Universidad Carlos III de Madrid

Máster en Ciencias Actuariales y Financieras

Modelos de Semi-Markov con aplicación en el Seguro de Dependencia. Utilización de ecuaciones integro-diferenciales de Volterra (Herramienta actuarial).

Trabajo Fin de Máster

de

Roberto Sánchez Gimón

Curso 2014/2015

Tutores:

Profesor D. José Miguel Rodríguez Pardo del Castillo

Profesor D. Jesús Ramón Simón del Potro

En Madrid, a 01 de junio de 2015

CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN

1. 1. Motivación

Los procesos estocásticos se presentan como una técnica de modelización muy eficiente en el manejo de fenómenos y sucesos con riesgo. Esta es una de las principales motivaciones que me llevan a estudiar determinados procesos estocásticos con aplicación en determinados productos de seguros.

El uso de los modelos estocásticos de Semi-Markov permiten dar una visión más realista de los procesos de sucesión de estados, lo que me motiva a querer representar en la medida de lo posible como se construyen estos modelos y que ventajas e inconvenientes presentan.

Poder trabajar con formulación matemática es sino la principal motivación una de las más importantes que me lleva a trabajar con procesos estocásticos. Los procesos de Semi-Markov permiten su resolución mediante una serie de complejas ecuaciones de cálculo a las que vamos a tratar de dar solución mediante la utilización de avanzado software de modelización.

Es un buen objeto de motivo poder ver como una persona de forma individual o conjunto de personas individuales que están expuestas a determinados factores de riesgo pueden ver modelizadas sus probabilidades de acontecer determinados sucesos de riesgo, tanto por agravamiento como por mejora, para los determinados productos de seguro que se proponen en este trabajo.

La realidad demográfica actual, que se caracteriza por una sociedad que envejece unido a una baja natalidad, está dando lugar a un crecimiento de la preocupación por los futuros y previsibles problemas de dependencia que sacudirán a los más mayores de nuestro país. Para ello, es importante hacer hincapié en poder solucionar esta preocupación y es importante tomar conciencia de que se deben tomar soluciones urgentes para remediarlo, y también es lógico a la vez que se debe estudiar la evolución del fenómeno de riesgo mediante los diferentes métodos que la ciencia actuarial pone a nuestra disposición.

No menos importante es la motivación que supone trabajar con modelos de procesamiento estocástico y a la vez utilizar los recursos de la ciencia matemática para poder valorar los riesgos de cada producto de seguro. Aunar ciencia y estadística en la modelización de fenómenos aleatorios enriquece el estudio de los seguros como tales y lo que es más importante, beneficia al sector asegurado con menos recursos de nuestra población generando altas dosis de confianza y seguridad tanto para este sector como para la ciencia aseguradora.

Hay otra gran motivación que me ha llevado a la realización de este trabajo de investigación, y es el poder estudiar fenómenos de dependencia, esto es, diversas enfermedades causantes de dependencia en la población, pues el estudio de las mismas permite generar un modelo probabilístico para el estudio de los seguros privados de dependencia.

1. 2. Objetivos

En lo que se refiere a objetivos que se persiguen en este trabajo, el principal que se persigue es entender el fenómeno de la dependencia en España que se presenta tanto en grupos de avanzada edad como en otros grupos de riesgo. Por ello, se van a tener en cuenta todos aquellos grupos en riesgo de dependencia y se va a dar respuesta a este fenómeno incipiente de la dependencia en España mediante la creación de un modelo estocástico que permite obtener todos los cálculos probabilísticos necesarios para explicar el acceso al estado de dependencia de una persona en nuestro país.

Este trabajo resulta de mucho interés porque permite conocer a qué velocidad y con que probabilidad una persona tiene acceso al estado de dependencia y, además, permite cuantificar que coste supone para un país que una persona se convierta de derecho en persona dependiente y que valoración podrá recibir esta persona en estado de dependencia.

Los procesos estocásticos de Semi-Markov nos ayudan a comprender los saltos que se producen de un estado a otro y a cuantificarlos de forma más exacta que otros procesos estocásticos. Como se verá más adelante, este modelo propone explicar que una persona entra en estado de dependencia o que sale del estado de dependencia y a que tasa de probabilidad se produce ese paso.

1. 3. Breve descripción del trabajo

Este trabajo es de gran interés en la práctica actuarial ya que permite dar explicación a cualquier modelo actuarial que se caracterice por utilizar transiciones de probabilidad para pasar de un estado a otro. En este trabajo se va a caracterizar un modelo actuarial para el seguro de dependencia profundizando en la explicación matemática que tiene dicho modelo. El trabajo está basado en la utilización de procesos estocásticos pero materializado con procesos en tiempo continuo no homogéneos que tienen en cuenta la duración que tiene un asegurado desde un estado físico a otro. Estos son los modelos estocásticos de Semi-Markov en tiempo continuo no homogéneos. Son no homogéneos porque las probabilidades van cambiando con las diferentes edades del asegurado.

El trabajo hace énfasis en el fenómeno de la dependencia y aplica el modelo que hemos explicado anteriormente para tratar de explicar el comportamiento de las personas en función de sus probabilidades de paso de un estado a otro según su predisposición a ser dependientes en un momento de tiempo concreto.

Una vez que se ha explicado en qué consisten estos procesos estocásticos y porque se quieren utilizar para modelar el seguro de dependencia, se van a caracterizar estos modelos exponiendo que propiedades tienen, cual es su utilidad y que ventajas aportan en la práctica actuarial. Es necesario conocer en profundidad en que consisten estos modelos para poder exponer con claridad las ecuaciones del modelo.

Tenemos que hablar de ecuaciones del modelo porque una vez que sabemos las propiedades de los modelos de Semi-Markov y su relación con el seguro de dependencia, se van formular las probabilidades de transición. Pero las probabilidades de transición se componen a su vez de intensidades de transición que se deben calcular para poder trabajar estas ecuaciones. Una vez que se obtienen las intensidades de transición se puede montar el modelo. Pero hay que tener en cuenta que se trata de un modelo aplicado a un seguro de dependencia en el que van a participar tantos estados del individuo como grados de dependencia establece la ley actual de dependencia. La ley actual en vigor dictamina que los grados de dependencia del ser humano son tres, yendo de mayor a menor grado de dependencia en función de la imposibilidad del ser humano de poder valerse por si mismo para realizar tareas cotidianas.

De esta forma, la ley establece un grado de mayor dependencia (gran dependencia), un grado de dependencia intermedia (dependencia severa) y un grado de menor dependencia (dependiente moderada o leve). De esta forma, sabiendo que el individuo puede cambiar su estado actual de actividad por tres posibilidades de dependencia, se tienen que formular todas las probabilidades de transición considerando todas las posibilidades que se puedan producir, incluyendo que el individuo pueda pasar directamente al estado de muerte.

Conociendo todas las probabilidades de transición se pueden determinar los sistemas de ecuaciones que sujetan el modelo. Existen tantas ecuaciones como posibilidades de transición haya de los individuos. Hay que despejar cada una de las ecuaciones y la ciencia matemática permite utilizar para ello algunos recursos de aproximación como la regla del trapecio, de Gauss o el método de Simpson.

En este trabajo no sólo se formulan teóricamente estos sistemas de ecuaciones sino que también se da solución práctica a dichos sistemas. Se hace preciso apoyarse en las herramientas de programación que nos van a permitir diseñar un código con el que poder calcular de forma rápida y efectiva todas estas aproximaciones numéricas que hemos comentado.

El último paso consiste en saber que coste supone para los diferentes grupos de interés de un seguro de dependencia el modelar dicho seguro mediante modelos estocásticos de Semi-Markov. Es preciso calcular que aportaciones tendría que realizar un asegurado en estado de dependencia a su plan y que remuneración podrá recibir a cambio en el caso de entrar en estado de dependencia. De la misma forma, a una entidad aseguradora le interesará conocer que coste le supone tener contratado a un colectivo asegurado de personas dependientes si el riesgo está modelado mediante un modelo de Semi-Markov en tiempo continuo.

1. 4. Resumen de resultados

Hay varias líneas de resultados obtenidas. De un lado están los resultados obtenidos de la investigación teórica de la dependencia en España. De otro lado, están los resultados obtenidos de la investigación de los procesos estocásticos de Semi-Markov.

Por otra parte, se encuentran los resultados obtenidos de los cálculos numéricos de las probabilidades e intensidades de transición a través de las ecuaciones integro diferenciales de Volterra.

Y en último lugar se debe hablar de la evolución de los resultados numéricos que nos llevan a determinar la viabilidad del fenómeno de la dependencia en España a través de un modelo estocástico de Semi-Markov en tiempo continuo.

En lo que se refiere a los resultados del planteamiento teórico del modelo, el seguro de dependencia en España supone a día de hoy un aspecto de relevancia política fundamental.

España es una sociedad envejecida y que tiende a envejecer más con el tiempo y esto lleva a la economía a tomar medidas necesarias para cubrir este fenómeno.
Si bien, el fenómeno de la dependencia es relevante en una sociedad como la nuestra, no es menos importante tratar de explicarlo a través de los recursos que nos ofrece la ciencia actuarial. En este trabajo se da explicación a la evolución del fenómeno de la dependencia mediante modelos estocásticos complejos y basados en modelos de Semi-Markov en tiempo continuo. Se trata de modelos algo más complicados porque ponen de relieve la necesidad de manejar más variables en la explicación de los fenómenos de Markov.

Al tratarse de modelos estocásticos más complicados tanto en su estructura como en su naturaleza teórica, se hace evidente que se tiene que utilizar un tipo de estructura cuantitativa o de cálculo algo más complicada. Hay que prestar especial atención al cálculo diferencial e integral y a la composición de sistemas de ecuaciones complejos que se deben despejar mediante ecuaciones de Volterra.

En los resultados finales del modelo propuesto también hay que hacer un análisis del coste que supone modelar los seguros de dependencia mediante este modelo propuesto. Hablamos de coste en términos de pago de prima por parte del asegurado dependiente y también de coste por parte de las instituciones públicas y privadas que aseguran el riesgo de dependencia. Además de tener en cuenta el beneficio que supone este modelo para el asegurado dependiente y para la institución aseguradora pública o privada.

1. 5. Contribuciones del trabajo

Las principales aportaciones de este trabajo tienen que ver con la posibilidad de explicar el fenómeno de la dependencia a través de modelos probabilísticos que permiten cuantificar la dependencia a través de procesos estocásticos que tienen en cuenta la duración en cada uno de los estados de actividad o dependencia.

Va a permitir recoger todos aquellos tramos de tiempo no tenidos en cuenta con otros procesos estocásticos tradicionales y así poder obtener una mayor eficiencia probabilística en la evolución de los estados conducentes a la dependencia de una persona.

Como rama de la ciencia actuarial, los procesos estocásticos de Semi-Markov contribuyen a dicha ciencia actuarial, proponiendo modelos más complejos que los tradicionales y permitiendo interactuar a estos modelos con los fenómenos más habituales de la vida humana, tales como la modelización de los seguros de vida, los seguros de invalidez o los seguros de dependencia.

Es por ello que las principales contribuciones del presente trabajo de fin de máster se manifiestan a través de varias líneas importantes de investigación. Esto es, en primer lugar supone una contribución por el aprendizaje de los modelos estocásticos de Semi-Markov, aportando una importante fundamentación teórica y práctica de que son estos modelos y como se comportan en la práctica actuarial.

En segundo lugar, la contribución que supone poder representar las probabilidades de quedar en estado de dependencia a través de estos procesos estocásticos, esto es, permite representar todo el conjunto de probabilidades e intensidades de transición a través de la puesta en práctica del modelo teórico.

En siguiente lugar y no por ello menos importante es la importante contribución que supone poder explicar los procesos de Semi-Markov mediante su representación matemática a través de sistemas complejos de ecuaciones y su resolución mediante aproximación matemática de tales sistemas de ecuaciones.

Además de todo esto, contribuye a explicar y contrastar el fenómeno de la dependencia mediante la utilización de estos modelos estocásticos frente a los modelos de markov tradicionales. Permite al lector hacerse una idea de cómo se va a comportar un asegurado que pasa a ser dependiente y que coste puede suponer esto para un gobierno como el nuestro o para una compañía aseguradora y para el propio asegurado.

2. REVISIÓN DE LA LITERATURA

2.1. Aportaciones e innovaciones del trabajo

La revisión de la literatura ha consistido en hacer una detallada investigación de todas las fuentes de información relativas a la modelización de modelos de Semi-Markov en tiempo continuo no homogéneos, además de un intenso estudio de las principales ecuaciones integrales utilizadas en el estudio, como son las ecuaciones de Volterra.

Lo que se ha hecho hasta ahora es tratar los modelos de Semi-Markov aplicados a la modelización de los seguros de discapacidad pretendiendo en este trabajo modelar otro producto de seguros como es el seguro de dependencia abriendo el camino así a futuras investigaciones de otros modelos actuariales mediante la técnica de los procesos estocásticos en tiempo continuo de Semi-Markov.

Se han analizado diversas fuentes de información especializadas de las que se pretende a modo de consulta contrastarlas con otras fuentes con el objetivo de poner en común las ideas fundamentales que soportan la explicación del modelo teórico de estudio. Por lo tanto, el presente trabajo analiza diversas fuentes estadísticas y matemáticas con el objetivo de mejorar e innovar el contenido analizado.

Entre las principales innovaciones que se proponen respecto a otros documentos destacan las técnicas de aproximación de probabilidades de transición mediante métodos de cuadratura de integrales. Estos métodos permiten la aproximación de cálculos integrales complejos aproximando los valores con un error mínimo. A su vez, se hace la estimación del error esperado que se produce con estos métodos de aproximación con el objetivo de ganar en eficiencia y consistencia en el análisis de los resultados de cálculo finales.

Se introducen además un mayor número de variables que dan sentido a la modelización del seguro de dependencia mediante el modelo de Semi-Markov, ya que si bien, hasta ahora el componente de la duración no se tenía en cuenta para modelar las transiciones entre los diferentes estados de las cadenas de Markov, en los procesos de Semi-Markov se tienen en cuenta tanto la edad del asegurado, como el estado en el que se encuentra así como la duración de un asegurado desde la última transición ocurrida.

2.2. Identificación de relaciones entre la teoría y la práctica

Es importante hacer un exhaustivo estudio de identificación de relaciones entre aspectos teóricos y aspectos prácticos en este trabajo de investigación.

La parte teórica contempla un riguroso análisis de evoluciones demográficas en la parte dependiente de la población. Además de la parte dependiente, es necesario estudiar y analizar la relación de la parte dependiente de la población con la parte de población en circunstancias de no dependencia y con la parte de población que experimenta fallecimiento bien en temprana edad o fallecimiento en avanzada edad por el ciclo vital de la vida.

La parte práctica supone la realización de una serie de cálculos tanto matemáticos como estadísticos que en conjunción con las técnicas de modelización y graduación de la mortalidad y la dependencia permiten estudiar la evolución de la dependencia en nuestro país.

Por lo tanto, la parte práctica está íntimamente ligada a la parte teórica en lo que a metodología se refiere. Vamos a utilizar modelos de Semi-Markov, cuyo planteamiento teórico supone la aceptación de una serie de condiciones que vamos a tener que tener en cuenta en su modelización práctica y que nos va a permitir extraer unas conclusiones bien definidas sobre el fenómeno de la dependencia en los últimos años en España.

3. DESCRIPCIÓN DE LA MUESTRA/ HIPÓTESIS DE PARTIDA

3.1. Hipótesis de partida

Se van a establecer dos vías de investigación de la dependencia, de elaboración propia que persiguen objetivos muy parecidos y se consiguen por vías paralelas pero diferenciadas. Esta diferenciación radica en el hecho de que cada una de las líneas de investigación utiliza datos estadísticos diferentes.

En primer lugar, es necesario establecer las hipótesis que son comunes en ambas líneas de investigación y sobre las que se aplica nuestro modelo. Son las siguientes:

- Se trata de un modelo estocástico con aplicación al seguro de dependencia, y el seguro de dependencia en España se encuentra regulado bajo la legislación actual en materia de dependencia, que establece tres grados de dependencia que puede presentar un individuo, siendo estos dependencia moderada, dependencia severa y grado de gran dependencia.

- En consonancia con la hipótesis anterior, la norma en vigor aplicable al seguro de dependencia en España es la "Ley de Promoción de la Autonomía Personal y Atención a las personas en situación de dependencia".

- Existe un conjunto de individuos que se encuentran en condiciones de dependencia y que pueden ser objeto de aseguramiento, ya sea mediante la contratación de un seguro a través del sector privado o mediante la cobertura que da el sector público en concepto de ayuda a la dependencia. Nuestro trabajo se enfoca claramente desde una perspectiva de aseguramiento por parte del sector asegurador privado, como un posible método de tarificación que puede ser empleado por una compañía de seguros privada.

- En ambos modelos de investigación presentados en este trabajo se suponen como actores principales tanto la edad como la duración de las circunstancias de dependencia de los individuos.

- El rango de duraciones de la dependencia es ilimitado. Un individuo puede no tener duración en su dependencia, o tener pocas semanas de duración de la incapacidad o dependencia, hasta tener una duración de la dependencia que puede ir hasta el final de su vida.

- En ambas líneas de investigación se hace el estudio de la dependencia tanto para población de hombres como para población de mujeres con el objetivo de hacer estudios comparativos de la evolución por sexos de la dependencia en España, ya que ambas no evolucionan de la misma forma.

- Otra hipótesis fundamental del modelo es que este seguro solo se va a aplicar a aquellas personas que se encuentran ya aseguradas o ya acogidas al plan de previsión contratado. Si una persona no tiene contratado el correspondiente seguro de dependencia no se verá beneficiada por las condiciones del seguro.

- Muy parecida a la hipótesis anterior es la hipótesis de que podrán acceder al seguro de dependencia las personas que lo hayan contratado antes, durante o después del acceso al estado de dependencia.

Este conjunto de hipótesis anteriormente mencionado corresponde como hemos dicho a las hipótesis que ambas líneas de investigación tienen en común. Es el momento de distinguir las hipótesis que son propias para cada uno de los modelos objeto de nuestra investigación.

En primer lugar, y como ya veremos en uno de los apartados de este punto, planteamos una línea de estudio tomando como referencia los datos que nos ofrece el INE [1] sobre población con discapacidades y dependencias, más comúnmente conocida como Encuesta EDAD 2008. [2]

Las hipótesis de esta primera vía de investigación de la dependencia en España son las siguientes:

- Se encuentran disponibles de forma directa datos estadísticos de población dependiente en sus diferentes niveles o grados de dependencia a partir de la encuesta EDAD 2008.

- Al tratarse de una encuesta puntual, es objeto de análisis la evolución de la dependencia en el año 2008. Hemos decidido omitir en este trabajo de investigación

[1] INE. Instituto Nacional de Estadística.
[2] Encuesta EDAD 2008. Encuesta sobre Discapacidades, Autonomía personal y situaciones de Dependencia 2008.

los datos de la anterior encuesta a la de 2008, esta es, la EDDES 1999, por motivos de desactualización de los datos, también por motivos de existir ya varios trabajos que toman los datos de esa encuesta en sus investigaciones y además por motivo de que la última encuesta EDAD 2008 es la última y más reciente de que dispone el Instituto Nacional de Estadística con datos sobre población dependiente o incapacitada.

- El estudio de la dependencia se hace para población dependiente desde los 5 años de edad hasta los 100 años. Se omite en el estudio las edades inferiores a los 5 años y las edades superiores a los 100 años.

En segundo lugar, e igualmente como veremos en otro de los apartados de esta parte del trabajo, planteamos una segunda línea de investigación de la dependencia con modelos de Semi-Markov pero alimentando el modelo con datos estadísticos de la Encuesta de morbilidad hospitalaria tomados del INE y de la OMS. [3]

Las hipótesis de esta segunda línea de investigación de la dependencia en España son las siguientes:

- Se encuentran disponibles datos de enfermedades y morbilidad hospitalaria a partir de la Encuesta de morbilidad hospitalaria, la cual permite conocer la evolución de las personas enfermas y su ingreso en los hospitales.

- Vamos a tomar para nuestro modelo de investigación los datos de enfermedades que más nos interesan, y los vamos a clasificar como datos válidos de enfermedades de personas dependientes. En concreto, y como veremos más adelante, por su importancia en los últimos años, por su posición a la cabeza de las enfermedades más mortíferas y por sus menores posibilidades de curación a pesar de los avances de la medicina, se ha decidido incluir en este segundo modelo de investigación de la dependencia a enfermedades de dependientes tales como el Alzheimer, el Parkinson o Esclerosis Múltiple.

- Se analiza la evolución de las nuevas personas dependientes en las enfermedades anteriormente mencionadas para los años 2005 a 2013. A diferencia de la anterior línea de investigación que se limitaba a hacer el análisis de la dependencia para el año 2008, la encuesta de morbilidad ofrece datos de varios años que permiten hacer una valoración más rigurosa de la evolución de la dependencia en enfermos de Alzheimer, Parkinson y Esclerosis múltiple.

- Utilizamos bajo esta línea de investigación datos de altas hospitalarias para esta categoría de enfermedades pues consideramos que estos datos aportan mucha información sobre la evolución en los últimos años de estas enfermedades y dan una buena imagen de la dependencia ya que se ajustan correctamente a los datos esperados de dependencia a las distintas edades.

- El estudio de la dependencia en estos enfermos se hace para las edades comprendidas entre los 0 años y los 110 años. No se consideran edades por encima de los 110 años por motivos de imposibilidad o casi imposibilidad de existencia de individuos tan longevos. Si bien, para esta segunda línea de investigación parece muy apropiado

[3] OMS. Organización Mundial de la Salud. Ofrece datos estadísticos de salud, dependencia y enfermedades, tanto a nivel europeo como a nivel internacional.

tomar un rango de edad algo más amplio que nos permite obtener resultados más exactos y completos.

3.2. La dependencia en España y el seguro de dependencia. Situación actual

En los últimos años nuestro país ha experimentado un proceso de envejecimiento que ha llevado a nuestra población a unos niveles muy altos de población mayor o envejecida y a unos niveles más bajos de población joven. Existe un fenómeno que define muy bien este envejecimiento de la población, se trata de la rectangularización de la población.

La rectangularización supone un aumento de la supervivencia de la población a edades más avanzadas. Morimos más tarde por eso en el último año de análisis la curva de supervivencia de la población se encuentra más alejada mientras que en los primeros años del estudio, la curva es más corta ya que la población fallece antes dado que la esperanza de vida no era tan elevada como la de los años recientes.

Gráficamente, el fenómeno de la rectangularización tiene la siguiente forma:

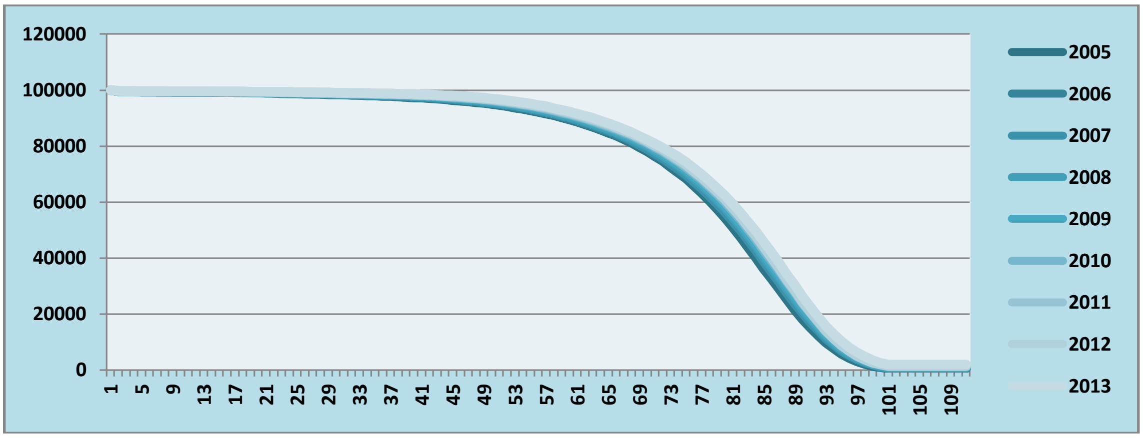


Ilustración 1 Rectangularización de la población

En el anterior gráfico, como ya se ha comentado se observa que las curvas interiores corresponden a la población superviviente de los primeros años de análisis mientras que las curvas exteriores corresponden a la población actual, años 2012 – 2013, donde hay mayor población superviviente a edades más altas.

La situación actual de la dependencia en España viene representada por el siguiente análisis comparativo entre hombres y mujeres a las diferentes edades de vida. Según la última encuesta sobre discapacidades realizada por la encuesta EDAD 2008 el número de hombres dependientes y de mujeres distan en cierto nivel a las diferentes edades consideradas.

Además, se puede hacer un análisis muy ilustrativo de la tasa de dependencia en España total que nos indica hacia donde se dirige el número de personas dependientes como indicativo de un posible envejecimiento de la población y de aumento del número de discapacidades y por lo tanto el aumento de la dependencia en nuestro país.

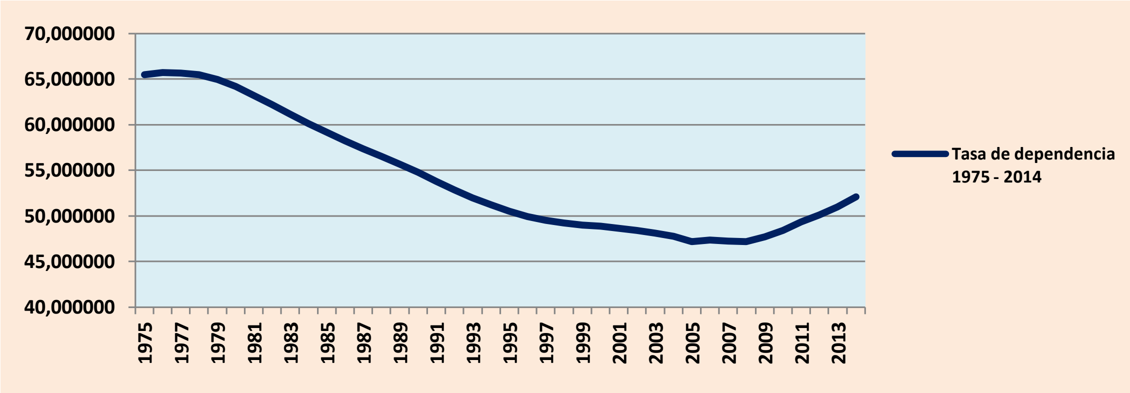


Ilustración 2 Tasa de dependencia 1975 - 2014

El grafico anterior representa la dependencia en España en los últimos 40 años. Se ha experimentado una caída en las tasas de dependencia, si bien, en los últimos 8 años se ha incrementado el número de personas dependientes en nuestro país, lo que ha motivado poner mayores esfuerzos en mejorar la vida de las personas en estado de dependencia, con mayores ayudas y con la creación de seguros para personas en estado de dependencia que permitan mejorar las pocas o nulas ayudas que da el estado por padecer esta situación.

