéndice matemático.

La [17] carece de integrales múltiples y resuelve la dificultad expuesta en 9 utilizando el valor del proceso y el de sus derivadas (hasta el orden $n—r—1$) en el momento t y tantas *integrales simples* del proceso (combinadas exponencialmente de toda la historia pasada) como valores diferentes reales y positivos β_j posea el numerador de [1].

2.ª Si el numerador de la [1] tuviese raíces iguales, la *f.* de *d.* espectral sería de la forma:

$$f(\lambda) = \frac{\prod_{j=1}^{v} (\lambda^2 + \beta_j^2)^{r_j}}{\prod_{k=1}^{n} (\lambda^2 + \alpha_k^2)} \qquad [18]$$

y sin perder generalidad supondremos que la [18] fuera:

$$f(\lambda) = \frac{(\lambda^2 + \beta^2)^r}{\prod_{k=1}^{n} (\lambda^2 + \alpha_k^2)}; \qquad r < n \qquad [18']$$

En este caso la característica espectral [13] habrá que modificar de acuerdo con la [18] y se sustituirán los términos de la [13] por sus modificados:

$$\prod_{j=1}^{r} (i\lambda + \beta_j) \quad \longrightarrow \quad (\lambda^2 + \beta^2)^r \qquad [19\ a]$$

$$\prod_{j=1}^{r} (\beta_j - \alpha_h) \quad \longrightarrow \quad (\beta - \alpha_h)^r \qquad [19\ b]$$

$$(h = 1, 2, ..., n)$$

La característica espectral desarrollada [16] se convierte:

$$\Phi(\lambda) = \frac{\sum_{k=1}^{n} A_{k-1} (i\lambda)^{k-1}}{(\beta + i\lambda)^r} \qquad [20]$$

Según [18'] el numerador de [20] será de grado superior al del denominador. Dividiendo y descomponiendo el resto en fracciones simples, podremos escribir la [20] así:

$$\Phi(\lambda) = B_0 + B_1 (i\lambda) + \ldots + B_{n-r-1} (i\lambda)^{n-r-1} + \sum_{j=1}^{r} \frac{C_j}{(\beta + i\lambda)^j} \qquad [20']$$

Las constantes B_h, C_j no dependen de $(i\lambda)$ y se determinan las primeras por simple división, y las segundas por cualquiera de los métodos usuales de descomposición en fracciones simples.

En consecuencia, multiplicando la [20'] por $e^{i\lambda t}\, d\delta(\lambda)$ e integrando en R tenemos que la mejor fórmula de extrapolación lineal para procesos estacionarios con *f.* de *d.* espectral [18'] recordando las [8] y [10] del Apéndice:

$$\hat{\xi}(t+m) = B_0\,\xi(t) + B_1\,\xi'(t) + \ldots + B_{n-r-1}\,\xi^{(n-r-1)}(t) +$$

$$+\sum_{j=1}^{r} \frac{C_j}{\underline{|j-1}} \int_0^{\infty} e^{-\beta u}\, u^{j-1}\, \xi(t-u)\, du \qquad [21]$$

Esta fórmula utiliza los valores del proceso y de sus $(n-r-1)$ derivadas en el momento *t;* y *r* integrales simples (parecidas a las integrales gamma) sobre toda la historia pasada (1).

3.ª Finalmente es innecesario advertir que para aplicar probabilidades y conocer el grado de precisión de la predicción completaremos las fórmulas con la varianza residual que sabemos es:

$$\sigma^2_m = B(0) - \int_{-\infty}^{\infty} |\,\Phi(\lambda)\,|^2 f(\lambda)\, d\lambda \qquad [22]$$

La dificultad del cálculo de la [22] se simplifica por las propiedades de las variables complejas utilizando el teorema de residuos de Cauchy.

10. EXTRAPOLACION LINEAL DE LOS PROCESOS NO ESTACIONARIOS

10.1. Expondremos algunas ideas para la predicción de los procesos evolutivos, ya que nuestro trabajo se ha ceñido exclusivamente a los procesos estocásticos de tipo estacionario.

En estos procesos estacionarios las funciones de covarianza definidas por las fórmulas [5 a] y [5 b] del Apéndice, son funciones exclusivamente de la diferencia de tiempos; y si se conoce su forma y puede determinarse la transformada de Fourier se conocerá la función de densidad espectral asociada al proceso. Si la función de densidad espectral coincidiese con alguno de los tipos de funciones de densidad espectral estudiadas, obtendremos los predictores lineales óptimos.

10.2. Un caso particularmente interesante y en los procesos estocásticos de parámetro *t* continuo, es cuando la función de covarianza es una función analítica. En este caso el proceso estocástico continuo mínimo cuadrático

(1) Obsérvese que si $r=0$ desaparecen las integrales y nos queda una expresión semejante a la [8] desarrollada de la Sección anterior.

es predecible exactamente y por medio de un desarrollo de Taylor del proceso en el tiempo t, para determinar en el $t+m$ $(m>0)$; es decir: se precisa el conocimiento de todas las derivadas *m. c.* del proceso en el punto t y evidentemente, aunque teóricamente pudiera calcularse, presenta dificultades prácticas.

10.3. En los procesos evolutivos, caracterizados por modificar la esperanza matemática o la ley de probabilidad con el tiempo, puede plantearse a veces, problemas de descomponerse el proceso en una componente sistemática $g(t)$ que depende del tiempo y en un proceso estocástico $(\xi(t),\ t \in z)$ débilmente estacionario, cuya esperanza matemática es constante (transformándose en esperanza nula) y la ley de probabilidad es independiente con una traslación del tiempo.

Es natural que esta descomposición del proceso evolutivo pueda escribirse:

$$\eta(t) = g(t) + \xi(t); \qquad \{t \in z\} \tag{1}$$

No es tan sencillo descomponer los procesos en la componente funcional sistemática $g(t)$ y el proceso $\xi(t)$. Del proceso $\eta(t)$ tenemos una realización que es una serie cronológica muestral, y por un tratamiento especial de ciertas operaciones efectuadas denominado «filtrado» obtenemos otra serie que goza de propiedades, pero que se ha eliminado la componente sistemática y nos permite estudiar el espectro de esta nueva serie filtrada o la de la serie residual.

Si conociésemos $g(t)$, (o lo estimáramos por ajuste), lo eliminaríamos del proceso $\eta(t)$ y obtendríamos estimaciones de los errores residuales $\hat{\xi}(t)$ estimaremos las funciones de covarianza y también estimaremos el espectro y si éste perteneciese a uno de los tipos indicados la predicción del proceso en el tiempo $t+m$ podría descomponerse en dos:

1.° La componente sistemática funcional conocida o estimada de los datos en el tiempo $t+m$, es decir, $\hat{g}(t+m)$ y

2.° La extrapolación del proceso residual estacionario $\hat{\xi}(t+m)$.

10.4. El análisis de los espectros de las series original y residual nos informa sobre las componentes frecuenciales de mayor importancia en ambas series, y puede inferirse que en la serie original exista una gran tendencia, variaciones estacionales o cíclicas, etc., y también si el espectro de la componente residual éste fuere originado por un proceso puramente aleatorio, de medias móviles, autorregresivo, etc., en cuyo caso tendremos un método analítico para conocer mejor la forma de la predicción del proceso evolutivo.

El conocimiento del espectro en puntos aislados, por ejemplo: $\lambda = 0$ si la *f.* de *d.* espectral fuese muy grande, nos informa de la tendencia; y si fuese en otros puntos podría indicarnos existencia de componentes estacionales o cíclicas y que nos informan sobre la naturaleza intrínseca y de las componentes frecuenciales más importantes y que influyen en las varianzas; en consecuencia: considerar los armónicos precisos y ajustar sus coeficientes.