Este trabajo pretende estudiar las características de la dependencia en España mediante la aplicación de métodos estadísticos basados en modelos de Semi-Markov, que son muy precisos a la hora de tarificar los seguros de dependencia, ya que tienen más variables en cuenta además de la edad de la persona asegurada.

En este análisis de la situación actual de la dependencia en España cabe estudiar también la diferencia en cuanto a la dependencia entre hombres y mujeres. El siguiente gráfico muestra la diferencia entre hombres y mujeres según su situación de dependencia en los diferentes rangos de edad.

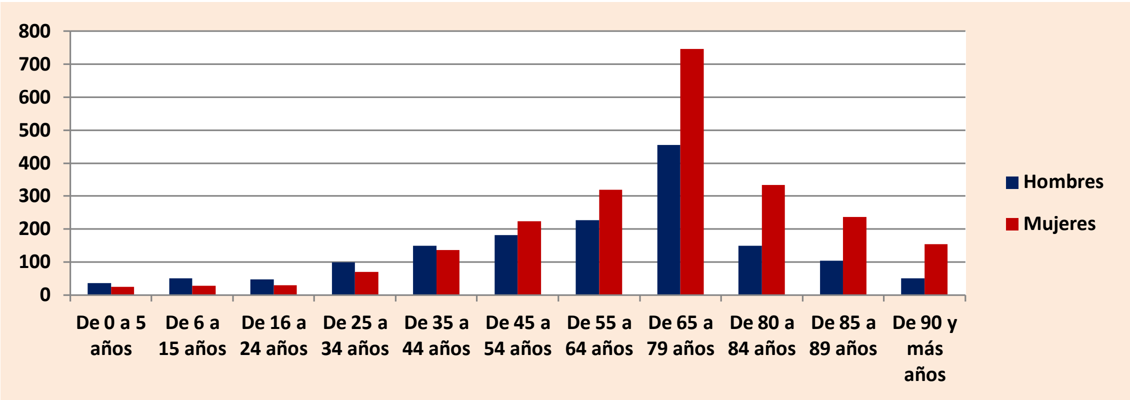


Ilustración 3 Discapacidad por edad y sexo

En este gráfico se observa que la dependencia es mayor en hombres hasta los 44 años de edad, mientras que la dependencia empieza a ser mayor en las mujeres que en los hombres a partir de los 44 años de edad. Según los datos de la encuesta EDAD 2008 se experimenta además un pico más alto de dependencia de los 65 a los 79 años tanto para hombres como para mujeres mientras que a partir de los 79 años la situación de dependencia empieza a descender para ambos grupos.

Hasta ahora el análisis se ha centrado en conocer la evolución de la dependencia en España en los últimos años y saber que la dependencia en hombres y mujeres varía en los diferentes rangos de edad.

3.3. Modelo con datos estadísticos del INE de dependencia moderada, severa y gran dependencia. Encuesta EDAD 2008.

Como introdujimos anteriormente, el primer modelo que hemos estudiado para analizar la dependencia con nuestro modelo de Semi-Markov toma como base los datos del INE sobre población dependiente en sus distintos niveles o grados de dependencia.

Gráficamente, la encuesta EDAD 2008 arroja los siguientes resultados sobre población dependiente:

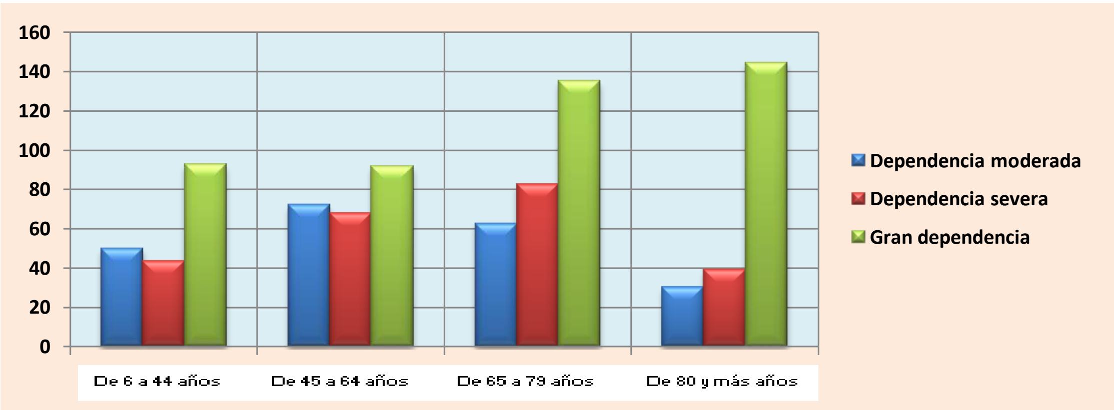


Ilustración 4 Grado de dependencia por rango de edad en hombres

Este gráfico presenta la evolución con la edad del nivel de dependencia en varones. A medida que avanza la edad, los hombres dejan de ser menos dependientes moderados y menos dependientes severos y pasan a tener un mayor grado de gran dependencia.

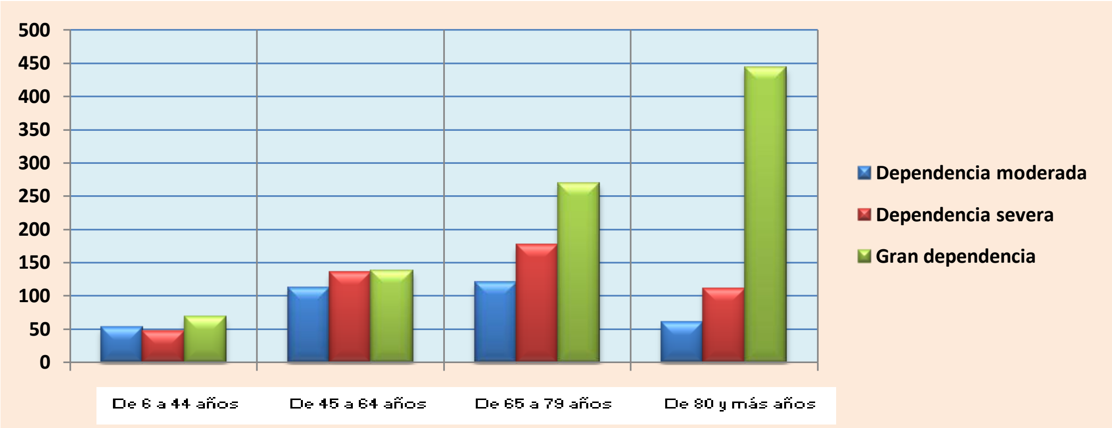


Ilustración 5 Grado de dependencia por rango de edad en mujeres

El caso de las mujeres es muy parecido, a medida que avanzan en edad su grado de dependencia se intensifica. Para edades avanzadas no son tan dependientes moderadas o severas y si son más grandes dependientes. La diferencia con los varones es que las mujeres tienen un grado de dependencia mucho mayor que el de los hombres.

Se va a tomar como muestra de partida el grupo de población española en estado de dependencia. Vamos a tomar como muestra de la población el conjunto de personas con edades comprendidas entre los 5 años de edad y los 100 años.

Por un lado, vamos a tomar un modelo con datos estadísticos de dependencia en función de los diferentes grados de dependencia que establece la legislación española.

Analizamos los diferentes datos de los estados de dependencia tanto para hombres como para mujeres pudiendo analizar así el comportamiento de la dependencia desde el punto de vista de las intensidades de transición, desde el punto de vista del cálculo de las probabilidades de transición así como nos va a permitir realizar la tarificación a partir del comportamiento de estas probabilidades de transición. Este análisis es posible, como decimos, a partir de estos datos de la encuesta de discapacidad y dependencia del año 2008 (EDAD 2008).

		Total	Discapacidad moderada	Discapacidad severa	Discapacidad total	No consta
Total	Ambos sexos	2822,3	560,8	702,2	1383,6	175,7
	Varones	985,3	214,9	232,9	464	73,5
	Mujeres	1837	345,9	469,3	919,6	102,2
De 6 a 64 años	Ambos sexos	1033	287,3	292,8	390,3	62,7
	Varones	450,4	122,1	111,2	184,2	32,8
	Mujeres	582,6	165,2	181,6	206	29,8
De 6 a 44 años	Ambos sexos	376,7	102,6	90,2	160,8	23,2
	Varones	200,9	50	43,4	92,6	15
	Mujeres	175,9	52,6	46,8	68,2	8,2
De 45 a 64 años	Ambos sexos	656,3	184,7	202,6	229,4	39,5
	Varones	249,5	72,1	67,9	91,7	17,8
	Mujeres	406,8	112,6	134,8	137,8	21,6
De 65 a 79 años	Ambos sexos	905,3	183,3	258,9	405,1	58
	Varones	302,2	62,7	82,5	135,2	21,8
	Mujeres	603,1	120,6	176,5	269,9	36,2
De 80 y más años	Ambos sexos	883,9	90,2	150,4	588,2	55,1
	Varones	232,7	30,1	39,1	144,5	18,9
	Mujeres	651,2	60,1	111,3	443,7	36,2

El cuadro anterior muestra para los diferentes rangos de edad el total de población en cada una de los niveles de dependencia, existiendo según la encuesta de 2008 mayor número de población dependiente en el grado de gran dependencia.

3.4. Modelo con datos estadísticos de morbilidad del INE y OMS

De otro lado, exponemos en este trabajo un segundo método de análisis más específico que el anterior, basando el análisis en datos estadísticos de población europea para algunas enfermedades muy conocidas causantes de dependencia.

Para este análisis vamos a tomar como hipótesis fundamentales que estas causas de dependencia en la población europea se encuentran clasificadas según su importancia como enfermedad causante de dependencia en los diferentes grados o niveles de dependencia que establece la ley española.

De esta forma, vamos a ver qué tomando como referencia datos de altas hospitalarias de enfermos considerados dependientes tanto de Alzheimer, de Parkinson y de Esclerosis múltiple, se pueden graduar para determinar la evolución de las probabilidades de transición y poder hacer estudios de tarificación en actividad aseguradora.

3.4.1. Dependencia de enfermos de Alzheimer (gran dependencia)

Con el objetivo de poder evaluar un modelo de dependencia basado en la evolución de enfermedades causantes de dependencia, se ha tomado la decisión de tomar como suposición que las altas hospitalarias que se producen de enfermos con Alzheimer se encuentran en su estado avanzado de la enfermedad, esto es, presentan síntomas muy avanzados de dependencia, por lo que se encuentran clasificados en el nivel de gran dependencia.

A efectos de este trabajo de investigación, se podrían establecer otras hipótesis sobre el grado de dependencia de los enfermos de Alzheimer, esto es, en vez de considerar al total de los enfermos de Alzheimer como dependientes en su fase más avanzada se podría suponer que una parte de ellos están en su fase inicial, otros en su fase intermedia y otros en su fase más avanzada. Pero por simplicidad en el trabajo consideramos que todos los enfermos dados de alta se encuentran en su fase más avanzada, que por razones de desconocimiento de los síntomas no han logrado conocer el estado de su enfermedad en su estado inicial.

El siguiente gráfico muestra la evolución de los pacientes dependientes por enfermedad de Alzheimer en hombres para los años 2005 a 2013. Estos datos dan una imagen realista de la evolución de las altas hospitalarias de esta enfermedad asumiendo la hipótesis de que todos los individuos dependientes por esta enfermedad se encuentran en la fase más avanzada de la enfermedad.

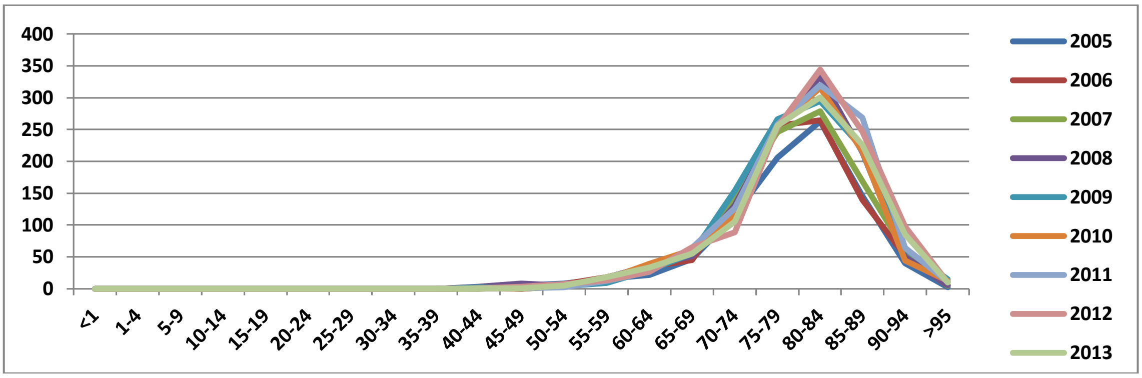


Ilustración 6 Enfermos de Alzheimer en grado de gran dependencia. 2005 a 2013. Hombres

La representación gráfica de la evolución de la dependencia por Alzheimer en mujeres es la siguiente:

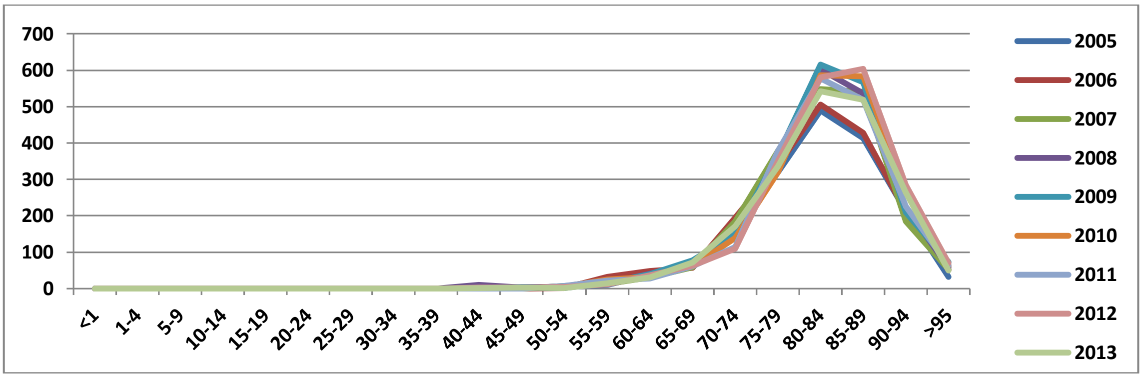


Ilustración 7 Enfermos de Alzheimer en grado de gran dependencia. 2005 a 2013. Mujeres

3.4.2. Dependencia de enfermos de Parkinson (dependencia severa)

En lo que se refiere a las altas hospitalarias de enfermos de Parkinson, se va a establecer la suposición de que todos los pacientes dados de alta con esta enfermedad se encuentran en la fase intermedia de avance de la enfermedad, es decir, todos los enfermos son considerados dependientes severos. Igualmente por razones de simplicidad hemos decidido considerar el total de estos enfermos en fase de dependencia severa pero se pueden establecer otras muchas hipótesis sobre el grado de dependencia de los pacientes con Parkinson, pudiendo pertenecer una parte de ellos a la fase de dependencia moderada, otros a la de dependencia severa y otros a la de gran dependencia, pero como decimos, por razones de simplicidad en el modelo vamos a establecer la hipótesis de que son todos dependientes severos.

El siguiente gráfico muestra la evolución de los enfermos dependientes por Parkinson en su fase de dependencia severa. Estos datos dan una imagen realista de la evolución de la enfermedad de Parkinson en hombres asumiendo la hipótesis de que estos individuos dependientes lo son en su fase de dependencia severa.

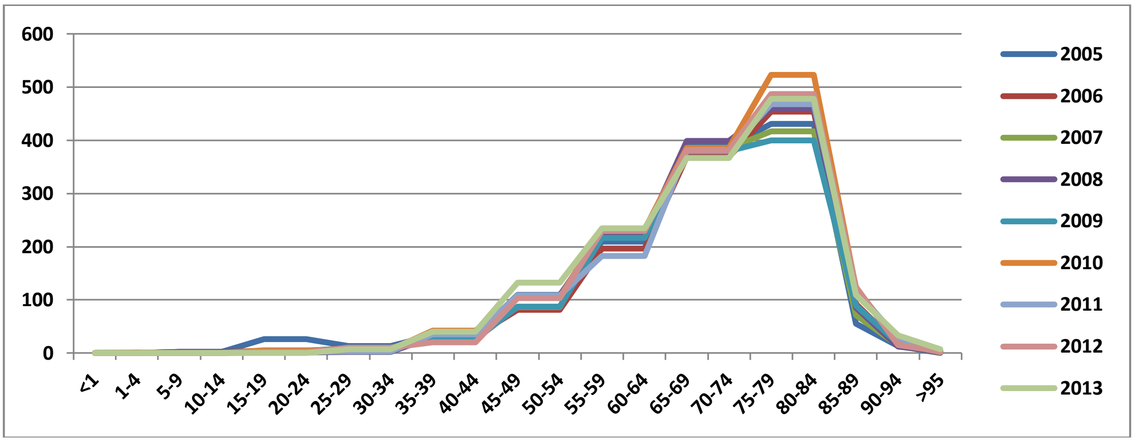


Ilustración 8 Enfermos de Parkinson en grado de dependencia severa. 2005 a 2013. Hombres

La representación gráfica de la evolución de la dependencia por Parkinson en mujeres es la siguiente:

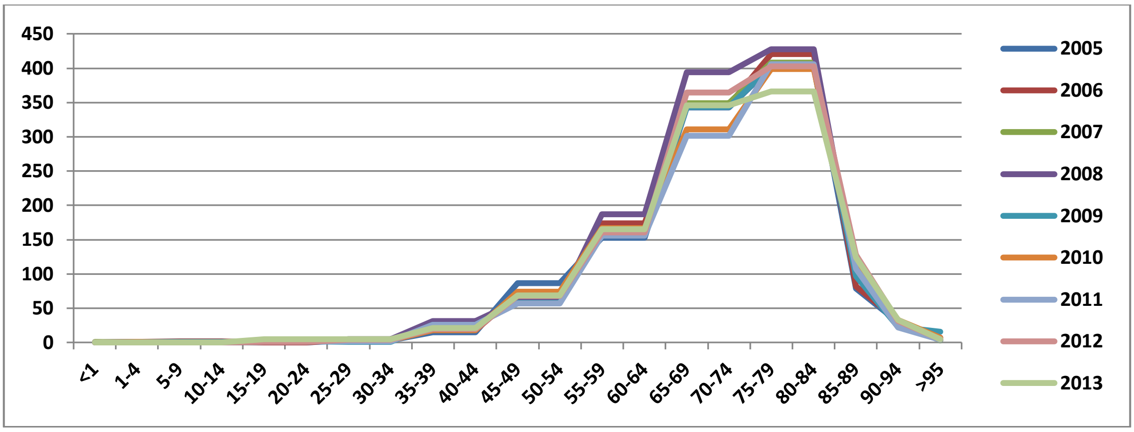


Ilustración 9 Enfermos de Parkinson en grado de dependencia severa. 2005 a 2013. Mujeres

Al igual que los enfermos dependientes por Alzheimer, los dependientes por enfermedad de Parkinson entran en esta dependencia con unos años de adelanto a los dependientes por Alzheimer, concentrándose en edades más avanzadas al igual que los enfermos de Alzheimer el mayor número de personas dependientes.

3.4.3. Dependencia de enfermos de Esclerosis múltiple (dependencia moderada)

La última causa de dependencia que hemos incorporado en nuestro segundo modelo de dependencia de Semi-Markov, basándonos en datos de morbilidad hospitalaria, es la Esclerosis múltiple.

Con el objetivo de modelar las intensidades y probabilidades de transición de este modelo, se decide asumir la hipótesis de que los enfermos de Esclerosis múltiple son individuos dependientes en su fase inicial de dependencia, es decir, se encuentran en la fase de dependencia moderada.

El gráfico siguiente muestra la evolución de los hombres dependientes por la enfermedad de la esclerosis múltiple desde los años 2005 a 2013 y da una idea muy realista de la evolución de la esclerosis múltiple en los últimos años, asumiendo como decimos, que se trata de personas dependientes en su fase menos avanzada de la enfermedad, esto es, en la fase de dependencia moderada.

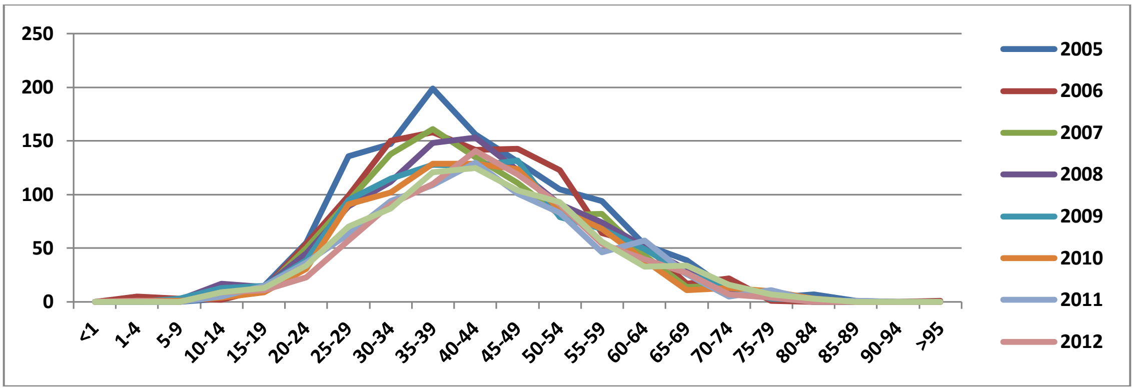


Ilustración 10 Enfermos de Esclerosis múltiple en grado de dependencia moderada. 2005 a 2013. Hombres

La representación gráfica de la evolución de la dependencia por Esclerosis múltiple en mujeres es la siguiente:

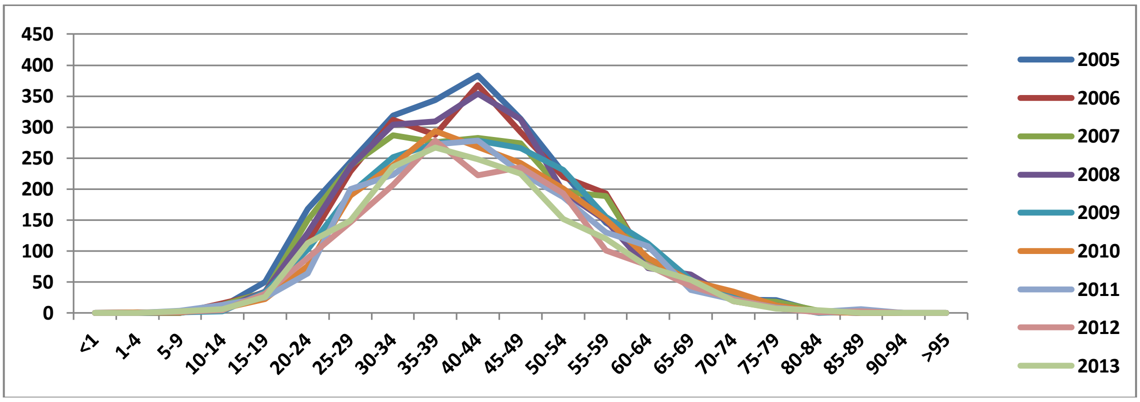


Ilustración 11 Enfermos de Esclerosis múltiple en grado de dependencia moderada. 2005 a 2013. Mujeres

A diferencia de la población dependiente por Alzheimer o Parkinson, los enfermos dependientes por Esclerosis múltiple suelen concentrarse a edades más tempranas que las otras enfermedades, mientras que se va reduciendo la concentración de pacientes dependientes por esta enfermedad en edades más avanzadas.

El siguiente gráfico es muy representativo de la evolución de las tres enfermedades de forma conjunta. Se trata de los datos que aporta la Encuesta EDAD 2008 y da una imagen muy realista del volumen de enfermos de Alzheimer, Parkinson y Esclerosis múltiple.

En el caso de los hombres, en el siguiente gráfico se muestra la evolución de las tres causas de dependencia y de forma paralela a lo comentado anteriormente, los enfermos de gran dependencia por Alzheimer se concentran a edades más avanzadas, los enfermos dependientes severos por Parkinson empiezan a aparecer algunos años antes que los enfermos por Alzheimer y, en último lugar, los enfermos dependientes por Esclerosis múltiple se concentran principalmente a edades más tempranas cayendo la pendiente a edades más avanzadas.