10.5. En los casos sencillos puede plantearse la hipótesis que el proceso evolutivo sea de la forma

$$\xi(t) = g(t) + \varepsilon_t ; \qquad t \in Z \tag{2}$$

siendo ε_t un proceso puramente aleatorio y con las características conocidas en Econometría:

$$\begin{aligned} &E\,\varepsilon_t = 0 ; \qquad E\,\varepsilon_t^2 = \sigma_\varepsilon^2 ; \qquad t \in Z \\ &\underset{t \neq s}{E\,\varepsilon_t \cdot \varepsilon\, t, s} = 0 ; \qquad \forall\, t, s \in Z \end{aligned} \tag{3}$$

y *g (t)* un polinomio de grado desconocido.

De las hipótesis deducimos:

$$E\,\xi(t) = g(t) + E\,\varepsilon_t = g(t) \tag{4}$$

Este proceso, aunque sea evolutivo en media, es estacionario en función de covarianza porque:

$$\begin{aligned} B(t-s) &= E\,\{[\xi(t) - g(t)]\,[\xi(s) - g(s)]\} = \\ &= E\,\varepsilon_t \cdot \varepsilon_s = 0 ; \qquad t \neq s \\ &= \sigma_\varepsilon^2 ; \qquad t = s \end{aligned} \tag{5}$$

es decir, la *f.* de covarianza depende de la diferencia de tiempos. Este hecho nos permite tomar diferencias finitas en la [2]:

$$\Delta^k \xi(t) = \Delta^k g(t) + \Delta^k \varepsilon_t = \Delta^k \varepsilon_t$$

por cuanto *g (t)* es un polinomio de grado *k*—1 según hipótesis, aunque el grado sea desconocido.

En consecuencia:

$$E\,\Delta^k \xi(t) = E\,\Delta^k \varepsilon_t = 0$$

la media muestral de la diferencia *k* de la serie cronológica será aproximadamente cero.

La varianza de la diferencia del proceso es:

$$V(\Delta^k \xi(t) = V(\Delta^k \varepsilon_t) = \binom{2k}{k} \sigma_\varepsilon^2$$

Las varianzas muestrales de las diferencias sucesivas:

$$\Delta\,\xi(t),\ \Delta^2\,\xi(t),\ \Delta^3\,\xi(t),\ \ldots,\ \Delta^k\,\xi(t),\ \ldots,\ \Delta^{k'}\,\xi(t)$$

las dividiremos por los coeficientes:

$$\binom{2}{1},\binom{4}{2},\binom{6}{3},\quad\ldots,\quad\binom{2k}{k}\quad\ldots,\quad\binom{2k'}{k'}$$

Si la estimación de la varianza σ_ε^2 en las muestras de estas diferencias sucesivas aproximadamente es constante a partir de la diferencia k, entonces puede afirmarse que el grado del polinomio es del orden k—1. Examinados los espectros de las diferencias finitas sucesivas formadas si llegamos a uno, el de la diferencia k—1 que sea prácticamente constante el espectro, entonces el proceso puede ser de la forma [2].

En este caso, ajustaremos un polinomio de grado k—1 a la serie cronológica observada correspondiente al proceso [2] y determinados los coeficientes del ajuste la predicción óptima será:

$$\hat{\xi}(t+m) = \hat{g}(t+m)$$

no influyendo para nada los valores de ε_t por su incorrelación con el pasado.

10.6. Las diferencias finitas son «filtros» y el método de otros filtros se emplean para reducir las series a procesos de tipo estacionario, que han sido los más estudiados.

Un «filtro lineal» es un conjunto de operaciones realizadas en una serie para obtener otra que reuna ciertas condiciones: carezca de tendencia, de estacionalidad, etc.

Existen numerosos filtros. Indicaremos el de Parzen (2), Granger (3), Fischman (4), etc.

Parzen utiliza un filtro de tipo de proceso autorregresivo cuyos parámetros los ajusta y suprime aquellos términos cuyos coeficientes no son significativos.

De la serie original elimina la serie ajustada y obtiene una serie residual y estudia los espectros de la original y de la serie residual. Su idea es con-

(2) E. Parcen: «The Rule of Spectral Analysis in Time Series Analysis.» Review of the International Statistical Institute, Vol. 35, 2, 1967, págs. 125 a 141.