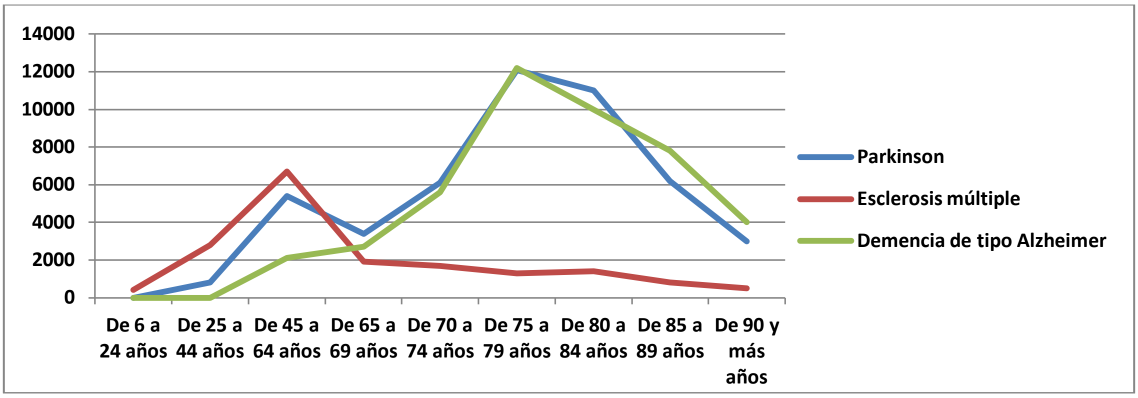


Ilustración 12 Enfermos de Esclerosis múltiple, Parkinson y Alzheimer. Encuesta EDAD 2008. Hombres

La representación gráfica de la evolución de la población con Alzheimer, Parkinson y Esclerosis múltiple en mujeres a partir de los datos de la Encuesta EDAD 2008 es la siguiente:

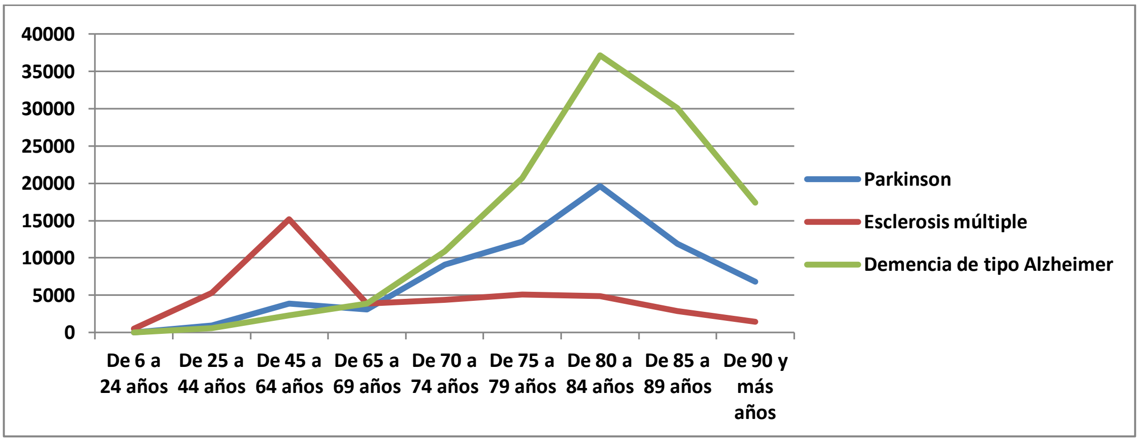


Ilustración 13 Enfermos de Esclerosis múltiple, Parkinson y Alzheimer. Encuesta EDAD 2008. Mujeres

3.5. Clasificación de las dependencias del modelo. Criterios cuantificadores de la dependencia

Una vez que hemos obtenido los datos estadísticos necesarios para poder desarrollar nuestro modelo de dependencia basado en la experiencia, tenemos que cuantificar estos datos en función de los criterios que nos proponen los diferentes medios que estudian la dependencia en España.

Esto es, para poder declarar que una persona pertenece a un nivel u otro de dependencia en nuestro modelo, primero hay que elaborar un modelo de dependencias basado en las deficiencias de cada individuo. Es decir, para que una persona se encuentre clasificada en un nivel de dependencia se tiene que valorar el nivel de insuficiencia de esa persona para poder realizar con normalidad determinadas tareas. Y para esto, asignaremos unas determinadas puntuaciones del grado de insuficiencia para realizar cada tarea y así en función de estas valoraciones podemos clasificar las diferentes causas de dependencia.

Para determinar el nivel de dependencia que ocupa cada una de las causas de dependencia estudiadas en este modelo, vamos a considerar todas las relaciones entre causas de dependencia, insuficiencia o no para realizar las tareas y puntuaciones a esas insuficiencias.

Toda esta información va a estar disponible a través de un cuadro relacional en el que se van a clasificar fácilmente todas las dependencias según la puntuación obtenida a la hora de realizar una determinada tarea.

A partir de los datos de enfermedades en población dependiente, se permite valorar el grado de dependencia de la población con discapacidad en función de la dificultad que presentan para realizar determinadas tareas esenciales en la vida cotidiana y que en función de la dificultad que tienen para realizar una o varias tareas reciben una puntuación con el objetivo de ser clasificados en una de las tres grandes categorías de dependencia, ya sea moderada, severa o gran dependencia.

Con el objetivo de seguir un orden lógico, la clasificación de la población dependiente en función de los distintos grados de dependencia empieza por visualizar con detalle la tipología de las enfermedades/deficiencias que propone el Instituto Nacional de Estadística a partir de la Encuesta EDAD 2008.

Permite que las enfermedades en población dependiente sean las siguientes:

Enfermedad crónica EDAD 2008
Lesión Medular
Parkinson
Esclerosis lateral
Esclerosis múltiple
Agenesia / Amputaciones
Laringectomías
Artritis / Artrosis
Artritis reumatoide. Espondilitis anquilopoyética
Distrofia muscular
Espina bífida / hidrocefalia
Infarto de miocardio. Cardiopatía isquémica
Accidentes cerebrovasculares
Síndrome de Down
Autismo y otros trastornos asociados al autismo
Parálisis cerebral
Daño cerebral adquirido
Demencia de tipo Alzheimer
Otras demencias
Esquizofrenia
Depresión
Trastorno bipolar
Retinosis pigmentaria

Miopía magna
Degeneración macular senil
Retinopatía diabética
Glaucoma
Cataratas
VIH / SIDA
Enfermedades raras
Insuficiencia renal

La población dependiente a causa de las enfermedades anteriormente clasificadas puede presentar dificultades a la hora de realizar determinadas tareas o actividades en su vida cotidiana. La encuesta EDAD 2008 hace una clasificación de estas tareas esenciales y en función de la dificultad que presente cada individuo a la hora de realizar cada una de ellas por razón de su deficiencia o enfermedad, el baremo de puntuación de las discapacidades dará para cada individuo una valoración específica. En el siguiente cuadro se puede visualizar dicha clasificación de tareas:

Actividades Básicas de la Vida Diaria (ABVD)
Visión
Percibir cualquier imagen
Tareas visuales de detalle
Tareas visuales de conjunto
Otros problemas de visión
Audición
Recibir cualquier sonido
Audición de sonidos fuertes
Escuchar el habla
Comunicación
Producir mensajes hablados
Recibir mensajes hablados
Comunicación de mensajes escritos
Comunicación de mensajes de gestos, señales o símbolos
Mantener una conversación
Comunicación a través de dispositivos y técnicas de comunicación
Aprendizaje y aplicación de conocimientos y desarrollo de tareas
Uso intencionado de los sentidos (mirar, escuchar, .)
Aprendizaje básico (leer, escribir, contar)
Realizar tareas sencillas
Realizar tareas complejas
Movilidad
Cambiar las posturas corporales básicas

Mantener la posición del cuerpo
Desplazarse dentro del hogar
Desplazarse fuera del hogar
Desplazarse utilizando medios de transporte como pasajero
Conducir vehículos
Levantar y llevar objetos
Mover objetos con las extremidades superiores
Uso fino de la mano
Autocuidado
Lavarse
Cuidados de las partes del cuerpo
Higiene personal relacionada con la micción
Higiene personal relacionada con la defecación
Higiene personal relacionada con la menstruación
Vestirse y desvestirse
Comer y beber
Cuidado de la propia salud: cumplir las prescripciones médicas
Cuidado de la propia salud: evitar situaciones de peligro
Vida doméstica
Adquisición de bienes y servicios
Preparar comidas
Realizar los quehaceres de la casa
Interacciones y relaciones personales
Interacciones interpersonales básicas
Relacionarse con extraños
Relaciones formales
Relaciones sociales informales
Relaciones familiares
Relaciones sentimentales

Conocidas las enfermedades de la población dependiente y conocidas también las tareas cotidianas de cada individuo en situación de dependencia, la Ley de dependencia 39/2006 establece un baremo de clasificación que en función de la puntuación obtenida en cada una de las anteriores tareas permite clasificar a la población dependiente en cada uno de los grados de dependencia que marca dicha ley. Por lo tanto, el baremo de clasificación que propone la ley de dependencia es el siguiente:

Puntuación	Grado	Dependencia	Nivel
De 0 a 24 puntos	**Sin grado reconocido**	**-**	**-**
De 25 a 39 puntos	**Grado I**	**Moderada**	**1**

De 40 a 49 puntos	**Grado I**	**Moderada**	**2**
De 50 a 64 puntos	**Grado II**	**Severa**	**1**
De 65 a 74 puntos	**Grado II**	**Severa**	**2**
De 75 a 89 puntos	**Grado III**	**Gran dependencia**	**1**
De 90 a 100 puntos	**Grado III**	**Gran dependencia**	**2**

Según el baremo que propone la Ley de dependencia se asigna mayor puntuación en función del mayor grado de dependencia recogido por cada individuo. Cuanta menor puntuación se asigna, menor es la incapacidad del individuo para realizar determinadas tareas de su vida cotidiana y será clasificado en un grado inferior de dependencia.

3.6. Obtención de los parámetros de las variables

Una vez que disponemos de todas las estadísticas basadas en la experiencia con las que vamos a formular el seguro de dependencia, a partir de estos datos estadísticos tenemos que obtener los parámetros necesarios para incluirlos en las fórmulas de graduación que permiten obtener las intensidades de transición. Con ello podemos calcular las intensidades de transición siguientes:

- Intensidades de transición de una persona activa a muerta (mortalidad de activos).
- Intensidades de transición de una persona activa a dependiente (entrada en dependencia).
- Intensidades de transición de una persona dependiente a activa (reactivación o recuperación de población con signos de dependencia).
- Intensidades de transición de una persona dependiente a muerta (mortalidad de población dependiente).

El objetivo fundamental de este trabajo es manejar datos estadísticos de personas que se encuentran en las distintas categorías de dependencia o grados de dependencia, de tal forma que se puedan graduar probabilidades de transición de la forma más exacta posible. No acudimos en ningún momento a tablas clásicas de mortalidad ni dependencia que no permiten ver la realidad de la dependencia actual.

A partir de herramientas de modelización de datos estadísticos podemos calcular los parámetros de nuestro modelo. En los siguientes apartados vamos a ir analizando los resultados de los parámetros estimados para cada una de las transiciones planteadas en el trabajo.

- **Estimación de parámetros para la transición de una persona de activo a dependiente (entrada en dependencia)**

En primer lugar, realizamos el análisis de parámetros para el Modelo 1 con datos de experiencia tomados de la Encuesta EDAD 2008.

Para la estimación de los parámetros hemos tomado como herramienta de modelización el análisis de regresión lineal múltiple y hemos graduado los datos mediante mínimos cuadrados ordinarios. El resultado que se obtiene tiene la siguiente forma para hombres con dependencia moderada:

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-2.593306	0.285683	-9.077557	0.0000
A1MODHOM	0.115285	0.020560	5.607239	0.0000
A2MODHOM	-0.003548	0.000407	-8.724254	0.0000
A3MODHOM	3.04E-05	2.33E-06	13.03795	0.0000

R-squared	0.953986	Mean dependent var	-0.338202
Adjusted R-squared	0.952633	S.D. dependent var	2.479092
S.E. of regression	0.539551	Akaike info criterion	1.640846
Sum squared resid	29.69374	Schwarz criterion	1.741353
Log likelihood	-82.96483	Hannan-Quinn criter.	1.681582
F-statistic	704.9053	Durbin-Watson stat	0.069754
Prob(F-statistic)	0.000000		

De los resultados obtenidos destaca el valor de los niveles de significación de cada una de las variables del modelo. Todos los p-valor de los regresores se encuentran por debajo del 5%, lo que quiere decir que son significativos y guardan relación con la tasa de dependencia o variable a explicar.

Además, el coeficiente de determinación R^2 se encuentra por encima del 95%, lo que indica que el modelo, es decir, la variable dependiente a estudiar está bien explicada por las variables independientes.

La representación gráfica de la graduación de las intensidades de transición al estado de dependencia moderada es la siguiente:

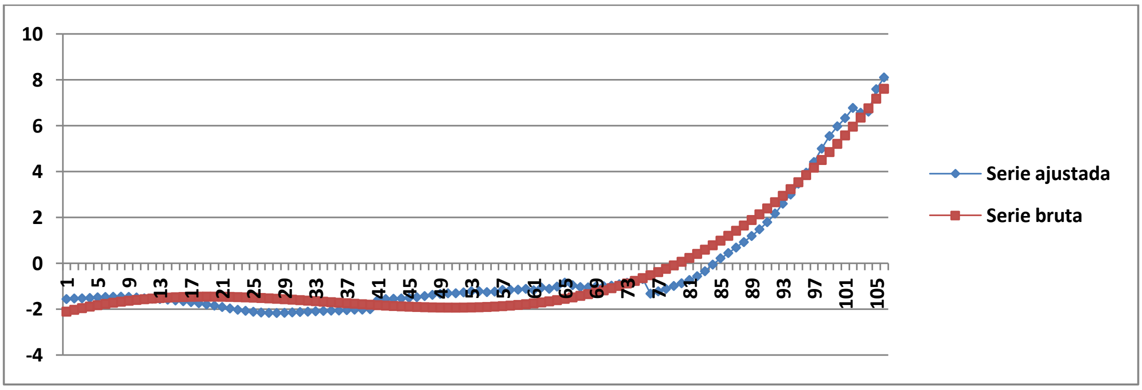


Ilustración 14 Intensidades de transición Dependencia Moderada. Serie Ajustada frente a Serie Bruta. Encuesta EDAD 2008. Hombres

Este gráfico representa la tasa o intensidad de transición a la que los hombres entran en estado de dependencia moderada con los datos obtenidos de la experiencia a partir de la encuesta de la EDAD 2008.

La línea azul es la tasa o intensidad sin ajuste, mientras que la línea roja es la fuerza de dependencia una vez que se ha hecho el ajuste paramétrico correspondiente.

Se puede ver que los hombres que entran en dependencia moderada lo hacen con mayor velocidad a partir de los 65 años hasta el final de su vida.

Para hombres con dependencia severa los resultados de los parámetros estimados son:

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-2.590564	0.283565	-9.135696	0.0000
A1SEVHOM	0.098004	0.020408	4.802340	0.0000
A2SEVHOM	-0.003088	0.000404	-7.649892	0.0000
A3SEVHOM	2.78E-05	2.31E-06	12.01588	0.0000

R-squared	0.958765	Mean dependent var	-0.287606
Adjusted R-squared	0.957552	S.D. dependent var	2.599393
S.E. of regression	0.535550	Akaike info criterion	1.625962
Sum squared resid	29.25504	Schwarz criterion	1.726469
Log likelihood	-82.17596	Hannan-Quinn criter.	1.666698
F-statistic	790.5396	Durbin-Watson stat	0.075515
Prob(F-statistic)	0.000000		

Y la representación gráfica del ajuste es la siguiente:

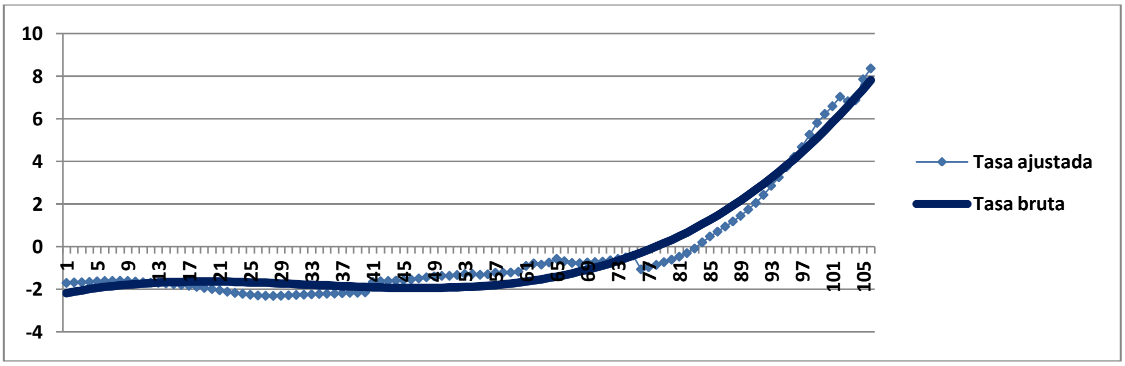


Ilustración 15 Intensidades de transición Dependencia Severa. Serie Ajustada frente a Serie Bruta. Encuesta EDAD 2008. Hombres

En el caso en que los hombres entran en dependencia severa, estos lo hacen con mayor velocidad a partir de los 60 años.

Para hombres con gran dependencia:

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-1.522853	0.184775	-8.241651	0.0000
A1GRANHOM	0.074712	0.013298	5.618365	0.0000
A2GRANHOM	-0.002858	0.000263	-10.86307	0.0000
A3GRANHOM	2.80E-05	1.51E-06	18.60590	0.0000

R-squared	0.985412	Mean dependent var	0.507244
Adjusted R-squared	0.984983	S.D. dependent var	2.847726
S.E. of regression	0.348973	Akaike info criterion	0.769359
Sum squared resid	12.42175	Schwarz criterion	0.869866
Log likelihood	-36.77601	Hannan-Quinn criter.	0.810095
F-statistic	2296.676	Durbin-Watson stat	0.113226
Prob(F-statistic)	0.000000		

La representación gráfica es la siguiente:

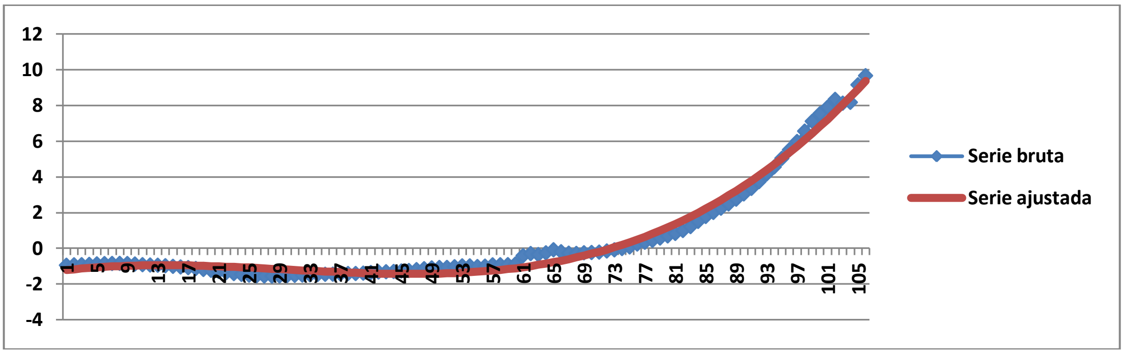


Ilustración 16 Intensidades de transición Gran Dependencia. Serie Ajustada frente a Serie Bruta. Encuesta EDAD 2008. Hombres

Con los datos de la Encuesta de discapacidad y dependencia del año 2008, los hombres que entran en estado de gran dependencia lo hacen con mayor rapidez a partir de los 56 años.

Estos son los parámetros obtenidos para el cálculo de las intensidades de transición de una persona activa a dependiente para sexo masculino. Utilizando mínimos cuadrados ordinarios se obtienen estos parámetros que hay que incluir en la fórmula de graduación de las intensidades de transición de una persona activa a dependiente. Una vez que se incluyen estos parámetros en las fórmulas de graduación se obtiene la evolución de las intensidades de transición de un hombre de activo a dependiente.

Para hacer este cálculo hemos introducido variables basadas en graduaciones de la dependencia en España.

En la elección del modelo final de obtención de parámetros hay que tener en consideración el valor del coeficiente de determinación, que el R^2 ajustado sea el mayor de todos y tener también en consideración el análisis de significatividad individual de las variables independientes del modelo, a fin de que el modelo finalmente elegido sea el que mejor represente a los datos.

Puesto que en el trabajo estamos haciendo un análisis de la graduación de la dependencia tanto en hombres como en mujeres, se tienen que analizar también los resultados obtenidos de la graduación de parámetros para el caso de las mujeres.

El resultado que se quiere obtener tiene la siguiente forma para mujeres con dependencia moderada:

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-2.681988	0.359169	-7.467207	0.0000
A1MODMUJ	0.127635	0.025849	4.937785	0.0000
A2MODMUJ	-0.003574	0.000511	-6.989273	0.0000
A3MODMUJ	2.93E-05	2.93E-06	10.00080	0.0000

R-squared	0.918050	Mean dependent var	-0.205862
Adjusted R-squared	0.915640	S.D. dependent var	2.335486
S.E. of regression	0.678338	Akaike info criterion	2.098663
Sum squared resid	46.93452	Schwarz criterion	2.199170
Log likelihood	-107.2291	Hannan-Quinn criter.	2.139399
F-statistic	380.8875	Durbin-Watson stat	0.057974
Prob(F-statistic)	0.000000		

En el caso de mujeres con dependencia severa los resultados son:

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-2.667577	0.359336	-7.423631	0.0000
A1SEVMUJ	0.109831	0.025861	4.247039	0.0000
A2SEVMUJ	-0.003038	0.000512	-5.938832	0.0000
A3SEVMUJ	2.63E-05	2.93E-06	8.987223	0.0000

R-squared	0.931437	Mean dependent var	0.018110
Adjusted R-squared	0.929420	S.D. dependent var	2.554517
S.E. of regression	0.678654	Akaike info criterion	2.099594
Sum squared resid	46.97821	Schwarz criterion	2.200101
Log likelihood	-107.2785	Hannan-Quinn criter.	2.140330
F-statistic	461.8944	Durbin-Watson stat	0.065269
Prob(F-statistic)	0.000000		

Finalmente, para mujeres con gran dependencia se obtienen los siguientes parámetros para el modelo ajustado:

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-1.856895	0.255153	-7.277582	0.0000
A1GRANMUJ	0.071969	0.018363	3.919277	0.0002
A2GRANMUJ	-0.002427	0.000363	-6.681860	0.0000
A3GRANMUJ	2.46E-05	2.08E-06	11.81647	0.0000

R-squared	0.973875	Mean dependent var	0.628904
Adjusted R-squared	0.973107	S.D. dependent var	2.938498
S.E. of regression	0.481890	Akaike info criterion	1.414802
Sum squared resid	23.68620	Schwarz criterion	1.515309
Log likelihood	-70.98452	Hannan-Quinn criter.	1.455538
F-statistic	1267.438	Durbin-Watson stat	0.111275
Prob(F-statistic)	0.000000		

El valor del R^2 ajustado es elevado, nuestros datos son significativos para poder utilizarlos en la graduación de las intensidades de transición.

A continuación, se expone un resumen comparativo de las transiciones al estado de dependencia en sus tres niveles, moderado, severo y gran dependiente, de los valores ya ajustados en el caso de mujeres:

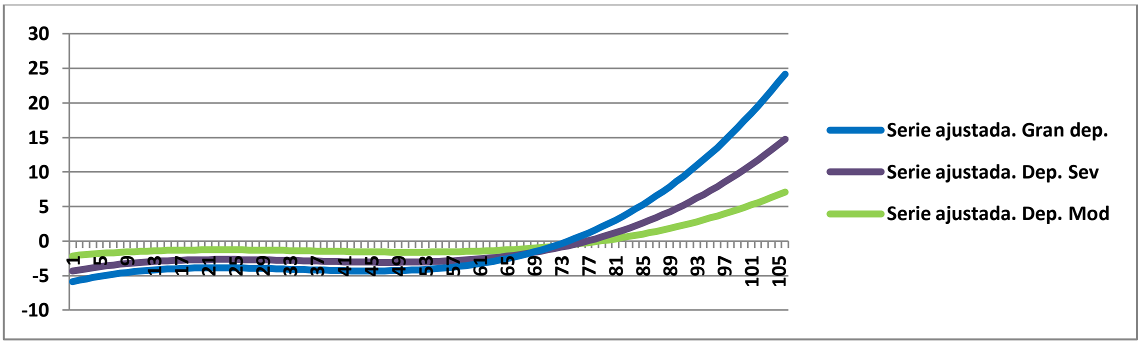


Ilustración 17 Intensidades de transición Dependencia moderada, severa y gran dependencia. Serie Ajustada Encuesta EDAD 2008. Mujeres

Este gráfico es muy representativo, ya que en el caso de las mujeres, te dice a qué edad la entrada en dependencia de las mujeres se acrecienta.

Las mujeres pasan del estado normal de actividad o salud plena al estado de dependencia moderada con mayor velocidad a partir de los 70 años de edad. Y entran en estado de dependencia severa con mayor velocidad a partir de los 65 años. Mientras que la edad a la que se intensifica su entrada en gran dependencia es a los 76 años.

De aquí se puede extraer como conclusión que las mujeres entran en dependencia en cualquiera de sus tres niveles mucho más tarde que los hombres.

En segundo lugar, realizamos el análisis de parámetros para el Modelo 2 con datos de experiencia tomados de la Encuesta de morbilidad del INE y la OMS para los años 2005 a 2013.

Sin necesidad de hacer un test tan exhaustivo como el realizado para el Modelo 1 a partir de datos de dependencia de la Encuesta EDAD 2008, para el modelo 2 realizado a partir de datos de experiencia de enfermedades en personas dependientes, permite que extraigamos una serie de resultados del comportamiento de las enfermedades objeto de estudio en este modelo, esto es, datos graduados sobre la evolución de las intensidades de transición en cada uno de los estados del modelo teniendo en consideración las intensidades de los enfermos de Alzheimer, Parkinson y Esclerosis múltiple

El siguiente gráfico representaría la evolución, tomando como punto de referencia los datos de altas hospitalarias de hombres desde 2007 a 2013, de la intensidad de transición al estado de dependencia moderada, es decir, la intensidad o fuerza a la que una persona entra en dependencia por la enfermedad de la Esclerosis múltiple según el modelo 2 de estudio.