(3) Granger and Hatanaka: «Spectral Analysis of Economic Time Series.» Princetown University Press, 1964. (Véase mi tesis, pág. 225, que rectifico el de este autor por no cumplir las condiciones precisas.)

(4) Fischman, G. S.: «Spectral Methods in Econometries.» Hadvard University Press, 1969.

tinuar el método hasta encontrar una serie residual $\hat{\varepsilon}(t)$ cuyo espectro prácticamente es constante y corresponda al proceso de perturbación aleatoria. Entonces ha encontrado el proceso ajustado, y para la predicción utiliza una serie de tipo autorregresivo con los parámetros estimados y que son significativos y no han sido eliminados.

Finalmente sugerimos el empleo para valores residuales $\hat{\varepsilon}(t)$ de la prueba de Durbin-Watson, que nos permite conocer si la serie residual está incorrelacionada o no, y en el primer caso el espectro de esta serie residual será aproximadamente constante.

APENDICE

11. REPRESENTACIONES ESPECTRALES

11.1. *Representación espectral de un proceso estacionario.*

El fundamento del análisis espectral se basa en el hecho de que todo proceso estocástico estacionario $\{\xi(t), t \in T\}$ (siendo $\xi(t)$ una variable aleatoria para un valor fijo de t, puede descomponerse en oscilaciones sinusoidales aleatorias de frecuencias diferentes y cuyas amplitudes estocásticas elementales son mutuamente ortogonales. Concretando, la representación converge en media cuadrática:

$$\xi(t) \stackrel{2}{=} \int_{\Lambda} e^{i\lambda t} d\mathfrak{z}(\lambda) \qquad [1]$$

El conjunto $\{\lambda \in \Lambda\}$ puede ser $(-\pi, +\pi)$ si $t \in Z$ siendo Z el conjunto de los números enteros; y si $t \in R$, $\{\lambda \in R\}$ Las amplitudes aleatorias de un parámetro λ (denominado frecuencia) son $d\mathfrak{z}(\lambda)$ y goza de las propiedades:

$$\begin{aligned} &E \; d\mathfrak{z}(\lambda) = 0 \\ &E\,|d\mathfrak{z}(\lambda)|^2 = dF(\lambda) = f(\lambda)\,d\lambda \\ &E \; d\mathfrak{z}(\lambda)\overline{d\mathfrak{z}(\lambda')} = 0\,; \qquad \lambda \neq \lambda' \end{aligned} \qquad [2]$$

donde el operador E representa la esperanza matemática.

Al proceso:

$$\{\mathfrak{z}(\lambda), \lambda \in \Lambda\} \qquad [3]$$

con las condiciones señaladas en [2] se le denomina proceso de incrementos ortogonales.

La función $F(\lambda)$ asociada al proceso [3] se la denomina función de distribución espectral y goza de las propiedades de ser monótona, no decreciente y acotada cuando la varianza del proceso [1] sea finita. A la derivada, si existe, de la función $F(\lambda)$ —que representaremos por $f(\lambda)$ —se denomina función de densidad espectral.

11.2. *Representación espectral de la función de covarianza.*

Es importante señalar que todo proceso estocástico estacionario [1] la función dę covarianza es una esperanza matemática:

$$E\,\xi(t+h)\overline{\xi(t)} = B(h) \qquad [4]$$

donde $\overline{\xi(t)}$ es el proceso conjugado y la función de covarianza *B (h)* depende de la diferencia de tiempos. Si el proceso fuere real, $\overline{\xi(t)} = \xi(t)$. Para mayor generalidad expositiva supondremos el proceso sea de tipo complejo.

Por el teorema de Khinchine, la representación espectral de la función de covarianza de un proceso estacionario $\{\xi(t),\, t \in T\}$ es semejante a la del proceso:

$$B(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, dF(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(\lambda)\, d\lambda\,; \qquad t \in R & [5\text{ a}] \\[2ex] \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t}\, dF(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} f(\lambda)\, d\lambda\,; \qquad t \in Z & [5\text{ b}] \end{cases}$$

La función de densidad espectral es la transformada de Fourier de la función de covarianza y existirá si, y solamente si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |B(t)|\, dt < \infty \qquad [6\text{ b}]$$

$$\sum_{t=-\infty}^{+\infty} |B(t)| < \infty \qquad [6\text{ a}]$$

que garantiza la existencia de la derivada de la función de distribución espectral $F(\lambda)$.