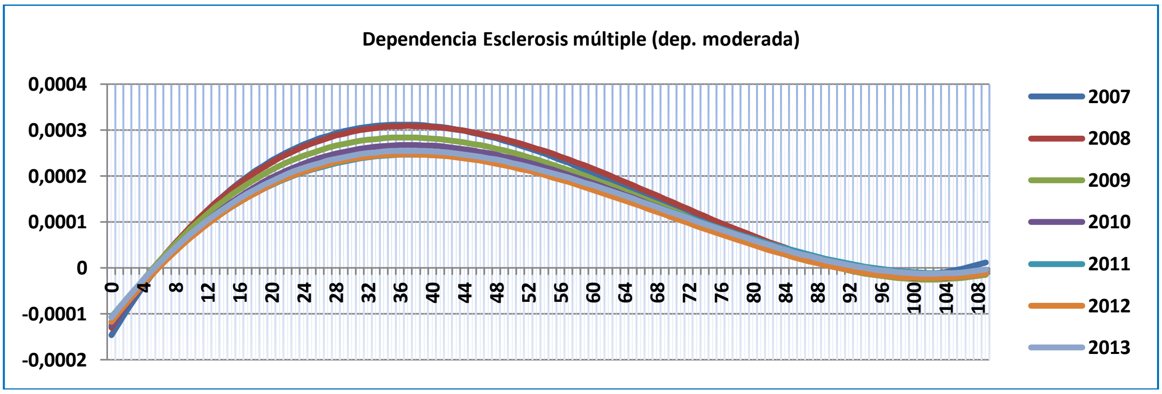


Ilustración 18 Datos ajustados de la evolución de enfermos dependientes por enfermedad de Esclerosis múltiple 2007-2013. Hombres

Según los datos analizados a partir de la Encuesta de morbilidad hospitalaria del INE, la evolución de la Esclerosis múltiple se muestra positiva presentando en el último año de estudio (2013) un menor número de entradas de enfermos si tomamos como punto de referencia y de comparación el primer año de análisis (2007). La graduación de estas intensidades supone un punto de referencia muy importante en la modelización de las probabilidades de transición con ecuaciones de Volterra.

En contraste con los enfermos dependientes por Esclerosis múltiple, cuya evolución está marcada por una mayor concentración de casos a edades tempranas, las personas enfermas y dependientes por enfermedad de Parkinson presentan el mayor número de casos a edades avanzadas. La siguiente imagen muestra que estos enfermos, encuadrados según la hipótesis de este modelo en el grupo de dependientes severos, experimentan una evolución positiva de su fuerza de dependencia al aumentar su edad. Para hacer la representación hemos tomado el corte de hombres con edades entre 70 y 110 años entre los años 2005 y 2013.

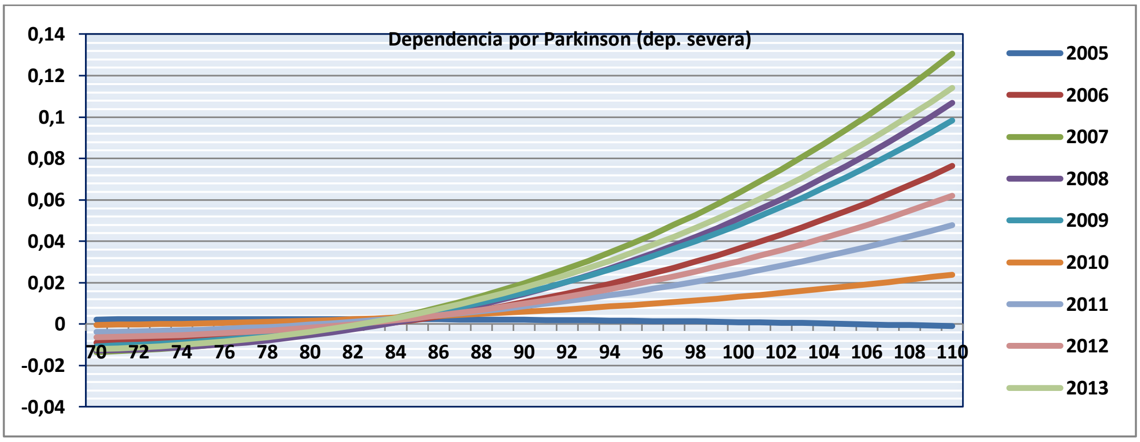


Ilustración 19 Datos ajustados de la evolución de enfermos dependientes por enfermedad de Parkinson 2005-2013. Hombres

En el caso de la enfermedad de Parkinson, cuyo mayor riesgo se encuentra a edades avanzadas, según los datos que hemos manejado en nuestra parametrización podemos concluir que la evolución de los enfermos dependientes por esta causa no está tan clara como lo era en los enfermos por Esclerosis múltiple, pues si bien hay una notorio descenso de casos en los últimos años, en el año 2013 se produce una nueva subida repentina de los casos de enfermos con Parkinson. Es muy relevante el conjunto de datos extraídos en este punto de cara a hacer una modelización realista de la dependencia en enfermos de esta categoría.

En último lugar y como parte de esta investigación, los enfermos dependientes por causa de Alzheimer presentan características que merecen la pena estudiar. Igual que la enfermedad de Parkinson, el Alzheimer es una enfermedad destacada actualmente entre las enfermedades mentales y con aún reducidas vías de solución a la misma. El Alzheimer tiene su mayor exponente en población de avanzada edad agotando su etapa final de vida sin aparente mejoría.

Este estudio pretende dar una imagen de cómo evoluciona esta enfermedad en lo que a tasas de dependencia se refiere, tomando como corte de referencia a hombres con edades comprendidas entre 60 y 110 años desde el año 2005 a 2013.

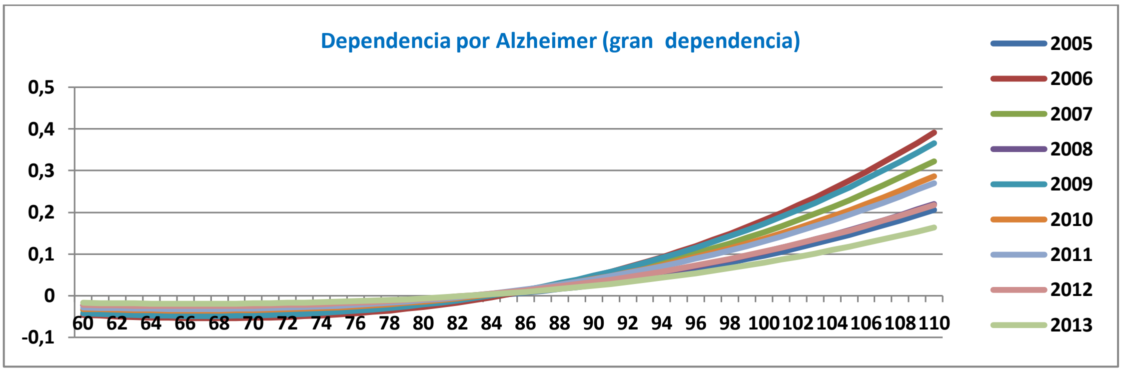


Ilustración 20 Datos ajustados de la evolución de enfermos dependientes por enfermedad de Alzheimer 2005-2013. Hombres

Se puede observar como los dependientes por enfermedad de Alzheimer, bajo la suposición de este segundo modelo de que se encuentran clasificados en la fase más avanzada de dependencia (gran dependencia), evolucionan de forma positiva a lo largo del transcurrir de los años, es decir, las entradas nuevas por casos de Alzheimer se van reduciendo desde el año 2005 al 2013, siendo en este último año donde menos casos por enfermedad de Alzheimer se producen. Se trata de un hecho relevante y un buen medidor de los avances en esta enfermedad y en nuestro modelo supone un punto de partida muy interesante en la construcción de las ecuaciones fundamentales del modelo.

- **Estimación de parámetros para la transición de una persona de dependiente a activo (recuperación o reactivación)**

Se trata de obtener la estimación ajustada de las tasas de reactivación de la población dependiente al estado de actividad o de salud. El ajuste de los datos se va a realizar tanto para el modelo 1 de la Encuesta EDAD 2008 como para el modelo 2 de la Encuesta de morbilidad desde los años 2005 a 2013.

En primer lugar, a partir de los datos sin ajustar de la evolución de las tasas de recuperación de la Encuesta 2008 se pueden extraer una serie de resultados ajustados en cada una de transiciones del modelo, ya sea para la recuperación de población dependiente moderada, severa o gran dependiente al estado normal de actividad.

Los resultados obtenidos de la estimación de parámetros en hombres con dependencia moderada son los siguientes:

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.180966	0.032455	36.38740	0.0000
B	-0.102804	0.005045	-20.37724	0.0000
CO	0.003918	0.000261	15.02874	0.0000
P	-7.34E-05	5.86E-06	-12.53172	0.0000
Q	6.56E-07	5.92E-08	11.08114	0.0000
S	-2.23E-09	2.20E-10	-10.11602	0.0000

R-squared	0.980776	Mean dependent var	0.105612
Adjusted R-squared	0.979708	S.D. dependent var	0.147464
S.E. of regression	0.021006	Akaike info criterion	-4.827544
Sum squared resid	0.039713	Schwarz criterion	-4.667272
Log likelihood	237.7221	Hannan-Quinn criter.	-4.762759

F-statistic	918.3412	Durbin-Watson stat	0.280432
Prob(F-statistic)	0.000000		

Por otro lado, los resultados obtenidos de la estimación de parámetros en hombres con dependencia severa tienen la siguiente forma:

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.576074	0.041984	37.53957	0.0000
B1	-0.138138	0.006526	-21.16649	0.0000
CO1	0.005303	0.000337	15.72467	0.0000
P1	-9.99E-05	7.58E-06	-13.18760	0.0000
Q1	8.95E-07	7.66E-08	11.68539	0.0000
S1	-3.04E-09	2.85E-10	-10.65449	0.0000

R-squared	0.982289	Mean dependent var	0.134881
Adjusted R-squared	0.981305	S.D. dependent var	0.198741
S.E. of regression	0.027174	Akaike info criterion	-4.312681
Sum squared resid	0.066456	Schwarz criterion	-4.152409
Log likelihood	213.0087	Hannan-Quinn criter.	-4.247896
F-statistic	998.3265	Durbin-Watson stat	0.280303
Prob(F-statistic)	0.000000		

Finalmente, los resultados obtenidos de la graduación de las tasas de recuperación en hombres con gran dependencia son los siguientes:

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.352983	0.007310	48.28502	0.0000
B2	-0.031254	0.001136	-27.50350	0.0000
CO2	0.001187	5.87E-05	20.22126	0.0000
P2	-2.17E-05	1.32E-06	-16.41357	0.0000
Q2	1.86E-07	1.33E-08	13.94722	0.0000
S2	-6.05E-10	4.96E-11	-12.17951	0.0000

R-squared	0.988348	Mean dependent var	0.032087
Adjusted R-squared	0.987700	S.D. dependent var	0.042664
S.E. of regression	0.004732	Akaike info criterion	-7.808675
Sum squared resid	0.002015	Schwarz criterion	-7.648404
Log likelihood	380.8164	Hannan-Quinn criter.	-7.743891
F-statistic	1526.771	Durbin-Watson stat	0.323738
Prob(F-statistic)	0.000000		

En los tres resultados anteriores, los parámetros estimados determinan una buena calidad del modelo. Todos los coeficientes presentan un p-valor inferior al 5% y además el coeficiente de determinación R^2 y el coeficiente de determinación ajustado son muy elevados, por encima del 95%, determinando que la tasa de recuperación del modelo de dependencia se encuentra bien explicada por las variables independientes.

En el siguiente gráfico se muestra la representación conjunta de las intensidades de transición del estado de dependencia al estado de actividad (recuperación) para el caso de los hombres en sus tres niveles de dependencia:

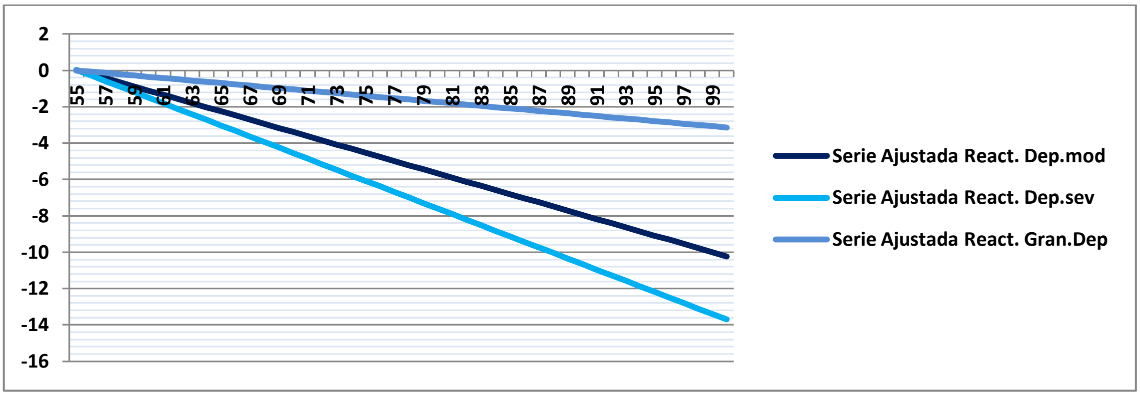


Ilustración 21 Intensidades de recuperación de Dependencia moderada, severa y gran dependencia. Serie Ajustada. Encuesta EDAD 2008. Hombres

En el caso de las intensidades de recuperación, donde en los modelos de Semi-Markov además de la edad interviene la duración, a medida que aumenta la edad de un individuo la intensidad de recuperación va disminuyendo. Asimismo, a medida que aumenta la duración de la dependencia del individuo la intensidad de reactivación también va disminuyendo, es decir, hay menos probabilidad que una persona dependiente se recupere cuanto más dure su dependencia.

En el caso de las mujeres los resultados son los siguientes para mujeres con dependencia moderada:

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.069030	0.031795	33.62240	0.0000
B3	-0.093573	0.004942	-18.93271	0.0000
CO3	0.003616	0.000255	14.15739	0.0000
P3	-6.90E-05	5.74E-06	-12.02859	0.0000
Q3	6.27E-07	5.80E-08	10.81847	0.0000
S3	-2.16E-09	2.16E-10	-10.00649	0.0000

R-squared	0.978449	Mean dependent var	0.090623
Adjusted R-squared	0.977252	S.D. dependent var	0.136441
S.E. of regression	0.020579	Akaike info criterion	-4.868645
Sum squared resid	0.038114	Schwarz criterion	-4.708373
Log likelihood	239.6950	Hannan-Quinn criter.	-4.803860
F-statistic	817.2250	Durbin-Watson stat	0.278031
Prob(F-statistic)	0.000000		

Los resultados obtenidos de la graduación de las tasas de recuperación en mujeres con dependencia severa son los siguientes:

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.346239	0.041783	32.21988	0.0000
B4	-0.117531	0.006495	-18.09579	0.0000
CO4	0.004538	0.000336	13.51985	0.0000
P4	-8.67E-05	7.54E-06	-11.49446	0.0000
Q4	7.88E-07	7.62E-08	10.33624	0.0000
S4	-2.71E-09	2.84E-10	-9.546771	0.0000

R-squared	0.977288	Mean dependent var	0.110589

Adjusted R-squared	0.976027	S.D. dependent var	0.174660
S.E. of regression	0.027043	Akaike info criterion	-4.322302
Sum squared resid	0.065820	Schwarz criterion	-4.162030
Log likelihood	213.4705	Hannan-Quinn criter.	-4.257517
F-statistic	774.5495	Durbin-Watson stat	0.275278
Prob(F-statistic)	0.000000		

Finalmente, la estimación de parámetros arroja los siguientes resultados de la graduación de las tasas de recuperación en mujeres con gran dependencia:

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.637146	0.018302	34.81219	0.0000
B5	-0.055795	0.002845	-19.61157	0.0000
CO5	0.002150	0.000147	14.62512	0.0000
P5	-4.08E-05	3.30E-06	-12.34626	0.0000
Q5	3.67E-07	3.34E-08	11.00168	0.0000
S5	-1.25E-09	1.24E-10	-10.06850	0.0000

R-squared	0.980144	Mean dependent var	0.052852
Adjusted R-squared	0.979041	S.D. dependent var	0.081825
S.E. of regression	0.011846	Akaike info criterion	-5.973211
Sum squared resid	0.012629	Schwarz criterion	-5.812940
Log likelihood	292.7141	Hannan-Quinn criter.	-5.908427
F-statistic	888.5373	Durbin-Watson stat	0.280060
Prob(F-statistic)	0.000000		

La representación gráfica de las intensidades de recuperación del estado de dependencia en sus tres niveles de dependencia al estado de actividad en mujeres es la siguiente:

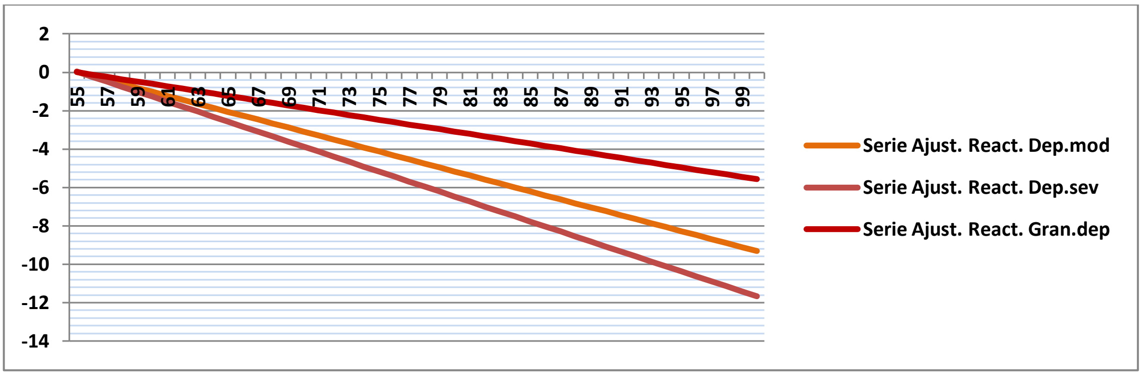


Ilustración 22 Intensidades de recuperación de Dependencia moderada, severa y gran dependencia. Serie Ajustada. Encuesta EDAD 2008. Mujeres

Al igual que para el caso de hombres, la intensidad de reactivación disminuye a medida que aumenta tanto la edad como la duración de la dependencia. Se está asumiendo una duración de 5 años pero la representación puede variar en función de la duración que se introduzca en el modelo.

En segundo lugar, permite que ahora representemos los resultados de los parámetros ajustados para los datos de experiencia de la Encuesta de morbilidad del INE.

El siguiente gráfico representa la evolución, tomando como punto de referencia los datos de altas hospitalarias de hombres y mujeres en el año 2013, de la intensidad de transición al estado de actividad, es decir, la intensidad o fuerza a la que una persona regresa al estado de plena salud que se encuentra actualmente dependiente por enfermedad de Esclerosis múltiple.

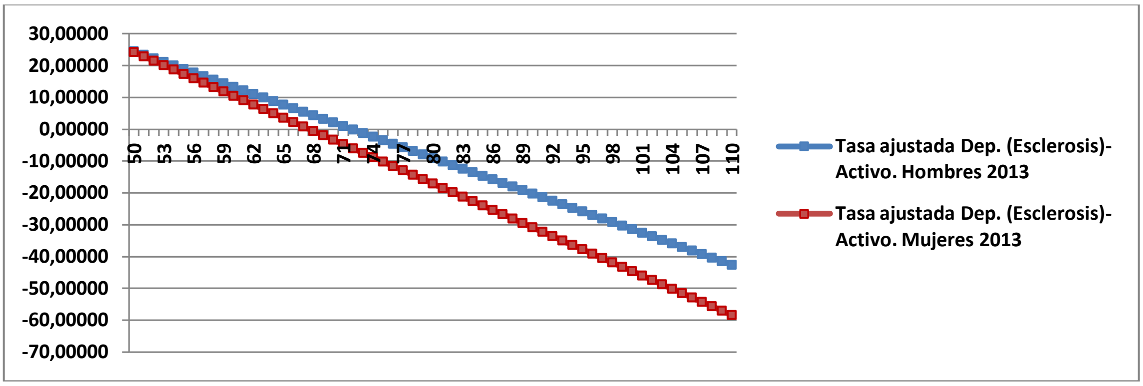


Ilustración 23 Intensidades de recuperación de Dependencia moderada (Esclerosis múltiple). Serie Ajustada. Encuesta de Morbilidad Hospitalaria. Año 2013. Hombres y mujeres

A medida que aumenta la edad de los hombres con Esclerosis múltiple disminuye la intensidad de recuperación. De igual forma, a medida que aumenta la duración de la dependencia en personas con Esclerosis múltiple (grado moderado) disminuye la intensidad de reactivación al estado normal de salud.

- **Estimación de parámetros para la transición de una persona de dependiente a fallecido (mortalidad desde dependiente)**

El objetivo ahora es ajustar las tasas de mortalidad de la población en estado de dependencia moderada, severa y gran dependencia. Al igual que las intensidades de transición de reactivación, la mortalidad de los dependientes en los modelos de Semi-Markov depende también de la edad y de la duración de dicha dependencia.

Como en los casos anteriores, permite que el ajuste se realice en primera instancia para el análisis de la dependencia del Modelo 1 de la Encuesta EDAD 2008.

A continuación, se muestran los resultados del ajuste de parámetros para la evolución de las tasas de mortalidad de hombres con dependencia moderada, tomando como referencia las tasas brutas del año 2008.

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-15.86120	1.961773	-8.085136	0.0000
A1	-0.797114	0.471455	-1.690753	0.0944
A2	0.076612	0.041311	1.854490	0.0670
B	-0.003111	0.001766	-1.762269	0.0815
CO	6.76E-05	4.08E-05	1.657438	0.1010
N	-8.14E-07	5.19E-07	-1.567321	0.1206
R	5.19E-09	3.42E-09	1.516338	0.1330
S	-1.38E-11	9.12E-12	-1.517837	0.1326

R-squared	0.977354	Mean dependent var	-13.83312
Adjusted R-squared	0.975553	S.D. dependent var	3.206367
S.E. of regression	0.501333	Akaike info criterion	1.536564
Sum squared resid	22.11748	Schwarz criterion	1.750259
Log likelihood	-65.75505	Hannan-Quinn criter.	1.622943
F-statistic	542.5640	Durbin-Watson stat	0.716307
Prob(F-statistic)	0.000000		

Los resultados obtenidos de la graduación de las tasas de mortalidad en hombres con dependencia severa son los siguientes:

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-15.71853	2.063256	-7.618315	0.0000
A1SH	-0.767242	0.495844	-1.547347	0.1254
A2SH	0.074846	0.043448	1.722645	0.0885
BSH	-0.003096	0.001857	-1.667215	0.0990
COSH	6.92E-05	4.29E-05	1.612379	0.1105
NSH	-8.64E-07	5.46E-07	-1.581765	0.1173
RSH	5.73E-09	3.60E-09	1.591362	0.1151
SSH	-1.58E-11	9.59E-12	-1.648310	0.1029

R-squared	0.968873	Mean dependent var	-13.89035
Adjusted R-squared	0.966397	S.D. dependent var	2.876334
S.E. of regression	0.527267	Akaike info criterion	1.637437
Sum squared resid	24.46494	Schwarz criterion	1.851132
Log likelihood	-70.59697	Hannan-Quinn criter.	1.723816
F-statistic	391.2994	Durbin-Watson stat	0.672776
Prob(F-statistic)	0.000000		

En último lugar, se muestran los resultados extraídos de la graduación de las tasas de mortalidad en hombres con gran dependencia.

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-16.64913	1.870889	-8.899045	0.0000
A1GH	-0.964468	0.449614	-2.145102	0.0347
A2GH	0.098707	0.039398	2.505399	0.0141
BGH	-0.004437	0.001684	-2.635133	0.0099
COGH	0.000107	3.89E-05	2.756384	0.0071
NGH	-1.42E-06	4.95E-07	-2.858906	0.0053
RGH	9.62E-09	3.26E-09	2.948567	0.0041
SGH	-2.64E-11	8.70E-12	-3.039025	0.0031

R-squared	0.971479	Mean dependent var	-15.37332
Adjusted R-squared	0.969210	S.D. dependent var	2.724719
S.E. of regression	0.478108	Akaike info criterion	1.441694
Sum squared resid	20.11565	Schwarz criterion	1.655389
Log likelihood	-61.20130	Hannan-Quinn criter.	1.528073
F-statistic	428.2042	Durbin-Watson stat	0.693779
Prob(F-statistic)	0.000000		

La siguiente representación gráfica conjunta determina que a medida que aumenta la edad la intensidad de mortalidad de un hombre dependiente tiende a aumentar.

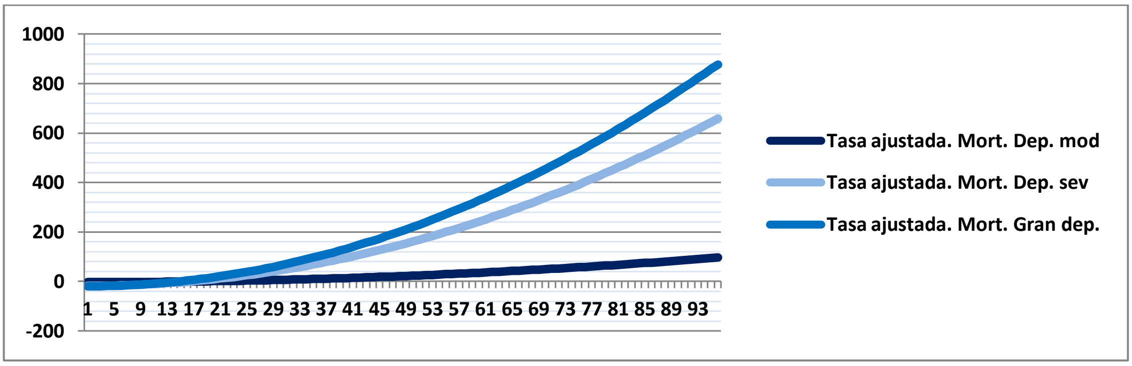


Ilustración 24 Tasas ajustadas de Mortalidad de Dependientes moderados, severos y gran dependientes. Encuesta EDAD 2008. Hombres

En cuanto al análisis de la duración, a medida que aumenta la duración la intensidad de mortalidad desde dependiente tiende a disminuir pues existe menos presión a que una persona que lleva muchos años en situación de dependencia muera de repente. Para hacer este análisis se ha tomado como referencia una duración de 5 años pero la representación gráfica puede ir variando en función de que vayamos modificando la duración.

Como en el caso de los hombres es necesario hacer el análisis de parámetros en el caso de mujeres con el objetivo de hacer un análisis comparativo de las graduaciones de parámetros resultantes.

Los resultados obtenidos para mujeres con dependencia moderada son como siguen:

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-22.47494	1.841334	-12.20579	0.0000
A1MM	0.882578	0.442511	1.994475	0.0492
A2MM	-0.092890	0.038775	-2.395596	0.0187
BMM	0.004594	0.001657	2.772308	0.0068
COMM	-0.000114	3.83E-05	-2.989899	0.0036
NMM	1.50E-06	4.87E-07	3.071865	0.0028
RMM	-9.74E-09	3.21E-09	-3.031346	0.0032
SMM	2.47E-11	8.56E-12	2.887997	0.0049

R-squared	0.982106	Mean dependent var	-15.51949
Adjusted R-squared	0.980683	S.D. dependent var	3.385616
S.E. of regression	0.470555	Akaike info criterion	1.409847
Sum squared resid	19.48513	Schwarz criterion	1.623543
Log likelihood	-59.67267	Hannan-Quinn criter.	1.496226
F-statistic	689.9834	Durbin-Watson stat	0.815937
Prob(F-statistic)	0.000000		

Mientras que para el grado de dependencia severa en mujeres, los resultados de los parámetros estimados son los siguientes:

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-21.58990	1.911256	-11.29619	0.0000
A1SM	0.721826	0.459315	1.571526	0.1196
A2SM	-0.079648	0.040248	-1.978938	0.0509
BSM	0.004110	0.001720	2.389393	0.0190
COSM	-0.000106	3.97E-05	-2.659034	0.0093
NSM	1.41E-06	5.06E-07	2.794368	0.0064

RSM	-9.35E-09	3.33E-09	-2.805663	0.0062
SSM	2.41E-11	8.89E-12	2.712718	0.0080

R-squared	0.972504	Mean dependent var	-15.88572
Adjusted R-squared	0.970317	S.D. dependent var	2.834945
S.E. of regression	0.488423	Akaike info criterion	1.484387
Sum squared resid	20.99306	Schwarz criterion	1.698083
Log likelihood	-63.25059	Hannan-Quinn criter.	1.570767
F-statistic	444.6449	Durbin-Watson stat	0.808691
Prob(F-statistic)	0.000000		

Finalmente, los parámetros de las tasas de mortalidad ajustadas en mujeres para el grado máximo de dependencia, es decir, para gran dependencia, tienen la siguiente forma:

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-21.52393	1.766929	-12.18155	0.0000
A1GM	0.461012	0.424630	1.085679	0.2806
A2GM	-0.049707	0.037208	-1.335908	0.1850
BGM	0.002492	0.001590	1.567400	0.1206
COGM	-6.08E-05	3.67E-05	-1.656672	0.1011
NGM	7.70E-07	4.68E-07	1.646769	0.1032
RGM	-4.82E-09	3.08E-09	-1.564316	0.1213
SGM	1.17E-11	8.21E-12	1.426806	0.1572

R-squared	0.960249	Mean dependent var	-16.94645
Adjusted R-squared	0.957087	S.D. dependent var	2.179716
S.E. of regression	0.451541	Akaike info criterion	1.327352
Sum squared resid	17.94222	Schwarz criterion	1.541048
Log likelihood	-55.71291	Hannan-Quinn criter.	1.413731
F-statistic	303.6796	Durbin-Watson stat	0.872472
Prob(F-statistic)	0.000000		

La representación gráfica conjunta en mujeres para las intensidades de mortalidad desde el estado de dependencia para los tres grados o niveles de la misma es la siguiente:

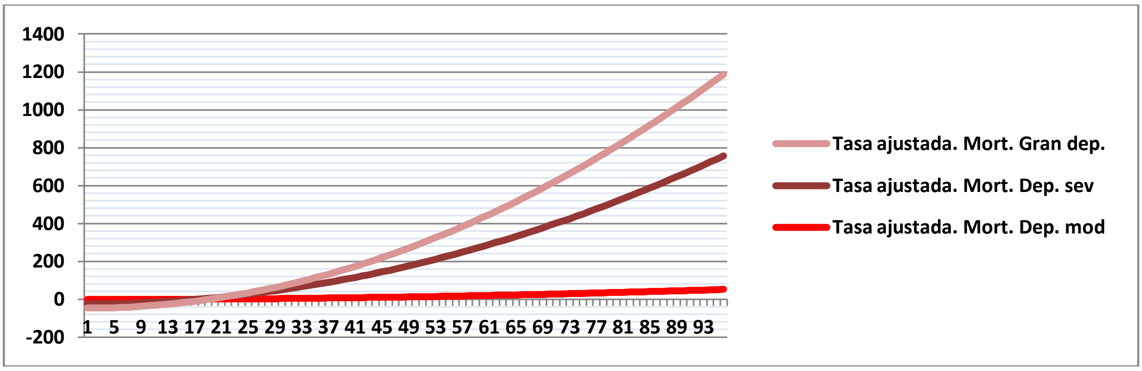


Ilustración 25 Tasas ajustadas de Mortalidad de Dependientes moderados, severos y gran dependientes. Encuesta EDAD 2008. Mujeres

Para el segundo modelo que estamos estudiando, tomando como referencia la experiencia de la Encuesta de morbilidad del INE y la OMS, es necesario realizar un estudio de los parámetros para conocer la evolución de las tasas de mortalidad de los enfermos dependientes por Esclerosis múltiple, Parkinson y Alzheimer, asumiendo que se encuentran en su grado de dependencia moderada, severa y gran dependencia respectivamente.

El objetivo del trabajo es conocer la evolución de dichas tasas ajustadas desde el año 2005 al 2013 para que de esta forma se pueda dar una imagen fiel y realista de cómo evoluciona la mortalidad en personas dependientes por Alzheimer, Parkinson y Esclerosis múltiple, y conocer así hacia qué dirección se está yendo en los avances de la medicina.

El siguiente gráfico muestra la evolución de las intensidades de transición de la mortalidad de hombres enfermos de Parkinson en el año 2013 (asumiendo que son todos dependientes severos) y tomando en consideración su mortalidad bajo el análisis de duración de la dependencia de 1 a 10 años.

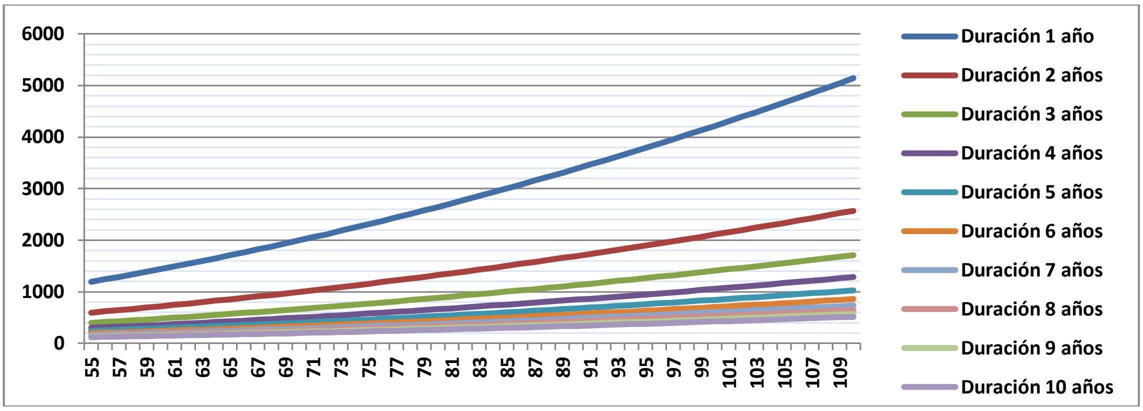


Ilustración 26 Tasas ajustadas de Mortalidad de Dependientes severos por Parkinson. Encuesta de Morbilidad hospitalaria INE. Año 2013. Duraciones de 1 a 10 años.

En el gráfico se aprecia que según un individuo con dependencia severa por enfermedad de Parkinson va avanzando en edad, la mortalidad se va acrecentando y, a su vez, suponiendo simulaciones en el modelo de duraciones de la dependencia de 1 a 10 años, la mortalidad va disminuyendo conforme aumenta la duración.

- **Estimación de parámetros para la transición de una persona de activo a muerto (mortalidad desde activo)**

A diferencia del resto de intensidades de transición, la mortalidad de las personas activas se evalúa sin tener en cuenta los diferentes grados de dependencia establecidos. Además, y a diferencia de las intensidades que contemplan la duración como elemento interviniente en el cálculo de las intensidades, en la transición de una persona activa a muerta no es necesario tener en cuenta la duración ya que no hay dependencia o contingencia de por medio.

Únicamente se va a considerar la transición de los hombres y mujeres del estado de salud o actividad al estado de fallecimiento sin tener en cuenta si son dependientes moderados, severos o tienen gran dependencia ya que no influye en el estado de salud o actividad tener un grado de dependencia pues no se encuentran en estado de dependencia.

De esta forma, a partir de los datos de la Encuesta EDAD 2008, los resultados de la graduación de parámetros para la transición de un hombre del estado de actividad al estado de fallecimiento son los siguientes:

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-10.00365	0.162587	-61.52809	0.0000
BO	0.036356	0.012755	2.850408	0.0054

B1	0.000476	0.000276	1.726251	0.0877
B2	1.31E-06	1.73E-06	0.758119	0.4503

R-squared	**0.990171**	**Mean dependent var**	**-6.068532**
Adjusted R-squared	0.989850	S.D. dependent var	2.812012
S.E. of regression	0.283299	Akaike info criterion	0.356143
Sum squared resid	7.383743	Schwarz criterion	0.462991
Log likelihood	-13.09486	Hannan-Quinn criter.	0.399333
F-statistic	3089.285	Durbin-Watson stat	0.452304
Prob(F-statistic)	0.000000		

La representación gráfica de la evolución de las intensidades de transición ajustadas respecto a las tasas sin ajuste para hombres es la siguiente:

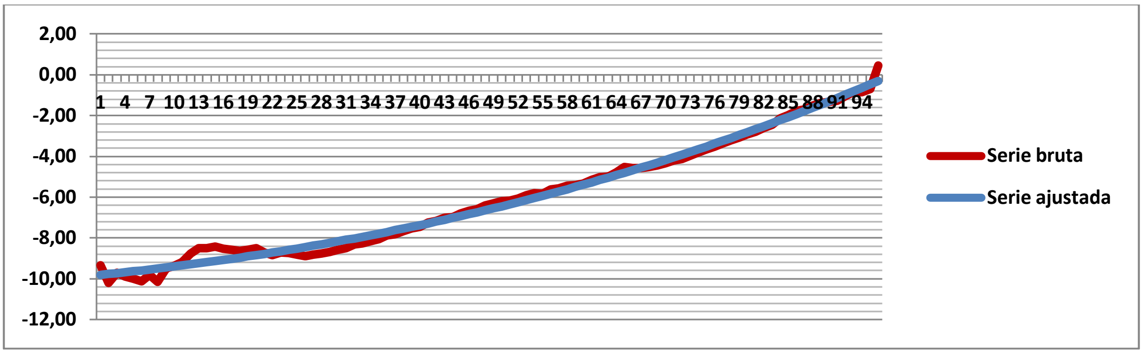


Ilustración 27 Tasas ajustadas frente a Tasas brutas de Mortalidad de activos. Encuesta EDAD 2008. Hombres

A efectos comparativos, se representan los valores sin graduar y los valores ajustados en función de la graduación paramétrica. A medida que aumenta la edad, aumenta la intensidad o velocidad a la que un hombre fallece.

En el caso de fallecimiento de mujeres, los resultados obtenidos son los siguientes:

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-10.20020	0.141434	-72.11977	0.0000
BOM	0.006737	0.011095	0.607188	0.5452
B1M	0.000832	0.000240	3.467694	0.0008
B2M	6.27E-07	1.51E-06	0.416156	0.6783

R-squared	**0.992874**	**Mean dependent var**	**-6.748027**
Adjusted R-squared	0.992642	S.D. dependent var	2.872921
S.E. of regression	0.246441	Akaike info criterion	0.077389
Sum squared resid	5.587470	Schwarz criterion	0.184237
Log likelihood	0.285338	Hannan-Quinn criter.	0.120578
F-statistic	4272.840	Durbin-Watson stat	0.533809
Prob(F-statistic)	0.000000		

La representación gráfica de las intensidades de mortalidad en el caso de mujeres activas es la siguiente:

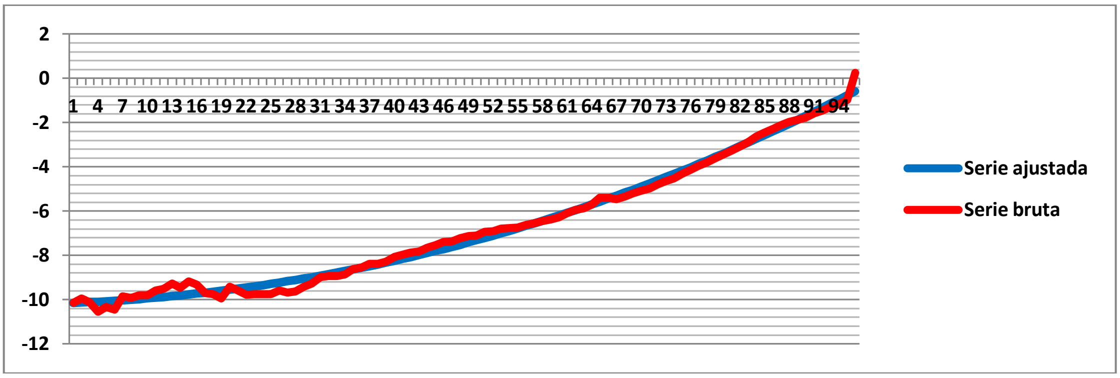


Ilustración 28 Tasas ajustadas frente a Tasas brutas de Mortalidad de activos. Encuesta EDAD 2008. Mujeres

Al igual que los hombres, las mujeres fallecen a mayor velocidad a medida que van haciéndose mayores. En último lugar, se puede hacer una representación conjunta de las intensidades de fallecimiento de hombres y mujeres con la siguiente forma:

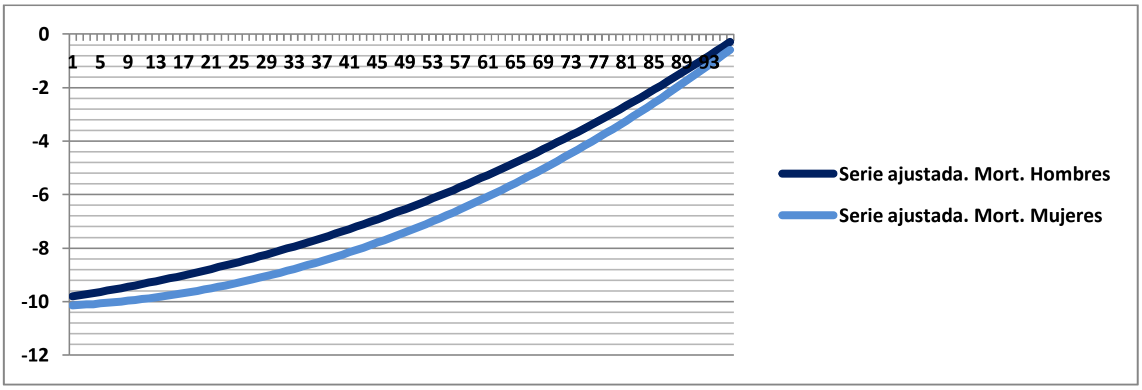


Ilustración 29 Tasas ajustadas de Mortalidad de activos. Encuesta EDAD 2008. Hombres y mujeres

Tanto para hombres como para mujeres la intensidad de fallecimiento es creciente con la edad, si bien, los hombres mueren a una mayor velocidad que las mujeres y a una edad más temprana.

En la graduación paramétrica de las tasas de mortalidad resulta muy interesante conocer también la evolución temporal de las series ajustadas de la mortalidad en personas activas.

Se muestra en este gráfico la evolución desde los años 2005 a 2013 de la mortalidad en hombres con edades comprendidas entre los 0 y los 110 años. A partir de estos datos se pueden hacer diferentes análisis en el cálculo de las probabilidades de transición que veremos más adelante a partir de la aproximación de las probabilidades mediante las ecuaciones de Volterra.

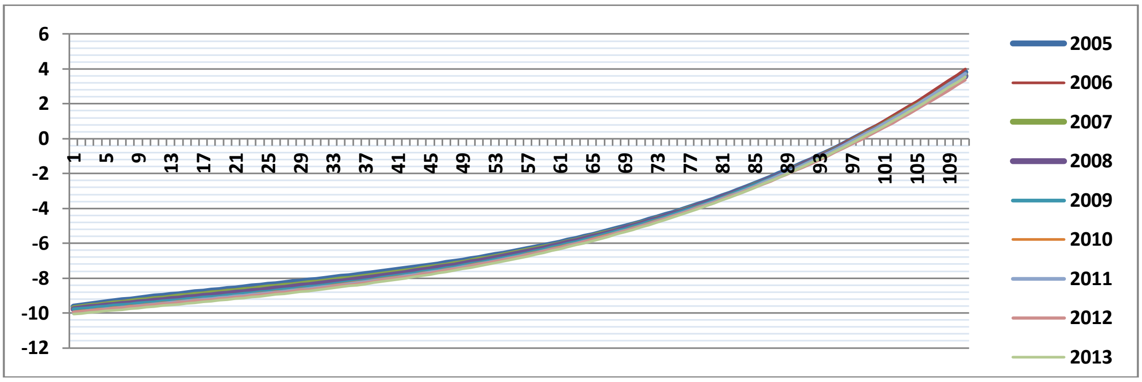


Ilustración 30 Tasas ajustadas de Mortalidad de activos. Evolución temporal Años 2005 a 2013. Hombres

3.7. Modelos lineales generalizados (GLM)

Además del uso del modelo clásico de regresión lineal, caracterizado por una composición de variable dependiente en función de una combinación de variables independientes, el modelo de investigación del seguro de dependencia que planteamos puede ver graduados sus parámetros mediante Modelos Lineales Generalizados (GLM).

Los Modelos Lineales Generalizados tienen por definición los siguientes componentes:

- Componente aleatoria: es la variable respuesta. Identifica la distribución de probabilidad.

- Componente sistemática: Son las variables independientes o predictoras que se usan en la función predictora lineal.

- Función link: se trata de una función del valor esperado de Y. Una combinación lineal de variables predictoras.

En este trabajo hemos incorporado el uso de GLM para obtener los parámetros de las intensidades de transición al estado de dependencia. Esto permite estudiar el comportamiento que siguen las personas dependientes de nuestro modelo y hacer comparación con el método clásico de regresión lineal.

A partir de los datos de la Encuesta EDAD 2008 se puede obtener una aproximación de cómo es la curva de las tasas de dependencia ajustada de la población dependiente y estudiar las variaciones entre los modelos de dependencia graduados mediante la aplicación de modelos de regresión clásicos y mediante modelos lineales generalizados. El siguiente gráfico muestra la forma de un GLM con función link Logit para los datos de dependencia de nuestro modelo.

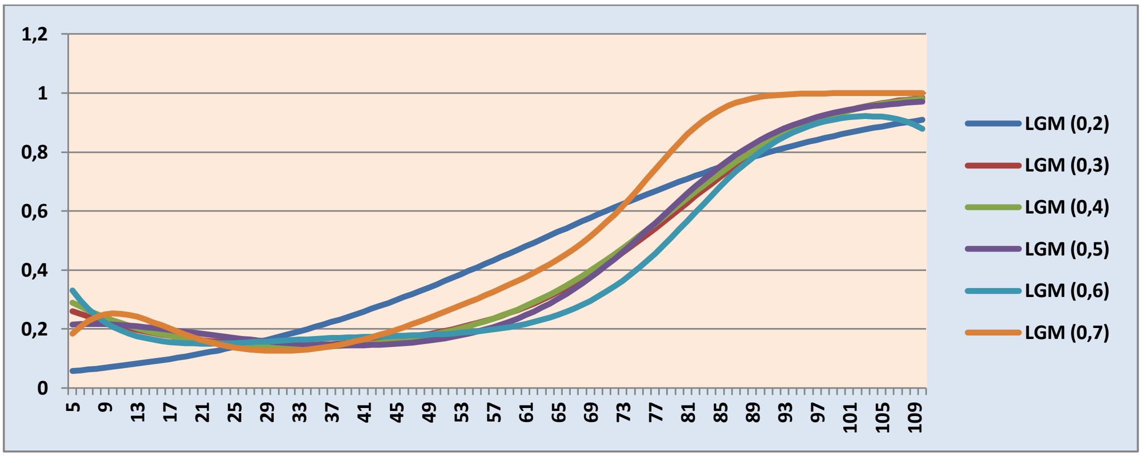


Ilustración 31 Tasas ajustadas de Dependencia Moderada. Modelos Lineales Generalizados con función Link Logit. LGM (0,2), LGM (0,3), LGM (0,4), LGM (0,5), LGM (0,6) o LGM (0,7). Encuesta EDAD 2008. Hombres

El método de graduación empleado para conseguir nuestro modelo GLM de tipo binomial parte de la aplicación de la fórmula empleada por el autor A. E. Renshaw[4].

$$LGMx\ (r,s) = \frac{GMx\ (r,s)}{1 + GMx(r,s)}$$

En la aplicación de la fórmula anterior asumimos r=0, ignorando el lado izquierdo de la ecuación clásica GM (r,s), es decir, ignoramos la parte polinómica de la ecuación y hacemos modelizaciones a partir de la parte exponencial de dicha ecuación,

$$GMx\ (0,s) = \exp \sum_{j=0}^{s-1} Bj * x^j$$

pudiendo probar con los siguientes modelos: LGM (0,2), LGM (0,3), LGM (0,4), LGM (0,5), LGM (0,6) o LGM (0,7). En función de nuestros intereses en la modelización de las intensidades de transición podemos elegir el modelo que mejor se ajuste, de tal forma que la combinación de las intensidades de transición resultantes de cada modelo en el cálculo general de las ecuaciones generales del modelo nos arrojará diferentes tipos de resultados en el cálculo de las probabilidades de transición del seguro de dependencia.

3.8. Cálculo de las intensidades de transición mediante metodología del CMI. Graduación de los datos.

Para poder obtener nuestro sistema de ecuaciones de integrales y diferenciales, es necesario calcular además de las probabilidades de transición las intensidades de transición. Por intensidad de transición se entiende la fuerza, intensidad o velocidad con la que un individuo puede acceder a otro estado diferente del que ocupa actualmente. En el modelo que nos ocupa, la intensidad de transición sería la velocidad a la que un individuo pasa de estar en estado de actividad a un estado de dependencia o a un estado irreversible de fallecimiento. O también la velocidad a la que un individuo pasa de cualquiera de los estados de dependencia al estado de actividad (recuperación o reactivación).

[4] A. E. Renshaw. Fórmula de graduación para Modelos Lineales Generalizados con función link logit para datos de tipo binomial, empleada en su artículo sobre graduación de la mortalidad "Actuarial, graduation practice and Generalized Linear and Non-linear Models".

El cálculo de las intensidades de transición se puede llevar a cabo de varias maneras. En este trabajo vamos a utilizar el método que emplea el CMI que se basa en una formulación matemática consistente en las fórmulas de Gompertz y Makeham.

El planteamiento de las fórmulas de graduación de las intensidades de transición se basa en el modelo planteado por el CMI. Para cada transición, con punto de partida en cada una de las contingencias, ya sea que el individuo esté activo o dependiente o esté muerto, existe una fórmula que se presenta a continuación.

Para las transiciones de un individuo en estado de dependencia a estado de actividad (recuperación) o a estado de fallecimiento (mortalidad de dependientes), el CMI emplea la siguiente formulación.

- Para las intensidades de recuperación partiendo del estado de dependencia vamos a utilizar en este trabajo la siguiente fórmula:

$$\boldsymbol{\mu}\, y+z, z = r * [a + b * (1 + q * \max(4 - wz, 0)) * \sqrt{z} * (y - 50)] * \ exp^{-c\sqrt{z}}$$

Esta fórmula permite graduar las intensidades de transición de una persona dependiente al estado de salud teniendo en cuenta la edad del individuo y la duración de la enfermedad o dependencia.

- Para las intensidades de mortalidad partiendo del estado de dependencia la fórmula a utilizar tiene la siguiente estructura:

$$\boldsymbol{\mu}\, \mathrm{y+z,z} = (\mathrm{a0} + \mathrm{a1} * \mathrm{Y} + \mathrm{a2} * \mathrm{Y}^2\,) * \frac{\exp(-\frac{\mathrm{b}}{[\mathrm{Z}+\mathrm{c}]^{\mathrm{n}}})}{(\mathrm{Z}+\mathrm{c})^{\mathrm{n}+1}} + \ \mathrm{r} * \ \exp^{(\mathrm{s} * [\mathrm{Y}+\mathrm{Z}])}$$

El CMI propone la siguiente formulación para las intensidades de transición de un individuo en estado de actividad que pasa a estado de dependencia o a un estado irreversible de fallecimiento.

- Para las intensidades de transición al estado de fallecimiento irreversible partiendo de un individuo en estado de actividad, el algoritmo utilizado es el siguiente:

$$\boldsymbol{\mu}\, y = GM\,(r, s) = \sum_{i=1}^{r} a_i * \ x^{i-1} + \ exp^{(\sum_{i=r+1}^{r+s} a_i * x^{i-r-1})}$$

Para la graduación de las tasas de fallecimiento partiendo de individuos en estado de actividad, se ha decidido tomar el modelo que mejor se ajusta tras realizar múltiples pruebas, siendo este el modelo definitivo:

$$(r, s) = (4, 0)$$

- Para las intensidades de transición al estado de dependencia partiendo del estado actual de un individuo activo, se plantea la utilización del mismo método paramétrico basado en las curvas de Gompertz-Makeham. Es la siguiente:

$$\boldsymbol{\mu}\, y = GM\,(r,s) = \sum_{i=1}^{r} a_i * x^{i-1} + exp^{(\sum_{i=r+1}^{r+s} a_i * x^{i-r-1})}$$

Para la graduación de las tasas de dependencia (moderada, severa o gran dependencia) partiendo de individuos en estado de actividad, se ha decidido tomar el modelo que mejor se ajusta, siendo este el mejor modelo:

$$(r,s) = (4,0)$$

Para poder llevar a cabo el modelo estocástico hay que calcular todas las probabilidades de transición que pueden tener lugar entre los diferentes estados. Hay que tener en cuenta que además de las probabilidades de transición de un estado inicial al estado final pueden producirse probabilidades de transición con estados intermedios.