Las representaciones espectrales [5] son más generales las fórmulas cuando aparece $dF(\lambda)$. pero los casos prácticos que estudiaremos son cuando $F(\lambda)$ tenga función de densidad espectral $f(\lambda)$

11.3. *Representación espectral* m. c. *de las derivadas de un proceso estocástico* (1).

El operador derivada D aplicado sobre el proceso [1] si es estacionario, tiene por representación espectral:

$$D\xi(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\xi(t+h) - \xi(t)}{h} \overset{2}{=} \lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda(t+h)} - e^{i\lambda t}}{h} d\delta(\lambda) \overset{2}{=} \int_{-\infty}^{\infty} i\lambda e^{i\lambda t} d\delta(\lambda) \quad [7]$$

En consecuencia, aplicado el operador n veces sobre $\xi(t)$ tenemos:

$$\xi^{(n}(t) = D^n \xi(t) \overset{2}{=} \int_{-\infty}^{\infty} (i\lambda)^n e^{i\lambda t} d\delta(\lambda) \quad [8]$$

11.4. *Representación espectral de:*

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta u} u^n \xi(t-u)\, du\,; \qquad \beta > 0$$

donde $\xi(t)$ es un proceso estocástico estacionario.

Primeramente determinaremos la representación espectral cuando $n=0$. Así sustituyendo $\xi(t)$ por su representación espectral [1] cuando: $\Lambda = R$ tenemos:

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta u}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(t-u)} d\delta(\lambda)\right] du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\left[\int_0^{\infty} e^{-(\beta+i\lambda)u} du\right] d\delta(\lambda) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda t}\, d\delta(\lambda)}{\beta + i\lambda} = \int_0^{\infty} e^{-\beta u} \xi(t-u)\, du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda t}\, d\delta(\lambda)}{\beta + i\lambda} \quad [9]$$

Derivando con respecto al parámetro β, n veces, la [9] tenemos:

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta u} u^n \xi(t-u)\, du = \underline{|n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda t}\, d\delta(\lambda)}{(\beta+i\lambda)^{n+1}} \quad [10]$$

No damos más que unas breves nociones para comprender nuestro artículo, prescindiendo de un rigor matemático excesivo.

11.5. *Otras representaciones espectrales.*

Representaciones espectrales de:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int e^{-\Sigma \beta u_j} \xi^{(K}\left(t - \sum_{j=1}^{\gamma} u_j\right) \prod_{j=1}^{\gamma} du_j = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda t} (i\lambda)^k\, d\delta(\lambda)}{\prod_{j=1}^{\gamma} (\beta_j + i\lambda)}\,; \quad \begin{matrix} \beta_j > 0 \\ u_j > 0 \end{matrix} \quad [11]$$

fórmula deducida en nuestra tesis, página 169.

11.6. *Función de densidad espectral.*

Esta función de densidad $f(\lambda)$ representa la contribución a la varianza del proceso en el intervalo infinitesimal $\lambda, \lambda + d\lambda$ y en el campo de la frecuencia Λ, la varianza infinitesimal en el punto λ es:

$$f(\lambda) \cdot d\lambda$$

Luego en todo el campo de $\lambda(-\pi, +\pi)$ si el proceso es de tipo discreto $(t \in Z)$ o en el eje real $\lambda \in R$ si el proceso es de tipo continuo.

La función de densidad espectral tiene

$$f(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} B(t)\, dt; & \lambda \in R \quad [12\ a] \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} B(n)\, e^{-i\lambda n}; & \lambda \in (-\pi, +\pi) \quad [12\ b] \end{cases}$$

debiendo cumplirse las condiciones indicadas en el núm. 2 de este Apéndice (fórmulas [6 a] y [6 b]) que garantizan la existencia de función de densidad espectral.