El esquema superior representa el conjunto de probabilidades el cual se quiere representar. De esta forma, se puede observar como un individuo que está activo puede pasar a un estado de dependencia moderada, o a un estado de dependencia severa o a un estado de gran dependencia. Y asimismo, un individuo que se encuentre activo puede pasar directamente a un estado de fallecimiento.

De la misma forma, un individuo que se encuentra en cualquiera de los estados de dependencia puede transitar al resto de estados de dependencia. Esto es, un individuo que se encuentra en estado de dependencia moderada puede transitar a un estado de dependencia severa o a un estado de gran dependencia.

Por último, si el individuo se encuentra en estado de fallecimiento es imposible que retorne a cualquiera de los estados anteriormente mencionados. Lógicamente, un individuo que se encuentra en estado de fallecimiento no puede pasar a un estado de actividad ni a cualquiera de los tres estados de dependencia.

4. METODOLOGÍA

4.1 Introducción

Los modelos de Semi-Markov constituyen mecanismos muy avanzados, precisos y con gran capacidad para dotar de realidad y dinamismo en la modelización de cualquier proceso formado por la sucesión de estados de transición.

En este trabajo se construye un modelo teórico y práctico de los procesos de Semi-Markov en tiempo continuo no homogéneos. Una vez definida su estructura teórica se formulan todas y cada una de las expresiones de cálculo a través de las ecuaciones integro-diferenciales de Volterra.

Conocidas las ecuaciones de integrales y diferenciales del modelo, este permite la construcción a partir de ellas de las ecuaciones de aproximación principales del modelo.

Como veremos más adelante, las ecuaciones de aproximación se formulan mediante tres métodos, el de Gauss, el del Trapecio y el de Simpson 1/3, que permiten hacer un análisis comparativo de los resultados de nuestros modelos con los tres métodos.

Las ecuaciones de aproximación son fundamentales en el cálculo de las probabilidades de transición de nuestro modelo de seguro de dependencia. Para cada una de las líneas de estudio que proponemos, tanto el primer modelo de evolución de la dependencia a partir de la encuesta EDAD 2008 como el segundo modelo basado en la morbilidad hospitalaria del INE y la OMS de los años 2005 a 2013, se puede conocer a partir del modelo de Semi-Markov las probabilidades de transición de la evolución de la dependencia.

La construcción del modelo teórico permite generar las bases necesarias para la tarificación de nuestro modelo, siendo este el objetivo final de todo modelo teórico-práctico que se genera en la práctica actuarial. A partir de la experiencia, permite generar bases para el cálculo de productos aseguradores. Los principales que vamos a ver se construyen bajo la forma de rentas.

Además, permite la obtención de bases técnicas para el cálculo de primas y provisiones. En la parte de tarificación del presente trabajo se verán algunas aproximaciones para la tarificación de primas y provisiones.

4.2. Teoría de modelos de Semi-Markov en tiempo continuo

Estos modelos se caracterizan por disponer de una estructura diferente a la del modelo clásico de Markov. La variable duración supone un elemento de diferenciación respecto a los modelos clásicos. Al tener en cuenta la duración que un individuo pasa entre un estado y otro del modelo, se puede ser más preciso acerca de cuánto tiempo los individuos pasan en cada estado de transición y poder calcular de forma más exacta las probabilidades de transición de modelo.

El objetivo en esta parte del trabajo es definir las características y propiedades fundamentales de los modelos de Semi-Markov en tiempo continuo. Son las siguientes.

- En un proceso de Semi-Markov el estado de un individuo en el momento actual depende del estado en la edad anterior y de su duración; mientras que en los procesos de Markov el estado de un individuo depende del estado actual, por lo tanto, el modelo que maneja este trabajo se presenta más realista a la hora de hacer formulación de intensidades y probabilidades de transición.

- Haciendo referencia a los autores S. Haberman y E. Pitacco los modelos de Semi-Markov tienen la siguiente forma:

  $$\{E(t), D(t); t \geq 0\}$$

  Siendo $E(t)$ el estado actual ocupado por el individuo en el momento "t"; y $D(t)$ es la duración en el estado $E(t)$, es decir, es el tiempo empleado en el estado $E(t)$ desde la última transición a este estado. De esta forma, $D(t)$ puede tomar valores en el intervalo $[0, +\infty)$ y $E(t)$ puede tomar valores en el espacio de estados δ . Por lo tanto, el conjunto $\{E(t), D(t)\}$ toma valores en $\delta \times [0, +\infty)$.

- Según su definición formal, $\{E(t), D(t); t \geq 0\}$ es un proceso de Markov caracterizado por ser no homogéneo continuo en el tiempo. Según esta definición, todas las probabilidades futuras del proceso después del tiempo "t" sólo dependen de la información más reciente, es decir, dependen del estado actual, $E(t) = i$, y del tiempo empleado desde la última transición a este estado, $D(t) = d$.

- La definición más formal de un proceso de Semi-Markov en tiempo continuo no homogéneo expresado en términos de sus probabilidades de transición tiene la siguiente estructura:

$$P_{ij}(t, v, d, x) = \Pr\{E(v) = j \wedge D(v) \leq x \mid E(t) = i \wedge D(t) = d\}$$

  Donde $0 \leq t < v$,

  y
  $d, x \geq 0$

  Además, para $t = v$ se tiene que

  $P_{ij}(t, v, d, x) = \delta_{ij} \in (x - d)$

  Donde

  $\in (y) = \in (x - d) =$ 0 o 1 según sea $y < 0$ o $y \geq 0$.

  Por lo tanto, las probabilidades de transición $P_{ij}(t, v, d, x)$ están definidas en $0 \leq t \leq v$.

- Dado que $\{E(t), D(t); t \geq 0\}$ es un proceso de Markov en tiempo continuo no homogéneo, entonces $\{E(t); t \geq 0\}$ es un proceso de Semi-Markov en tiempo continuo no homogéneo.

- Permite que el cálculo de las intensidades de transición tenga la siguiente forma:

$$\mu_{ij}(t, d) = \lim_{v - t} \frac{P_{ij}(t, v, d, +\infty)}{v - t}$$

  Por definición, $\mu_{ij}(t, d)$ existe para todo $i \neq j$, $t \geq 0$, $d \geq 0$.

- En términos teóricos, $\mu_{ij}(t, d)\, dt$ se interpreta como la probabilidad de que una transición desde el estado "i" al estado "j" ocurra sobre el intervalo infinitesimal $[t, t + dt]$ dado que el riesgo está en el estado "i" en tiempo "t" con un tiempo "d" gastado en el estado "i" desde la última transición a este estado.

- El modelo de Semi-Markov con el que estamos trabajando determina las intensidades y probabilidades de transición teniendo en cuenta la edad y la duración. Si bien, en este mismo modelo existen transiciones o cambios de estado de los individuos que no se configuran teniendo en cuenta la duración, sino que se mueven como modelos de Markov tradicionales. Más formalmente y atendiendo al razonamiento teórico de los autores S. Haberman y E. Pitacco, permite asumir que la probabilidad de transición P_{ij} (t, v, d, x) no depende de la duración "d". Esta hipótesis supone que:

$$\Pr \{E(v) = j \wedge D(v) \leq x \mid E(t) = i \wedge D(t) = d\} =$$

$$= \Pr \{E(v) = j \wedge D(v) \leq x \mid E(t) = i\}$$

Se ha omitido en la expresión anterior el término que hace referencia a la duración, quedando la siguiente expresión:

$$P_{ij}(t, v, x) = \Pr \{E(v) = j \wedge D(v) \leq x \mid E(t) = i\}$$

Y para este caso, las intensidades de transición se expresan como sigue:

$$\mu_{ij}(t) = \lim_{v - t} \frac{P_{ij}(t, v, +\infty)}{v - t}$$

Como decíamos anteriormente, la expresión anterior de las intensidades de transición cuando no interviene la duración en nuestro modelo se corresponde con la definición de un proceso estocástico de Markov.

- En este modelo de Semi-Markov con el que estamos trabajando, se deben definir las probabilidades de ocupación. El modelo teórico dice lo siguiente:

$$\Pr \{E(z) = i \text{ para todo } z \in [t, v] \mid E(t) = i \wedge D(t) = d\} =$$
$$= \Pr \{E(v) = i \wedge D(v) = d + v - t \mid E(t) = i \wedge D(t) = d\}$$

Permite que utilicemos la siguiente notación:

$$P_{\bar{ii}}(t, v, d) = \Pr \{E(v) = i \wedge D(v) = d + v - t \mid E(t) = i \wedge D(t) = d\}$$

De igual forma que definíamos los procesos de Semi-Markov si la duración no influía en el modelo, para lo cual omitíamos el término duración, en las probabilidades de ocupación sucede de la misma manera. Para un estado "i" permite que asumamos que la probabilidad de ocupación $P_{\bar{ii}}$ (t, v, d) no dependa de la duración "d", por lo tanto:

$$P_{\bar{ii}}(t, v) = \Pr \{E(v) = i \wedge D(v) \geq v - t \mid E(t) = i\}$$

- Las expresiones de las intensidades de transición en nuestro modelo de dependencia tienen la siguiente estructura:

$\mu_{\text{activo – dependiente (moderado, severo y gran dependiente) (t)}}$ = intensidades de transición al estado de dependencia en sus tres variantes.

$\mu_{\text{dependiente (moderado, severo y gran dependiente) - activo (t, d)}}$ = intensidades de transición de reactivación o de recuperación al estado de actividad.

$\mu_{\text{activo - muerto (t)}}$ = intensidades de transición de mortalidad de individuos activos.

$\mu_{\text{dependiente (moderado, severo y gran dependiente) - muerto (t, d)}}$ = intensidades de transición de mortalidad de individuos dependientes en sus tres variantes.

- Otro elemento diferenciador en los modelos de Semi-Markov es que el cálculo de las probabilidades de transición no se efectúa con las ecuaciones diferenciales clásicas de los modelos Markovianos. Se omiten las ecuaciones de Chapman Kolmogorov por unas ecuaciones algo más complicadas en su formulación y en su cálculo, esto es, las ecuaciones de integrales y diferenciales de Volterra. Veremos más adelante el conjunto específico de estas ecuaciones, pero por el momento permite que las ecuaciones de Volterra tengan la siguiente estructura para nuestro modelo de Semi-Markov:

$$P_{\text{activo - activo}}(d, t) = P_{\text{activo - activo}}(d, t) * [\mu_{\text{activo} - \text{dep (m,s,gd)}}(t) + \mu_{\text{activo} - \text{muerto}}(t)] +$$

$$+\int_d^t P\, act - act(d,v) * \mu\,\text{activo} - \text{dep}(\text{m},\text{s},\text{gd})(v) * P\,\text{dep}(\text{m},\text{s},\text{gd}) - \text{dep}(\text{m},\text{s},\text{gd})\,(v,t,0) * \mu\,\text{dep}(\text{m},\text{s},\text{gd}) -$$
$$- activot, t-v\, dv$$

4.3. Representación gráfica de modelos de Semi-Markov

El siguiente esquema representa el modelo estocástico sobre el que se está trabajando. Según la Ley de dependencia que se encuentra actualmente en vigor[5], el modelo de dependencia actual en España se rige por tres estados o grados de una persona dependiente. Son los siguientes:

- **Dependencia moderada**: es el grado de dependencia más bajo de todos los que puede presentar una persona en situación de dependencia. Por esta razón, una persona que adquiere este grado de dependencia se rige por lo que estable la ley en cuanto a su grado de dependencia. Tomando con todo su rigor la vigente Ley de dependencia, esta define el grado de dependencia moderada como:

  "Cuando la persona necesita ayuda para realizar varias actividades básicas de la vida diaria, al menos una vez al día o tiene necesidades de apoyo intermitente o limitado para su autonomía personal".

- **Dependencia severa**: es el grado de dependencia intermedio que puede presentar un individuo que accede a esta naturaleza de su estado físico. Por tratarse de un estado de dependencia intermedio se rige por los criterios de compensación que marca la ley para los individuos que padecen este grado de dependencia. La ley establece la siguiente definición, que nosotros tomamos con total exactitud:

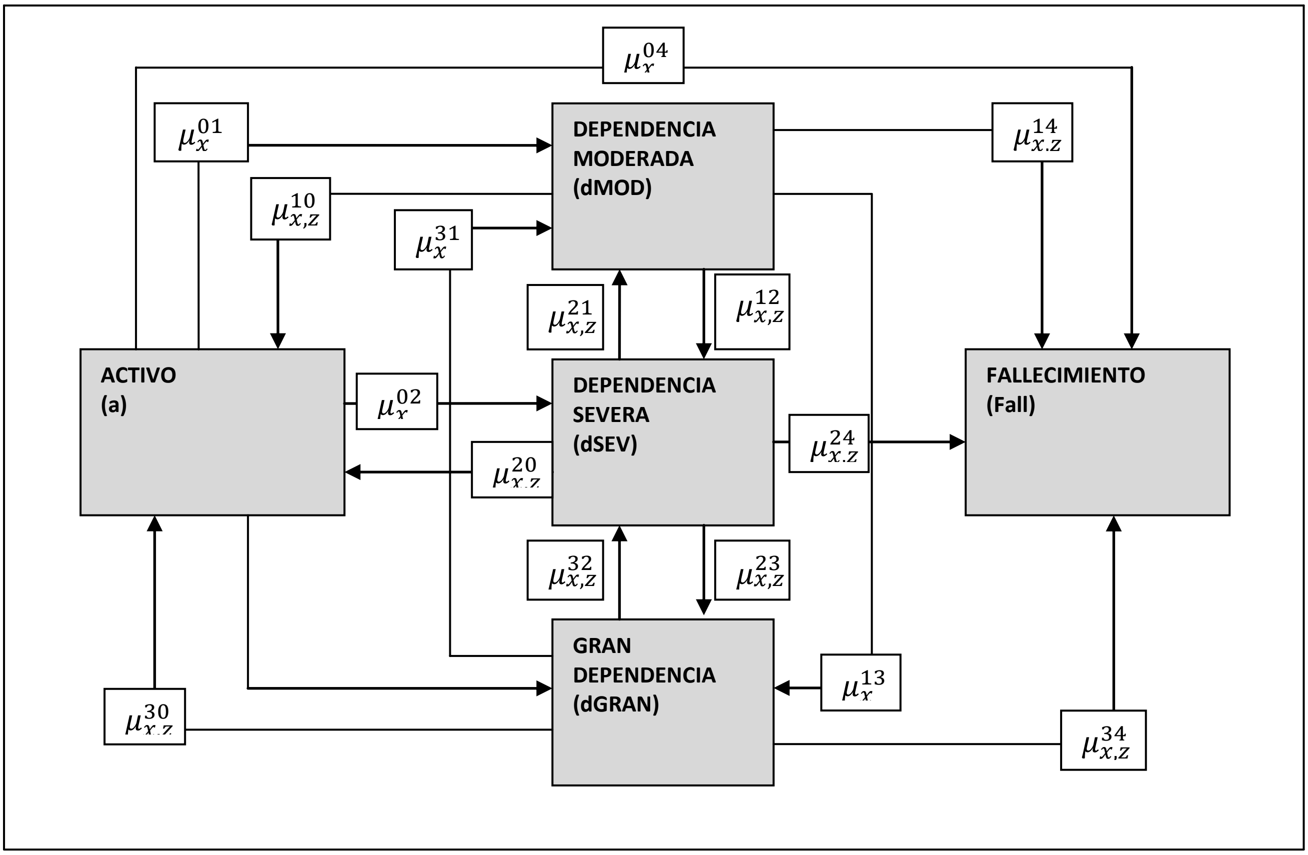
  "Cuando la persona necesita ayuda para realizar varias actividades básicas de la vida diaria dos o tres veces al día, pero no quiere el apoyo permanente de un cuidador o tiene necesidades de apoyo extenso para su autonomía personal".

[5] Ley 39/2006, de 14 de diciembre, de Promoción de la Autonomía Personal y Atención a las personas en situación de dependencia.

- **Gran dependencia**: este grado de dependencia se aplica a los individuos que están en disposición del grado más alto de dependencia otorgado por la ley. Por pertenecer a este estrato de dependencia, estos individuos recibirán a cambio las contraprestaciones estipuladas que se marcan según la ley. La ley de dependencia define el grado de gran dependencia de la siguiente forma:

  "Cuando la persona necesita ayuda para realizar varias actividades básicas de la vida diaria varias veces al día y, por su pérdida total de autonomía física, mental, intelectual o sensorial, necesita el apoyo indispensable y continuo de otra persona o tiene necesidades de apoyo generalizado para su autonomía personal".

Las relaciones entre los estados de nuestro modelo tienen la siguiente forma:



Según la clasificación realizada en la ley de dependencia española que gradúa los estados de dependencia en dependencia moderada, severa y gran dependencia, los diferentes estados del modelo se pueden clasificar según la tipología tradicional con la que se clasifican los estados de los procesos de Markov.

De esta forma el estado de actividad de nuestro modelo sería un estado transitorio y el conjunto de estados de dependencia en sus diferentes graduaciones también se clasificarían como estados transitorios porque se trata de estados que por definición cuando se sale de esos estados se puede volver a estar en el mismo estado en otro momento de tiempo determinado.

Mientras, el estado irreversible de fallecimiento se tiene que clasificar forzosamente como un estado absorbente porque un individuo que fallece no va a poder retornar a cualquiera de los otros estados, es decir, va a permanecer indefinidamente en el estado de fallecimiento.

4.4. Formulación de las ecuaciones integro-diferenciales de Volterra del modelo

El objetivo de este trabajo es saber formular de manera técnica las ecuaciones del modelo. A diferencia de los modelos de Markov que se sostienen en las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov, los modelos de Semi-Markov se complican un poco más ya que las ecuaciones a utilizar son un poco más complicadas en su formulación que los anteriormente mencionados.

Se trata de las ecuaciones integro-diferenciales de Volterra. Estas ecuaciones son más complicadas porque tienen en cuenta además de la edad del asegurado la duración de la dependencia o contingencia de un asegurado en un estado de salud determinado.

A continuación, se plantean cada una de las ecuaciones de Volterra del modelo y en los apartados siguientes las aproximaciones de estas ecuaciones mediante los distintos métodos que pretendemos utilizar. Hay que hacer referencia a los autores Enrique Pociello García, Antonio Alegre Escolano, Manuela Bosh Príncep, Mercé Claramunt Bielsa y Javier Varea Soler, en su trabajo “Modelo semimarkoviano de invalidez”; y a los autores S.Haberman y E.Pitacco en su obra “Actuarial Models for Disability Insurance” donde plantean de forma muy exacta, clara y precisa la estructura de las ecuaciones integro-diferenciales de Volterra que nos han servido de referencia en la realización de este trabajo.[6]

Cada posible ecuación integro diferencial de nuestro modelo de dependencia se establece como un posible submodelo del modelo de dependencia. De esta forma permite que obtengamos veinte modelos diferentes para todas las transiciones posibles del seguro de dependencia mediante modelos de Semi-Markov. Cada modelo tiene su propia nomenclatura que lo diferencia y lo hace único respecto de los demás.

Como anteriormente se mencionaba, este trabajo está muy de acuerdo con la literatura actuarial en esta materia y por lo tanto sólo se proponen las ecuaciones de Volterra finales sin pasos intermedios de evaluación.

Los veinte modelos de ecuaciones integro-diferenciales de Volterra son los siguientes:

Modelo 1 de Dependencia de Semi-Markov para la transición de Activo a Activo (M1DSMAct-Act)

Se define este modelo como la probabilidad de que un individuo activo o en estado de buena salud siga en estado de actividad en el paso siguiente pudiendo experimentar en el paso intermedio un estado de dependencia moderada, de dependencia severa o de gran dependencia. Los siguientes tres submodelos definen estas probabilidades de transición:

[6] Enrique Pociello García, Antonio Alegre Escolano, Manuela Bosh Príncep, Mercé Claramunt Bielsa y Javier Varea Soler, en su trabajo “Modelo semimarkoviano de invalidez”; y los autores S.Haberman y E.Pitacco en su obra “Actuarial Models for Disability Insurance”. Los trabajos indicados plantean con gran perfección las ecuaciones integro-diferenciales de Volterra.

Submodelos 1.1, 1.2 y 1.3

Dependencia de Semi-Markov para la transición de Activo a Activo Pasando por Dependencia Moderada (1.1), Severa (1.2) o Gran dependencia (1.3) (SM1DSMAct–ActPdMOD)

$$
{}_{q}P_{x}^{\text{Activo – Activo}} = -{}_{q}P_{x}^{\text{Activo - Activo}} * \left(m_{x+q}^{\text{Activo – dMOD}} + m_{x+q}^{\text{Activo – dSEV}} + m_{x+q}^{\text{Act – dGRAN}} + m_{x+q}^{\text{Act – muerto}}\right) + \int_{0}^{q} {}_{q-s}P_{x}^{\text{Act – Act}} * m_{x+q-s}^{\text{Act – dMOD}} * {}_{s}P_{x+q-s,0}^{\overline{\text{dMOD - dMOD}}} * m_{x+q,s}^{\text{dMOD - Act}}\, du
$$

Modelo 2 de Dependencia de Semi-Markov para la transición de Activo a Dependencia Moderada (M2DSMAct-dMOD)

Modelo en el que la probabilidad de que un individuo activo o en estado de buena salud transite o cambie al estado de dependencia moderada definido por la ley de dependencia pudiendo experimentar en el paso intermedio un estado de dependencia moderada, de dependencia severa o de gran dependencia. Los submodelos que definen estas probabilidades de transición son los siguientes:

Submodelos 2.1, 2.2 y 2.3

Dependencia de Semi-Markov para la transición de Activo a Dependencia Moderada Pasando por Dependencia Moderada (2.1), Severa (2.2) o Gran Dependencia (2.3) (SM1DSMAct–dMODPdMOD)

$$
{}_{q}P_{x}^{\text{Activo – dMOD}} = {}_{q}P_{x}^{\text{Activo - Activo}} * m_{x+q}^{\text{Activo – dMOD}} - \int_{0}^{q} {}_{q-s}P_{x}^{\text{Act – Act}} * m_{x+q-s}^{\text{Act – dMOD}} * {}_{s}P_{x+q-s,0}^{\overline{\text{dMOD - dMOD}}} * * \left(m_{x+q}^{\text{dMOD - Activo}} + m_{x+q}^{\text{dMOD – muerto}}\right) du
$$

Modelo 3 de Dependencia de Semi-Markov para la transición de Activo a Dependencia Severa (M3DSMAct-dSEV)

Modelo en el que la probabilidad de que un individuo activo o en estado de buena salud transite o cambie al estado de dependencia severa definido por la ley de dependencia pudiendo experimentar en el paso intermedio un estado de dependencia moderada, de dependencia severa o de gran dependencia. Los submodelos que definen estas probabilidades de transición son los siguientes:

Submodelos 3.1, 3.2 y 3.3

Dependencia de Semi-Markov para la transición de Activo a Dependencia Severa Pasando por Dependencia Moderada (3.1), Severa (3.2) o Gran Dependencia (3.3) (SM1DSMAct–dSEVPdMOD)

$$ {}_{q}\mathbf{P}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{Act-dSEV}} = {}_{q}P_{x}^{Act-Act} * m_{x+q}^{Activo-dSEV} + \int_{0}^{q} {}_{q-s}P_{x}^{Act-Act} * m_{x+q-s}^{Act-dMOD} * {}_{s}P_{x+q-s,0}^{\overline{dMOD-dMOD}} * \left(m_{x+q}^{dMOD-Activo} + m_{x+q}^{dMOD-muerto} \right) du $$

Modelo 4 de Dependencia de Semi-Markov para la transición de Activo a Gran Dependencia (M4DSMAct-dGRA)

Modelo en el que la probabilidad de que un individuo activo o en estado de buena salud transite o cambie al estado de gran dependencia definido por la ley de dependencia pudiendo experimentar en el paso intermedio un estado de dependencia moderada, de dependencia severa o de gran dependencia. Los submodelos que definen estas probabilidades de transición son los siguientes:

Submodelos 4.1, 4.2 y 4.3

Dependencia de Semi-Markov para la transición de Activo a Gran Dependencia Pasando por Dependencia Moderada (4.1), Severa (4.2) o Gran Dependencia (4.3) (SM1DSMAct–dGRAPdMOD)

$$ {}_{q}\mathbf{P}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{Activo-dGRA}} = {}_{q}P_{x}^{Activo-Activo} * m_{x+q}^{Activo-dGRAN} + \int_{0}^{q} {}_{q-s}P_{x}^{Act-Act} * m_{x+q-s}^{Act-dMOD} * {}_{s}P_{x+q-s,0}^{\overline{dMOD-dMOD}} * * \left(m_{x+q}^{dMOD-Activo} + m_{x+q}^{dMOD-muerto} \right) du $$

Modelo 5 de Dependencia de Semi-Markov para la transición de Activo a Fallecimiento (M5DSMAct-Fall)

Modelo en el que la probabilidad de que un individuo activo o en estado de buena salud transite o cambie al estado de fallecimiento irreversible pudiendo transitar a este estado final a través de un estado intermedio de dependencia moderada, de dependencia severa o de gran dependencia. Los submodelos que definen estas probabilidades de transición son los siguientes:

Submodelos 5.1, 5.2 y 5.3

Dependencia de Semi-Markov para la transición de Activo a Fallecimiento Pasando por Dependencia Moderada (5.1), Severa (5.2) o Gran Dependencia (5.3) (SM1DSMAct–FallPdMOD)

$$ {}_{q}\mathbf{P}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{Activo-muerto}} = {}_{q}P_{x}^{\text{Activo - muerto}} + {}_{q}P_{x}^{\text{Activo - Activo}} * m_{x+q}^{\text{Activo – muerto}} + \int_{0}^{q} {}_{q-s}P_{x}^{\text{Act – Act}} * m_{x+q-s}^{\text{Act – dMOD}} * {}_{s}P_{x+q-s,\,0}^{\overline{\text{dMOD - dMOD}}} * m_{x+q,\,s}^{\text{dMOD – muerto}}\, du $$

Modelo 6 de Dependencia de Semi-Markov para la transición de Dependencia Moderada a Activo (M6DSMdMOD-Act)

Modelo dependiente de la edad y de la duración en el que la probabilidad de que un individuo con dependencia moderada transite o cambie al estado de actividad o buena salud pudiendo experimentar en el paso intermedio un estado de dependencia moderada, de dependencia severa o de gran dependencia. Los submodelos que definen estas probabilidades de transición son los siguientes:

Submodelos 6.1, 6.2 y 6.3

Dependencia de Semi-Markov para la transición de Dependencia Moderada a Activo Pasando por Dependencia Moderada (6.1), Severa (6.2) o Gran Dependencia (6.3) (SM1DSMdMOD–ActPdMOD)

$$ {}_{q}\mathbf{P}_{\mathbf{x,\,d}}^{\mathbf{dMOD-Act}} = -\,{}_{q}P_{x,d}^{\text{dMOD - Act}} * \left(m_{x+q}^{\text{Activo - dMOD}} + m_{x+q}^{\text{Activo - dSEV}} + m_{x+q}^{\text{Activo - dGRAN}} + m_{x+q}^{\text{Activo - muerto}} \right) + {}_{q}P_{x,\,d}^{\overline{\text{dMOD - dMOD}}} * m_{x+q,\,d+q}^{\text{dMOD - Activo}} + \int_{0}^{q} {}_{q-s}P_{x,\,d}^{\text{dMOD – Act}} * m_{x+q-s}^{\text{Act – dMOD}} * {}_{s}P_{x+q-s,\,0}^{\overline{\text{dMOD - dMOD}}} * m_{x+q,\,s}^{\text{dMOD - Activo}}\, du $$

Modelo 7 de Dependencia de Semi-Markov para la transición de Dependencia Severa a Activo (M7DSMdSEV-Act)

Modelo dependiente de la edad y de la duración en el que la probabilidad de que un individuo con dependencia severa transite o cambie al estado de actividad o buena salud pudiendo experimentar en el paso intermedio un estado de dependencia moderada, de dependencia severa o de gran dependencia. Los submodelos que definen estas probabilidades de transición son los siguientes:

Submodelos 7.1, 7.2 y 7.3

Dependencia de Semi-Markov para la transición de Dependencia Severa a Activo Pasando por Dependencia Moderada (7.1), Severa (7.2) o Gran Dependencia (7.3) (SM1DSMdSEV–ActPdMOD)

$$
\begin{aligned}
{}_{q}\mathbf{P}_{\mathbf{x,d}}^{\mathbf{dSEV-Act}} = {}& {}_{q}P_{x,d}^{\text{dSEV - Act}} * \left(m_{x+q}^{\text{Activo - dMOD}} + m_{x+q}^{\text{Activo - dSEV}} + \right. \\
& \left. + m_{x+q}^{\text{Activo - dGRAN}} + m_{x+q}^{\text{Activo - muerto}} \right) + \\
& + {}_{q}P_{x,d}^{\overline{\text{dSEV - dSEV}}} * m_{x+q,\,d+q}^{\text{dSEV - Activo}} + \\
& \int_{0}^{q} {}_{q-s}P_{x,d}^{\text{dSEV - Act}} * m_{x+q-s}^{\text{Act - dMOD}} * {}_{s}P_{x+q-s,\,0}^{\overline{\text{dMOD - dMOD}}} * \\
& * m_{x+q,\,s}^{\text{dMOD - Activo}} \, du
\end{aligned}
$$

Modelo 8 de Dependencia de Semi-Markov para la transición de Gran Dependencia a Activo (M8DSMdGRA-Act)

Igual que los dos modelos anteriores, se trata de un modelo dependiente de la edad y de la duración en el que la probabilidad de que un individuo con gran dependencia transite o cambie al estado de actividad o buena salud pudiendo experimentar en el paso intermedio un estado de dependencia moderada, de dependencia severa o de gran dependencia. Los submodelos que definen estas probabilidades de transición son los siguientes:

Submodelos 8.1, 8.2 y 8.3

Dependencia de Semi-Markov para la transición de Gran Dependencia a Activo Pasando por Dependencia Moderada (8.1), Severa (8.2) o Gran Dependencia (8.3) (SM1DSMdGRA–ActPdMOD)

$$
\begin{aligned}
{}_{q}\mathbf{P}_{\mathbf{x,d}}^{\mathbf{dGRAN-Act}} = {}& {}_{q}P_{x,d}^{\text{dGRAN - Act}} * \left(m_{x+q}^{\text{Activo - dMOD}} + m_{x+q}^{\text{Activo - dSEV}} + \right. \\
& \left. + m_{x+q}^{\text{Activo - dGRAN}} + m_{x+q}^{\text{Activo - muerto}} \right) + \\
& + {}_{q}P_{x,d}^{\overline{\text{dGRAN - dGRAN}}} * m_{x+q,\,d+q}^{\text{dGRAN - Activo}} + \\
& \int_{0}^{q} {}_{q-s}P_{x,d}^{\text{dGRAN - Act}} * m_{x+q-s}^{\text{Act - dMOD}} * {}_{s}P_{x+q-s,\,0}^{\overline{\text{dMOD - dMOD}}} * \\
& * m_{x+q,\,s}^{\text{dMOD - Activo}} \, du
\end{aligned}
$$

Modelo 9 de Dependencia de Semi-Markov para la transición de Dependencia Moderada a Dependencia Moderada (M9DSMdMOD-dMOD)

Modelo dependiente de la edad y de la duración en el que la probabilidad de que un individuo con dependencia moderada transite o cambie al estado de dependencia moderada pudiendo experimentar en el paso intermedio un estado de dependencia moderada, de dependencia severa o de gran dependencia. Los submodelos que definen estas probabilidades de transición son los siguientes:

Submodelos 9.1, 9.2 y 9.3

<u>Dependencia de Semi-Markov para la transición de Dependencia Moderada a Dependencia Moderada Pasando por Dependencia Moderada (9.1), Severa (9.2) o Gran Dependencia (9.3) (SM1DSMdMOD–dMODPdMOD)</u>

$$
{}_q\mathbf{P}_{\mathbf{x,d}}^{\mathbf{dMOD-dMOD}} = {}_qP_{x,d}^{dMOD-Act} * m_{x+q}^{Activo-dMOD} - {}_qP_{x,d}^{\overline{dMOD-dMOD}} * \left(m_{x+q,d+q}^{dMOD-Activo} + m_{x+q,d+q}^{dMOD-muerto} \right) - \int_0^q {}_{q-s}P_{x,d}^{dMOD-Act} * m_{x+q-s}^{Act-dMOD} * {}_sP_{x+q-s,0}^{\overline{dMOD-dMOD}} * \left(m_{x+q,s}^{dMOD-Activo} + m_{x+q,s}^{dMOD-muerto} \right) du
$$

Modelo 10 de Dependencia de Semi-Markov para la transición de Dependencia Moderada a Dependencia Severa (M10DSMdMOD-dSEV)

Modelo dependiente de la edad y de la duración en el que la probabilidad de que un individuo con dependencia moderada transite o cambie al estado de dependencia severa pudiendo experimentar en el paso intermedio un estado de dependencia moderada, de dependencia severa o de gran dependencia. Los submodelos que definen estas probabilidades de transición son los siguientes:

Submodelos 10.1, 10.2 y 10.3

<u>Dependencia de Semi-Markov para la transición de Dependencia Moderada a Dependencia Severa Pasando por Dependencia Moderada (10.1), Severa (10.2) o Gran Dependencia (10.3) (SM1DSMdMOD–dSEVPdMOD)</u>

$$
{}_q\mathbf{P}_{\mathbf{x,d}}^{\mathbf{dMOD-dSEV}} = {}_qP_{x,d}^{dMOD-Act} * m_{x+q}^{Activo-dSEV} - {}_qP_{x,d}^{\overline{dSEV-dSEV}} * \left(m_{x+q,d+q}^{dSEV-Activo} + m_{x+q,d+q}^{dSEV-muerto} \right) -
$$

$$\int_0^q {}_{q-s}P_{x,d}^{dMOD-Act} * m_{x+q-s}^{Act-dMOD} * {}_sP_{x+q-s,0}^{\overline{dMOD-dMOD}} *$$

$$* \left(m_{x+q,s}^{dMOD-Activo} + m_{x+q,s}^{dMOD-muerto} \right) du$$

Modelo 11 de Dependencia de Semi-Markov para la transición de Dependencia Moderada a Gran Dependencia (M11DSMdMOD-dGRA)

Modelo dependiente de la edad y de la duración en el que la probabilidad de que un individuo con dependencia moderada transite o cambie al estado de gran dependencia pudiendo experimentar en el paso intermedio un estado de dependencia moderada, de dependencia severa o de gran dependencia. Los submodelos que definen estas probabilidades de transición son los siguientes:

Submodelos 11.1, 11.2 y 11.3

Dependencia de Semi-Markov para la transición de Dependencia Moderada a Gran Dependencia Pasando por Dependencia Moderada (11.1), Severa (11.2) o Gran Dependencia (11.3) (SM1DSMdMOD–dGRAPdMOD)

$${}_q\mathbf{P}_{\mathbf{x,d}}^{\mathbf{dMOD-dGRAN}} = {}_qP_{x,d}^{dMOD-Act} * m_{x+q}^{Activo-dGRAN} -$$

$$- {}_qP_{x,d}^{\overline{dGRAN-dGRAN}} * \left(m_{x+q,d+q}^{dGRAN-Activo} + m_{x+q,d+q}^{dGRAN-muerto} \right) -$$

$$\int_0^q {}_{q-s}P_{x,d}^{dMOD-Act} * m_{x+q-s}^{Act-dMOD} * {}_sP_{x+q-s,0}^{\overline{dMOD-dMOD}} *$$

$$* \left(m_{x+q,s}^{dMOD-Activo} + m_{x+q,s}^{dMOD-muerto} \right) du$$

Modelo 12 de Dependencia de Semi-Markov para la transición de Dependencia Severa a Dependencia Severa (M12DSMdSEV-dSEV)

Modelo dependiente de la edad y de la duración en el que la probabilidad de que un individuo con dependencia severa transite o cambie al estado de dependencia severa pudiendo experimentar en el paso intermedio un estado de dependencia moderada, de dependencia severa o de gran dependencia. Los submodelos que definen estas probabilidades de transición son los siguientes:

Submodelos 12.1, 12.2 y 12.3

Dependencia de Semi-Markov para la transición de Dependencia Severa a Dependencia Severa Pasando por Dependencia Moderada (12.1), Severa (12.2) o Gran Dependencia (12.3) (SM1DSMdSEV–dSEVPdMOD)

$$ {}_{q}\mathbf{P}_{\mathbf{x,d}}^{\mathbf{dSEV-dSEV}} = {}_{q}P_{x,d}^{dSEV-Act} * m_{x+q}^{Activo-dSEV} - $$

$$ \int_{0}^{q} \begin{array}{l} - \; {}_{q}P_{x,d}^{\overline{dSEV-dSEV}} * \left(m_{x+q,d+q}^{dSEV-Activo} + m_{x+q,d+q}^{dSEV-muerto} \right) - \\ {}_{q-s}P_{x,d}^{dSEV-Act} * m_{x+q-s}^{Act-dMOD} * {}_{s}P_{x+q-s,0}^{\overline{dMOD-dMOD}} * \end{array} $$

$$ * \left(m_{x+q,s}^{dMOD-Activo} + m_{x+q,s}^{dMOD-muerto} \right) \; du $$

Modelo 13 de Dependencia de Semi-Markov para la transición de Dependencia Severa a Dependencia Moderada (M13DSMdSEV-dMOD)

Modelo dependiente de la edad y de la duración en el que la probabilidad de que un individuo con dependencia severa transite o cambie al estado de dependencia moderada pudiendo experimentar en el paso intermedio un estado de dependencia moderada, de dependencia severa o de gran dependencia. Los submodelos que definen estas probabilidades de transición son los siguientes:

Submodelos 13.1, 13.2 y 13.3

Dependencia de Semi-Markov para la transición de Dependencia Severa a Dependencia Moderada Pasando por Dependencia Moderada (13.1), Severa (13.2) o Gran Dependencia (13.3) (SM1DSMdSEV–dMODPdMOD)

$$ {}_{q}\mathbf{P}_{\mathbf{x,d}}^{\mathbf{dSEV-dMOD}} = {}_{q}P_{x,d}^{dSEV-Act} * m_{x+q}^{Activo-dMOD} - $$

$$ \int_{0}^{q} \begin{array}{l} - \; {}_{q}P_{x,d}^{\overline{dMOD-dMOD}} * \left(m_{x+q,d+q}^{dMOD-Activo} + m_{x+q,d+q}^{dMOD-muerto} \right) - \\ {}_{q-s}P_{x,d}^{dSEV-Act} * m_{x+q-s}^{Act-dMOD} * {}_{s}P_{x+q-s,0}^{\overline{dMOD-dMOD}} * \end{array} $$

$$ * \left(m_{x+q,s}^{dMOD-Activo} + m_{x+q,s}^{dMOD-muerto} \right) \; du $$

Modelo 14 de Dependencia de Semi-Markov para la transición de Dependencia Severa a Gran Dependencia (M14DSMdSEV-dGRA)

Modelo dependiente de la edad y de la duración en el que la probabilidad de que un individuo con dependencia severa transite o cambie al estado de gran dependencia pudiendo experimentar en el paso intermedio un estado de dependencia moderada, de dependencia severa o de gran dependencia. Los submodelos que definen estas probabilidades de transición son los siguientes:

Submodelos 14.1, 14.2 y 14.3

Dependencia de Semi-Markov para la transición de Dependencia Severa a Gran Dependencia Pasando por Dependencia Moderada (14.1), Severa (14.2) o Gran Dependencia (14.3) (SM1DSMdSEV–dGRAPdMOD)

$$
\begin{aligned}
{}_q\mathbf{P}_{\mathbf{x,d}}^{\mathbf{dSEV-dGRAN}} = {}& {}_qP_{x,d}^{\text{dSEV - Act}} * m_{x+q}^{\text{Activo - dGRAN}} - \\
& - {}_qP_{x,d}^{\overline{\text{dGRAN - dGRAN}}} * \left(m_{x+q,d+q}^{\text{dGRAN - Activo}} + m_{x+q,d+q}^{\text{dGRAN - muerto}} \right) - \\
\int_0^q & {}_{q-s}P_{x,d}^{\text{dSEV - Act}} * m_{x+q-s}^{\text{Act - dMOD}} * {}_sP_{x+q-s,0}^{\overline{\text{dMOD - dMOD}}} * \\
& * \left(m_{x+q,s}^{\text{dMOD - Activo}} + m_{x+q,s}^{\text{dMOD - muerto}} \right) du
\end{aligned}
$$

Modelo 15 de Dependencia de Semi-Markov para la transición de Gran Dependencia a Gran Dependencia (M15DSMdGRA-dGRA)

Modelo dependiente de la edad y de la duración en el que la probabilidad de que un individuo con gran dependencia transite o cambie al estado de gran dependencia pudiendo experimentar en el paso intermedio un estado de dependencia moderada, de dependencia severa o de gran dependencia. Los submodelos que definen estas probabilidades de transición son los siguientes:

Submodelos 15.1, 15.2 y 15.3

Dependencia de Semi-Markov para la transición de Gran Dependencia a Gran Dependencia Pasando por Dependencia Moderada (15.1), Severa (15.2) o Gran Dependencia (15.3) (SM1DSMdSEV–dGRAPdMOD)

$$
\begin{aligned}
{}_q\mathbf{P}_{\mathbf{x,d}}^{\mathbf{dGRAN-dGRAN}} = {}& {}_qP_{x,d}^{\text{dGRAN - Act}} * m_{x+q}^{\text{Activo - dGRAN}} - \\
& - {}_qP_{x,d}^{\overline{\text{dGRAN - dGRAN}}} * \left(m_{x+q,d+q}^{\text{dGRAN - Activo}} + m_{x+q,d+q}^{\text{dGRAN - muerto}} \right) -
\end{aligned}
$$

$$\int_0^q {}_{q-s}P_{x,d}^{dGRAN - Act} * m_{x+q-s}^{Act - dMOD} * {}_sP_{x+q-s,0}^{\overline{dMOD - dMOD}} *$$

$$* \left(m_{x+q,s}^{dMOD - Activo} + m_{x+q,s}^{dMOD - muerto} \right) du$$

Modelo 16 de Dependencia de Semi-Markov para la transición de Gran Dependencia a Dependencia Moderada (M16DSMdGRA-dMOD)

Modelo dependiente de la edad y de la duración en el que la probabilidad de que un individuo con gran dependencia transite o cambie al estado de dependencia moderada pudiendo experimentar en el paso intermedio un estado de dependencia moderada, de dependencia severa o de gran dependencia. Los submodelos que definen estas probabilidades de transición son los siguientes:

Submodelos 16.1, 16.2 y 16.3

Dependencia de Semi-Markov para la transición de Gran Dependencia a Dependencia Moderada Pasando por Dependencia Moderada (16.1), Severa (16.2) o Gran Dependencia (16.3) (SM1DSMdGRA–dMODPdMOD)

$$\mathbf{{}_qP_{x,d}^{dGRAN - dMOD}} = {}_qP_{x,d}^{dGRAN - Act} * m_{x+q}^{Activo - dMOD} -$$

$$- {}_qP_{x,d}^{\overline{dMOD - dMOD}} * \left(m_{x+q,d+q}^{dMOD - Activo} + m_{x+q,d+q}^{dMOD - muerto} \right) -$$

$$\int_0^q {}_{q-s}P_{x,d}^{dGRAN - Act} * m_{x+q-s}^{Act - dMOD} * {}_sP_{x+q-s,0}^{\overline{dMOD - dMOD}} *$$

$$* \left(m_{x+q,s}^{dMOD - Activo} + m_{x+q,s}^{dMOD - muerto} \right) du$$

Modelo 17 de Dependencia de Semi-Markov para la transición de Gran Dependencia a Dependencia Severa (M17DSMdGRA-dSEV)

Modelo dependiente de la edad y de la duración en el que la probabilidad de que un individuo con gran dependencia transite o cambie al estado de dependencia severa pudiendo experimentar en el paso intermedio un estado de dependencia moderada, de dependencia severa o de gran dependencia. Los submodelos que definen estas probabilidades de transición son los siguientes:

Submodelos 17.1, 17.2 y 17.3

Dependencia de Semi-Markov para la transición de Gran Dependencia a Dependencia Severa Pasando por Dependencia Moderada (17.1), Severa (17.2) o Gran Dependencia (17.3) (SM1DSMdGRA–dSEVPdMOD)

$$
{}_{q}\mathbf{P}_{\mathbf{x,\,d}}^{\mathbf{dGRAN-dSEV}} = {}_{q}P_{x,\,d}^{\,dGRAN\text{ - }Act} * m_{x+q}^{\,Activo\text{ - }dSEV} - {}_{q}P_{x,\,d}^{\,\overline{dSEV\text{ - }dSEV}} * \left(m_{x+q,\,d+q}^{\,dSEV\text{ - }Activo} + m_{x+q,\,d+q}^{\,dSEV-muerto} \right) - \int_0^q {}_{q-s}P_{x,\,d}^{\,dGRAN-Act} * m_{x+q-s}^{\,Act-dMOD} * {}_{s}P_{x+q-s,\,0}^{\,\overline{dMOD-dMOD}} * \left(m_{x+q,\,s}^{\,dMOD\text{ - }Activo} + m_{x+q,\,s}^{\,dMOD-muerto} \right) du
$$

Modelo 18 de Dependencia de Semi-Markov para la transición de Dependencia Moderada a Fallecimiento (M18DSMdMOD-Fall)

Modelo dependiente de la edad y de la duración en el que la probabilidad de que un individuo con dependencia moderada transite o cambie al estado de fallecimiento irreversible pudiendo experimentar en el paso intermedio un estado de dependencia moderada, de dependencia severa o de gran dependencia. Los submodelos que definen estas probabilidades de transición son los siguientes:

Submodelos 18.1, 18.2 y 18.3

Dependencia de Semi-Markov para la transición de Dependencia Moderada a Fallecimiento Pasando por Dependencia Moderada (18.1), Severa (18.2) o Gran Dependencia (18.3) (SM1DSMdMOD–dFallPdMOD)

$$
{}_{q}\mathbf{P}_{\mathbf{x,d}}^{\mathbf{dMOD-muerto}} = {}_{q}P_{x,\,d}^{\,dMOD\text{ - }Activo} * m_{x+q}^{\,Activo\text{ - }muerto} + {}_{q}P_{x,\,d}^{\,\overline{dMOD\text{ - }dMOD}} * m_{x+q,\,d+q}^{\,dMOD\text{ - }muerto} + \int_0^q {}_{q-s}P_{x,\,d}^{\,dMOD-Act} * m_{x+q-s}^{\,Act-dMOD} * {}_{s}P_{x+q-s,\,0}^{\,\overline{dMOD\text{ - }dMOD}} * m_{x+q,\,s}^{\,dMOD\text{ - }muerto} \, du
$$

Modelo 19 de Dependencia de Semi-Markov para la transición de Dependencia Severa a Fallecimiento (M19DSMdSEV-Fall)

Modelo dependiente de la edad y de la duración en el que la probabilidad de que un individuo con dependencia severa transite o cambie al estado de fallecimiento irreversible pudiendo experimentar en el paso intermedio un estado de dependencia moderada, de dependencia severa o de gran dependencia. Los submodelos que definen estas probabilidades de transición son los siguientes:

Submodelos 19.1, 19.2 y 19.3

Dependencia de Semi-Markov para la transición de Dependencia Severa a Fallecimiento Pasando por Dependencia Moderada (19.1), Severa (19.2) o Gran Dependencia (19.3) (SM1DSMdSEV–dFallPdMOD)

$$
{}_{q}\mathbf{P}_{\mathbf{x,\,d}}^{\mathbf{dSEV-muerto}} = {}_{q}P_{x,\,d}^{\mathrm{dSEV\,-\,Activo}} * m_{x\,+q}^{\mathrm{Activo\,-\,muerto}} + {}_{q}P_{x,\,d}^{\overline{\mathrm{dSEV\,-\,dSEV}}} * m_{x\,+q,\,d+q}^{\mathrm{dSEV\,-\,muerto}} + \int_{0}^{q} {}_{q\,-\,s}P_{x,\,d}^{\mathrm{dSEV-Act}} * m_{x+q-\,s}^{\mathrm{Act-dMOD}} * {}_{s}P_{x+q-s,\,0}^{\overline{\mathrm{dMOD\,-\,dMOD}}} * m_{x\,+q,\,s}^{\mathrm{dMOD\,-\,muerto}}\, du
$$

Modelo 20 de Dependencia de Semi-Markov para la transición de Gran Dependencia a Fallecimiento (M20DSMdGRA-Fall)

Modelo dependiente de la edad y de la duración en el que la probabilidad de que un individuo con gran dependencia transite o cambie al estado de fallecimiento irreversible pudiendo experimentar en el paso intermedio un estado de dependencia moderada, de dependencia severa o de gran dependencia. Los submodelos que definen estas probabilidades de transición son los siguientes:

Submodelos 20.1, 20.2 y 20.3

Dependencia de Semi-Markov para la transición de Gran Dependencia a Fallecimiento Pasando por Dependencia Moderada (20.1), Severa (20.2) o Gran Dependencia (20.3) (SM1DSMdGRA–dFallPdMOD)

$$
{}_{q}\mathbf{P}_{\mathbf{x,\,d}}^{\mathbf{dGRAN-muerto}} = {}_{q}P_{x,\,d}^{\mathrm{dGRAN\,-\,Activo}} * m_{x\,+q}^{\mathrm{Activo\,-\,muerto}} + {}_{q}P_{x,\,d}^{\overline{\mathrm{dGRAN\,-\,dGRAN}}} * m_{x\,+q,\,d+q}^{\mathrm{dGRAN\,-\,muerto}} +
$$

$$\int_0^q {}_{q-s}P_{x,d}^{\,dGRAN-Act} \; * \; m_{x+q-s}^{\,Act-dMOD} \; * \; {}_{s}P_{x+q-s,\,0}^{\,\overline{dMOD - dMOD}} \; * \; m_{x+q,\,s}^{\,dMOD-muerto} \; du$$

En el siguiente epígrafe veremos cómo se desarrollan todas las ecuaciones del modelo mediante los diferentes métodos de aproximación que se van a utilizar en el presente trabajo.

Con posterioridad se hace un estudio comparativo de los tres modelos planteados y estas comparaciones serán fácilmente visibles en los epígrafes posteriores donde se ejecuta un ejemplo práctico del modelo.

4.5. Algoritmos de integración numérica. Aproximación numérica de las ecuaciones integro-diferenciales de Volterra.

El planteamiento de las ecuaciones integro-diferenciales de Volterra lleva consigo el planteamiento de las ecuaciones de aproximación que permiten fácilmente el cálculo de las probabilidades de transición.

Para el cálculo de las probabilidades de transición partimos de las siguientes condiciones iniciales:

- Las probabilidades de transición iniciales en 0 son conocidas.
- Las intensidades de transición del modelo han sido calculadas con anterioridad al cálculo de las probabilidades de transición.

Una vez que disponemos de estos datos de partida, hay que calcular las aproximaciones de las ecuaciones de Volterra, para lo que disponemos de tres métodos de aproximación que vamos a emplear en este modelo de cálculo del seguro de dependencia mediante modelos de Semi-Markov. Son los siguientes métodos de aproximación:

- Método del Trapecio compuesto.
- Método de Gauss.
- Método de Simpson 1/3 compuesto

4.5.1. Aproximación numérica mediante regla del Trapecio compuesto

El método del Trapecio compuesto es un método de integración perteneciente a los métodos de Newton-Côtes, basado en integrar un polinomio de interpolación que aproxime a la función f(x) en [a, b].