Si se trata de la [11 a] $t \in R$ y nos encontramos ante la presencia de la función de densidad espectral que corresponde a un proceso estocástico estacionario de parámetro t continuo y $\lambda \in R$. En el caso [11 b] se trata de un proceso de tipo discreto y $n \in Z$.

BIBLIOGRAFIA

BLACKMAN, R. B. and TUKEY, J. B.: *The Measurement of Power Spectra.* Dover Publications, New York, 1958.

BOX, G. E. P. and JENKINS, G. E. P.: *Time Series Analysis for Casting and Control.* Holden Day, 1970.

CRAMER, H.: *Stationary and Related Stochastic Processes.* John Wiley and Sons, 1968.

DOOB, J. L.: *Stochastic Processes.* John Wiley and Sons, 6a. Ed. 1967.

FERNÁNDEZ TROCONIZ, A.: *Probabilidades, Estadística, Procesos Aleatorios.* Estudios Grafos, 1975.

GARCÍA VILLALÓN, Julio: *Análisis Espectral de Series Temporales en Economía.* Anales I. Actuarios, 1967.

HANNAN, E. J.: *Múltiple Time Series.* John Wiley and Sons, 1970.

KOLMOGOROV, A. N.: *Sucesiones Estacionarios en los Espacios de Hilbert.* Trabajos de Estadística, 1959 (dos números).

PARZEN, E.: *The Rule of Spectral Analysis in Time Serie Analysis.* Review of the International Statistics Institute. Vol. 35, 1967, págs. 125-143.

RUZANOV, Yuri: *Procesos Aleatorios.* Edit. Mir, 1973 (Moscú).

SLULZKY, E.: *The Summations of Random Causes as the Source of the Ciclic Processes.* Econometrika, Vol. 5 de 1937.

URBELZ IBARROLA, F. Javier: *Aplicaciones del Espacio de Hilbert a la Estadística.* Anales del Instituto de Actuarios, 1975.

WIENER, Norbert: *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series.* The M. I. T. Press, Massachusett Institute of Tecnology, 3.ª Edit., 1970, Cambridge.

WOLD, Hermann, O. A.: *Series Cronológicas Estacionarias.* Trabajos de Estadística y Monografía, 1951.

YAGLOM, A. M.: *An Introduction to the Theory of Stationary Random Fonctions.* (Traducción del Ruso). Prentice-Hall, New Jersey, 1962.

NOTACIONES UTILIZADAS MAS IMPORTANTES

	Símbolos	Significado
Conjunto paramétrico tiempo	$\{t\}$	$t \in T$
Idem de tiempo discreto	$\{t\}$	$t \in Z$
Idem de tiempo continuo	$\{t\}$	$t \in R$
Proceso estocástico estacionario	$\xi(t)$	$E\,\xi(t) = 0$
Proceso estocástico estacionario conjugado	$\overline{\xi(t)}$	$E\,\overline{\xi(t)} = 0$
Covarianza estacionaria o también autocovarianza	$B(h)$	$E\,\xi(t+h)\,\overline{\xi(t)}$
Covarianza mutua estacionaria de dos procesos $\{\xi(t), \eta(t), t \in T\}$	$B_{\xi\eta}(h)$	$E\,\xi(t+h)\,\overline{\eta(t)}$
Varianza del proceso estocástico estacionario representada por $B(0)$	$\|\xi(t)\|$	$E\,\|\xi(t)\|^2$
Función de densidad espectral ($\lambda \in R$)	$f(\lambda)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt$
Función de densidad espectral $\lambda \in (-\pi, +\pi)$	$f(\lambda)$	$\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} B(n)\,e^{-i\lambda n}$
Producto escalar o producto interno del proceso $\xi(t+m)$ y del proceso $\xi(t)$ que coincide con la función de covarianza	$[\xi(t+m), \xi(t)]$	$E\,\xi(t+m)\,\overline{\xi(t)}$

OBSERVACION IMPORTANTE: El símbolo E es el utilizado en Estadística para designar la esperanza matemática de una variable aleatoria.