La fórmula común de aproximación mediante la regla del Trapecio compuesto es la siguiente:

$$I = \int_0^q f(x)dx = \frac{h}{2} \; [f(x0 + \; 2 \; * \; \Sigma \; f(Xi) + \; f(Xn)]$$

Donde,

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Que aplicado a las ecuaciones de Volterra de nuestro modelo el planteamiento de la fórmula de aproximación sería el siguiente para el caso de la transición de un individuo activo a activo:

$$\int_0^q {}_{q-s}P_x^{\;Activo-Activo} * m_{x+q-s}^{\;Activo\text{-}dMOD} * {}_sP_{x+q-s,\,0}^{\;dMOD-dMOD} * $$

$$* m_{x+q,\,s}^{\;dMOD-Activo} \approx$$

$$\approx \; \Sigma \; [\, {}_{t_q-t_s}P_x^{\;Activo-Activo} * m_{x+t_q-ts}^{\;Activo\text{-}dMOD} * {}_{t_S}P_{x+t_q-t_S,\,0}^{\;\overline{dMOD\text{-}dMOD}} *$$

$$* \; m_{x+t_q,\,t_S}^{\;dMOD\text{-}Activo} * \; h \;] \; +$$

$$h/2 * m_x^{\;Activo\text{-}dMOD} * {}_{t_q}P_{x,\,0}^{\;\overline{dMOD-dMOD}} * m_{x+t_q,\,t_q}^{\;dMOD\text{-}Activo}$$

4.5.2. Aproximación numérica mediante el método de Gauss

El método de Gauss se emplea en el cálculo de integrales definidas mediante la aplicación de polinomios ortogonales. Vamos a utilizar el método de Gauss-Legendre cuya fórmula de aproximación de las ecuaciones integro-diferenciales de Volterra a partir de dicho método se estructura en los siguientes pasos:

a) En primer lugar, se calculan los polinomios de Legendre, que tienen la siguiente forma:

$P_0 (x) = 1$
$P_1 (x) = x$
$P_2 (x) = ½ (3x^2 -1)$
$P_3 (x) = ½ (5x^3 -3x)$
$P_4 (x) = 1/8 (35x^4 -30x^2 + 3)$

b) A partir de los polinomios de Legendre debemos obtener las raíces con las que se calculan los pesos w_0 y $w_{1.}$

c) A partir del polinomio de Lagrange se obtiene una definición alternativa de las funciones de ponderación, esto es:

$$Wt = \frac{1}{Pn + 1(Xt)} \int_{-1}^{1} \frac{Pn + 1\,(X)}{X - Xt}\, dx$$

d) Finalmente, permite que la fórmula de cuadratura de Gauss se calcule de la siguiente forma. En nuestro modelo de dependencia de Semi-Markov se utiliza el método de Gauss para uno y dos puntos si bien el modelo permite la formulación de Gauss para más puntos.

$$\int_a^b f(x)dx \; = \frac{b-a}{2} * \sum_{t=0}^{n} Wt * f \; [\frac{(b-a)*Pt+(b+a)}{2}]$$

Aplicando la formulación anterior de la cuadratura de Gauss, podemos obtener la aproximación de nuestro modelo de Semi-Markov mediante la adaptación de la fórmula anterior en nuestro modelo, como sigue:

$$\approx \; (b-a)/2 \quad [\;(1) \; * \; (\, {}_{q-s}P_{x}^{\,Activo-Activo} * m_{x\,+q-s}^{\,Activo\text{ - }dMOD} \; *$$

$$* \; {}_{s}P_{x+\,q-s,\,0}^{\,\overline{dMOD-dMOD}} \; * \; m_{x\,+q,\,s}^{\,dMOD\text{ - }Activo\,)} \; +$$

$$+ \quad (1) * \; (\, {}_{q-s}P_{x}^{\,Activo-Activo} * m_{x\,+q-s}^{\,Activo\text{ - }dMOD} \; *$$

$$* \; {}_{s}P_{x+\,q-s,\,0}^{\,\overline{dMOD-dMOD}} \; * \; m_{x\,+q,\,s}^{\,dMOD\text{ - }Activo\,)} \;]$$

4.5.3. Aproximación numérica mediante regla de Simpson 1/3 compuesto

La fórmula de aproximación de las ecuaciones integro-diferenciales de Volterra mediante el método de Simpson 1/3 compuesto es muy similar a la fórmula de aproximación mediante el método del Trapecio compuesto, si bien, ambos métodos de aproximación no tienen la misma estructura.

Es también un método de integración perteneciente a los métodos de Newton-Côtes de segundo orden, que consiste en hacer la integración de un polinomio de interpolación de segundo grado.

La fórmula común de aproximación mediante la regla del Simpson 1/3 compuesto es la siguiente:

$$I = \int_0^q f(x)\,dx = \frac{h}{3} * [f(x0) + \; 4 * \sum_{i=1}^{n-1} f(Xi) + \; 2 \sum_{i=2}^{n-2} f(Xi) + \; f(Xn)]$$

Donde, también en el método de Simpson 1/3 compuesto, “h” se calcula de la misma forma, como sigue:

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Y aplicado a las ecuaciones integro-diferenciales de Volterra de nuestro modelo el planteamiento de la fórmula de aproximación sería el siguiente para el caso de la transición de un individuo activo a activo. Para las demás transiciones del modelo de dependencia el proceso de aproximación se hace de idéntica forma.

$$\approx \quad \Sigma \; [\, _{t_q - t_s}P_x^{\text{Activo – Activo}} * m_{x+t_q-ts}^{\text{Activo - dMOD}} * \, _{t_S}\overline{P}_{x+t_q-t_S,\,0}^{\text{dMOD - dMOD}} *$$

$$* \; m_{x+t_q,\, t_S}^{\text{dMOD- Activo}} * \; 4h/3 \;] \; +$$

$$\Sigma \; [\, _{t_q - t_s}P_x^{\text{Activo – Activo}} * m_{x+t_q-ts}^{\text{Activo - dMOD}} * \, _{t_S}\overline{P}_{x+t_q-t_S,\,0}^{\text{dMOD - dMOD}} *$$

$$* \; m_{x+t_q,\, t_S}^{\text{dMOD- Activo}} * \; 2h/3 \;] \; +$$

$$h/3 * m_x^{\text{Activo - dMOD}} * \, _{t_q}\overline{P}_{x,\,0}^{\text{dMOD – dMOD}} * m_{x+t_q,\, t_q}^{\text{dMOD- Activo}}$$

4.6. Cálculo actuarial de rentas de Semi-Markov

Vamos a calcular un producto de seguro de rentas que está basado en la percepción de una renta por el asegurado basado en un producto de seguro de dependencia calculado a partir del modelo de Semi-Markov anteriormente planteado.

El producto de rentas se calcula utilizando el algoritmo de aproximación de las ecuaciones de Volterra que hayamos establecido previamente. El objetivo en esta parte del trabajo es calcular un producto de renta mediante los diferentes métodos de aproximación de las ecuaciones de Volterra.

Dado que el propósito principal de este trabajo es construir un conjunto completo bastante realista de modelos de transición y cambio de estado que se apoyan en complejas ecuaciones integro-diferenciales, es importante definir el tipo de rentas que se quieren calcular. Por motivo de conseguir simplicidad, facilidad y detalle en la construcción de los valores actuariales de nuestro modelo y dada la complejidad de las ecuaciones de Volterra planteadas, es necesario introducir los rasgos determinantes en el cálculo del valor actuarial de rentas empleado en nuestro trabajo. Son los siguientes:

- Determinación del valor actuarial de rentas de Semi-Markov.
- Cálculo de rentas en tiempo continuo de tipo anual.
- Se trata de productos de rentas pagaderos mientras el asegurado mantiene un determinado estado, esto es, pudiendo pagarle una renta mientras se mantiene dependiente o en estado de actividad.
- Basado en los estados de transición que marca el modelo de múltiples estados de Semi-Markov, teniendo en cuenta la edad y la duración.
- Aplicación en el cálculo de rentas de los métodos de aproximación de integrales establecidos en el trabajo.
- Comparación del cálculo de rentas basado en la técnica tradicional de Solvencia y bajo los nuevos estándares marcados por Solvencia II.

Permite que establezcamos la tipología en base formulaica del tipo de rentas que se quieren calcular en función de los estados de transición bajo los que se sostiene el modelo de dependencia planteado. Son las siguientes:

Modelo de Renta de Dependencia de Semi-Markov 1: Valor presente esperado de la renta de un individuo activo que se paga sólo si el individuo asegurado continúa activo.

$$\bar{a}_{x_0:\bar{q}}{}^{activo-activo} = \int_0^q v^t * \; q\, P_x{}^{activo-activo} \; dt$$

Modelo de Renta de Dependencia de Semi-Markov 2: Valor presente esperado de la renta de un individuo que en el inicio se encuentra activo y se le paga sólo si permanece en estado dependiente (moderado, severo o gran dependiente).

$$\bar{a}_{x_0:\bar{q}}{}^{activo-dep.(mod,\ sev\ o\ gran)} = \int_0^q v^t * \; q\, P_x{}^{activo-dep.(mod,\ sev\ o\ gran)} \; dt$$

Modelo de Renta de Dependencia de Semi-Markov 3: Valor presente esperado de la renta de un individuo que inicialmente se encuentra en estado de dependiente (moderado, severo o gran dependiente) con duración de la dependencia “d” y cuyo fin de pago de la renta acontece cuando entra en estado de recuperación o fallecimiento.

$$\bar{a}_{x,z:\bar{q}}{}^{dep.(m,s\ o\ g)-dep.(m,s\ o\ g)} = \int_0^q v^t * \; q\, P_{x,z}{}^{dep.(m,s\ o\ g)-dep.(m,s\ o\ g)} \; dt$$

4.6.1. Rentas con regla del Trapecio compuesto

Utilizando el método de aproximación del Trapecio compuesto podemos formular un tipo de renta a percibir por un asegurado en nuestro modelo dependencia. Asumimos que se trata de una renta temporal sin periodo de diferimiento. A modo de ejemplo en este trabajo, se representa como sería el desarrollo completo de una renta de una persona que en inicio está activa y es pagadera mientras la persona sigue estando activa (Modelo de Renta de dependencia de Semi-Markov 1), en aplicación del método de aproximación del trapecio compuesto.

Los modelos de Renta de dependencia de Semi-Markov 2 y 3 se plantearían de la misma forma teniendo en cuenta las probabilidades de transición de cada modelo.

$$\bar{a}_{x_0:\bar{q}\ (\mathrm{A1})}{}^{activo-activo} = \int_0^q v^t * \; q\, P_x{}^{activo-activo} \; dt$$

Donde la relación definitiva aplicando la regla del trapecio es la siguiente:

$$\bar{a}_{x_0:\bar{q}\ (\mathrm{A1})}{}^{activo-activo} = \Sigma \; [\, t_q - t_s \; P_x{}^{\text{Activo – Activo}} * m_{x + t_q - t_s}{}^{\text{Activo - dMOD}} *$$

$$ {}_{t_S}P_{x+t_q-t_S,\,0}{}^{\overline{dMOD-dMOD}} * m_{x+t_q,\,t_S}{}^{dMOD\text{-}Activo} * h * \mathbf{v}^{\mathbf{t}}] + $$

$$ + h/2 * m_x{}^{Activo\text{-}dMOD} * {}_{t_q}P_{x,0}{}^{dMOD-dMOD} * m_{x+t_q,\,t_q}{}^{dMOD\text{-}Activo} * \mathbf{v}^{\mathbf{t}} $$

4.6.2. Rentas con método de Gauss

La aplicación del método de aproximación de Gauss nos permite su utilización también en el cálculo de determinados productos de rentas temporales. Para ello asumimos que en el cálculo de dichas rentas no hay periodos de diferimiento, e igual que con la aproximación mediante el trapecio compuesto, se representa a modo de ejemplo como sería la renta de una persona que en inicio está activa y es pagadera mientras la persona sigue estando activa (Modelo de Renta de dependencia de Semi-Markov 1).

Los modelos de Renta de dependencia de Semi-Markov 2 y 3 se plantearían de la misma forma teniendo en cuenta las probabilidades de transición de cada modelo.

$$ \bar{a}_{x_0:\bar{q}}\ (\mathrm{A2})^{\,activo-activo} = \int_0^q v^t * q\,P_x{}^{\,activo-activo}\ dt $$

La relación definitiva con la aplicación del método de Gauss es la siguiente:

$$ \bar{a}_{x_0:\bar{q}}\ (\mathrm{A2})^{\,activo-activo} = \Big(1 - h\ (m_{x+t_q}{}^{Activo-dMOD} + m_{x+t_q}{}^{Activo-muerto})\Big) * $$

$$ * {}_{t_q}P_x{}^{Activo-Activo} + h\Big((b-a)/2\ \ \big[(1) * ({}_{t_q-t_s}P_x{}^{Activo-Activo} * $$

$$ m_{x+t_q-t_S}{}^{Activo-dMOD} * {}_{t_S}P_{x+t_q-t_S,\,0}{}^{\overline{dMOD-dMOD}} * $$

$$ * m_{x+t_q,\,t_S}{}^{dMOD\text{-}Activo}) + $$

$$ (1) * ({}_{t_q-t_s}P_x{}^{Activo-Activo} * m_{x+t_q-t_S}{}^{Activo-dMOD} * $$

$$ {}_{t_S}P_{x+t_q-t_S,\,0}{}^{dMOD-dMOD} * m_{x+t_q,\,t_S}{}^{dMOD\text{-}Activo}) \big] * \mathbf{v}^{\mathbf{t}} $$

4.6.3. Rentas con método de Simpson 1/3 compuesto

Igual que los anteriores métodos de aproximación, el cálculo de una renta temporal utilizando el método de Simpson 1/3 compuesto se formula mediante la siguiente expresión para el caso de la renta de una persona que en inicio está activa y es pagadera mientras la persona sigue estando activa (Modelo de Renta de dependencia de Semi-Markov 1).

Los modelos de Renta de dependencia de Semi-Markov 2 y 3 se plantearían de la misma forma teniendo en cuenta las probabilidades de transición específicas de cada modelo.

$$\bar{a}_{x_0:\bar{q}\ (\mathrm{A3})}{}^{activo-activo} = \int_0^q v^t * q\, P_x{}^{activo-activo}\, dt$$

Con la siguiente relación definitiva en términos de aproximación mediante el método de Simpson 1/3 compuesto:

$$\bar{a}_{x_0:\bar{q}\ (\mathrm{A3})}{}^{activo-activo} = \Sigma\ [\, {}_{t_q - t_s}P_x{}^{\text{Activo – Activo}} * m_{x+t_q-t_S}{}^{\text{Activo - dMOD}} *$$

$$ {}_{t_S}P_{x+t_q-t_S,\,0}{}^{\overline{\text{dMOD – dMOD}}} * m_{x+t_q,\ t_S}{}^{\text{dMOD- Activo}} * 4h/3 * \mathbf{v^t}\,] +$$

$$\Sigma\ [\, {}_{t_q - t_s}P_x{}^{\text{Activo – Activo}} * m_{x+t_q-t_S}{}^{\text{Activo - dMOD}} *$$

$$ {}_{t_S}P_{x+t_q-t_S,\,0}{}^{\overline{\text{dMOD – dMOD}}} * m_{x+t_q,\ t_S}{}^{\text{dMOD- Activo}} * 2h/3 * \mathbf{v^t}\,] +$$

$$+\ h/3 * m_x{}^{\text{Activo - dMOD}} * {}_{t_q}P_{x,\,0}{}^{\text{dMOD – dMOD}} * m_{x+t_q,\ t_q}{}^{\text{dMOD- Activo}} * \mathbf{v^t}$$

4.7. Cálculo actuarial de primas de Semi-Markov

El planteamiento de los valores actuariales de las rentas de Semi-Markov lleva aparejado consigo el cálculo de primas bajo las mismas condiciones de edad y duración planteadas en el cálculo de rentas. Con el objetivo de calcular la prima nivelada que le correspondería a un producto de seguro bajo las hipótesis que contempla este trabajo, se debe asumir las siguientes condiciones:

- El pago de primas cesa mientras la cartera de individuos asegurados se encuentre en situación de dependencia, ya sea moderada, severa o gran dependencia para nuestro Modelo 1 de dependencia o dependencia por enfermedad de Esclerosis múltiple, Parkinson o Alzheimer para nuestro Modelo 2 de dependencia.

- Los pagos de primas finalizan después de “q” años, esto es, q<n, bajo la necesidad de evitar una reserva de actividad negativa cercana al vencimiento.

4.7.1. Primas con regla del Trapecio compuesto

La fórmula de aproximación del Trapecio compuesto es perfectamente adaptable en el cálculo de primas, teniendo en cuenta siempre los valores presentes de las rentas los cuales son requeridos en su configuración. Su planteamiento teórico tiene la siguiente forma:

$$P_{x0:q,n} = Prima\ nivelada\ (B1) = \frac{\bar{a}_{x_0:n\ (\mathrm{A1})}^{\ act-dep.(mod,sev\ o\ gran)}}{\bar{a}_{x_0:q\ (\mathrm{A1})}^{\ act-act} + \bar{a}_{x_0:q\ (\mathrm{A1})}^{\ act-dep.(mod,sev\ o\ gran)}}$$

4.7.2. Primas con método de Gauss

Para el cálculo de las primas mediante la aproximación con el método de Gauss se emplea el mismo planteamiento teórico.

$$P_{x0:q,n} = Prima\ nivelada\ (B2) = \frac{\bar{a}_{x_0:n\ (\mathrm{A2})}^{\ act-dep.(mod,sev\ o\ gran)}}{\bar{a}_{x_0:q\ (\mathrm{A1})}^{\ act-act} + \bar{a}_{x_0:q\ (\mathrm{A2})}^{\ act-dep.(mod,sev\ o\ gran)}}$$

4.7.3. Primas con método de Simpson 1/3 compuesto

En último lugar, aplicamos la misma fórmula para el cálculo de primas mediante la fórmula de aproximación de Simpson 1/3 compuesto.

$$P_{x0:q,n} = Prima\ nivelada\ (B3) = \frac{\bar{a}_{x_0:n\ (\mathrm{A3})}^{\ act-dep.(mod,sev\ o\ gran)}}{\bar{a}_{x_0:q\ (\mathrm{A1})}^{\ act-act} + \bar{a}_{x_0:q\ (\mathrm{A3})}^{\ act-dep.(mod,sev\ o\ gran)}}$$

4.8. Cálculo actuarial de provisiones de Semi-Markov

El presente capítulo pretende una aproximación al cálculo del valor presente de la provisión matemática basado en los Modelos de dependencia 1 y 2 planteados en el trabajo. Expresaremos la provisión matemática en su forma más teórica, es decir, bajo la definición exacta de la reserva prospectiva, definida como el valor actuarial de los beneficios futuros menos el valor actuarial de las primas futuras.

Con el objetivo de modelizar la provisión matemática correspondiente a un modelo de Semi-Markov basado en ecuaciones de integrales y diferenciales como el nuestro, nos proponemos el cálculo de dos tipos de reserva:

- Reserva de actividad.
- Reserva de dependencia (moderada, severa o gran dependencia).

4.8.1. Provisiones con regla del Trapecio compuesto

La formulación actuarial para el método de cálculo de provisiones con aproximación mediante Trapecio compuesto se recoge a través de una doble tipología.

De un lado, la reserva de actividad, para $0 \leq t < q$:

$$
\begin{aligned}
V_{x0+t,n-t}^{\,Actividad}\ (C1.1) &= Reserva\ actividad \\
&= \bar{a}_{x_0+t:n-t\ \text{(A1)}}^{\,act-dep.(mod,sev\ o\ gran)} - P_{x0:q,n}\ (\bar{a}_{x_0+t:q-t\ \text{(A1)}}^{\,act-act} \\
&+ \bar{a}_{x_0+t:q-t\ \text{(A1)}}^{\,act-dep.(mod,sev\ o\ gran)}\ )
\end{aligned}
$$

Y la reserva de actividad para $q \leq t \leq n$:

$$V_{x0+t,n-t}^{\,Actividad}\ (C1.1) = Reserva\ actividad = \bar{a}_{x_0+t:n-t\ \text{(A1)}}^{\,act-dep.(mod,sev\ o\ gran)}$$

Por otro lado, la reserva de dependencia (moderada, severa o gran dependencia):

$$
\begin{aligned}
V_{x0+t,n-t}^{\,Dependencia}\ (C1.2) &= Reserva\ dependencia = \bar{a}_{x_0+t:n-t\ \text{(A1)}}^{\,dep.(mod,sev\ o\ gran)-dep.(mod,sev\ o\ gran)} \\
&= \int_0^{n-t} v^t * q\, P_{x+t}^{\,dep.(m,s\ o\ g)-dep.(m,s\ o\ g)}\ (A1)\ dt
\end{aligned}
$$

4.8.2. Provisiones con método de Gauss

La formulación actuarial para el método de cálculo de provisiones con aproximación mediante Gauss es la siguiente:

De un lado, la reserva de actividad, para $0 \leq t < q$:

$$
\begin{aligned}
V_{x0+t,n-t}^{\,Actividad}\ (C2.1) &= Reserva\ actividad \\
&= \bar{a}_{x_0+t:n-t\ \text{(A2)}}^{\,act-dep.(mod,sev\ o\ gran)} - P_{x0:q,n}\ (\bar{a}_{x_0+t:q-t\ \text{(A2)}}^{\,act-act} \\
&+ \bar{a}_{x_0+t:q-t\ \text{(A2)}}^{\,act-dep.(mod,sev\ o\ gran)}\ )
\end{aligned}
$$

Y la reserva de actividad para $q \leq t \leq n$:

$$V_{x0+t,n-t}^{\,Actividad}\ (C2.1) = Reserva\ actividad = \bar{a}_{x_0+t:n-t\ \text{(A2)}}^{\,act-dep.(mod,sev\ o\ gran)}$$

Por otro lado, la reserva de dependencia (moderada, severa o gran dependencia):

$$V_{x0+t,n-t}^{Dependencia}\ (C2.2) = Reserva\ dependencia = \bar{a}_{x_0+t:n-t\ (\mathrm{A2})}^{dep.(mod,sev\ o\ gran)-dep.(mod,sev\ o\ gran)}$$
$$= \int_0^{n-t} v^t * q\, P_{x+t}^{dep.(m,s\ o\ g)-dep.(m,s\ o\ g)}\ (A2)\ dt$$

4.8.3. Provisiones con método de Simpson 1/3 compuesto

La formulación actuarial para el método de cálculo de provisiones con aproximación mediante Simpson 1/3 compuesto es la siguiente:

De un lado, la reserva de actividad, para 0 ≤ t < q:

$$V_{x0+t,n-t}^{Actividad}\ (C3.1) = Reserva\ actividad$$
$$= \bar{a}_{x_0+t:n-t\ (\mathrm{A3})}^{act-dep.(mod,sev\ o\ gran)} - P_{x0:q,n}\ (\bar{a}_{x_{0+t}:q-t\ (\mathrm{A3})}^{act-act}$$
$$+ \bar{a}_{x_{0+t}:q-t\ (\mathrm{A3})}^{act-dep.(mod,sev\ o\ gran)}\ )$$

Y la reserva de actividad para q ≤ t ≤ n:

$$V_{x0+t,n-t}^{Actividad}\ (C3.1) = Reserva\ actividad = \bar{a}_{x_0+t:n-t\ (\mathrm{A3})}^{act-dep.(mod,sev\ o\ gran)}$$

Por otro lado, la reserva de dependencia (moderada, severa o gran dependencia):

$$V_{x0+t,n-t}^{Dependencia}\ (C3.2) = Reserva\ dependencia = \bar{a}_{x_0+t:n-t\ (\mathrm{A3})}^{dep.(mod,sev\ o\ gran)-dep.(mod,sev\ o\ gran)}$$
$$= \int_0^{n-t} v^t * q\, P_{x+t}^{dep.(m,s\ o\ g)-dep.(m,s\ o\ g)}\ (A3)\ dt$$

5. RESULTADOS

5.1. Aplicación práctica del modelo

La configuración del modelo teórico del presente trabajo lleva aparejado la creación de un modelo práctico. En el modelo teórico nos hemos limitado a dar contestación a todas las partes que configuran la estructura del modelo de Semi-Markov en tiempo continuo. Para la parte práctica, proponemos dar un detalle de los principales resultados obtenidos a partir de la aplicación del modelo teórico en cada uno de los modelos objeto de estudio planteados en este trabajo.

En los siguientes apartados se recogen todos los resultados que se consideran más relevantes para poder explicar el modelo teórico planteado. Al tratarse de un modelo de estudio de gran complejidad se exige de una alta capacidad y rigor en cuanto a la documentación de resultados, y es por eso que sólo se exponen los resultados más importantes ya sean del Modelo 1 o del Modelo 2.

Para ambas líneas de investigación y en apoyo de los tres métodos de aproximación de integrales que planteamos (Gauss, Trapecio compuesto y Simpson 1/3 compuesto) se obtienen resultados en cuanto a:

- Probabilidades de transición realistas a partir de graduación de intensidades de transición.
- Cálculo de rentas basado en el cálculo de probabilidades de transición.
- Cálculo de primas tomando como base el cálculo de rentas.
- Cálculo de provisiones de actividad y de dependencia.

5.2. Resultados de los cálculos de las aproximaciones numéricas

En esta parte del trabajo se representan los resultados más importantes de las aproximaciones de las ecuaciones de Volterra mediante los tres métodos de aproximación utilizados.

En primer lugar, los resultados utilizando el método del trapecio compuesto. Seguido de este método se representan los resultados del método de Gauss y por último los resultados utilizando el método de Simpson 1/3 compuesto.

5.2.1. Aproximación mediante la regla del Trapecio compuesto

En la siguiente tabla aparecen representados los principales resultados de las probabilidades de transición para el Modelo 1 de dependencia utilizando modelos de Semi-Markov mediante la aproximación con la regla del Trapecio compuesto.

Permite que supongamos que los resultados que se quieren obtener son los de las probabilidades de transición para hombres y mujeres que mantienen su estado de actividad en el estado final pero en el paso intermedio experimentan dependencia moderada, severa o gran dependencia.

En el anexo del trabajo se especifica un código de programación en Visual Basic para que de forma complementaria podamos ver que las fórmulas están arrojando datos de probabilidades de transición con exactitud.

	TRAPECIO COMPUESTO					
	b			**1**		
	a			**0**		
Peso Wi (gauss)	**n**			**6**		
Raiz Zi (gauss)	**h**			**0,166666667**		
Edad/Duración	**Hombre**			**Mujer**		
	Paso intermedio			**Paso intermedio**		
	Dependencia moderada	**Dependencia severa**	**Gran dependencia**	**Dependencia moderada**	**Dependencia severa**	**Gran dependencia**
5	0,265175607	0,253550957	0,2778863	0,27382558	0,305612019	0,281571246

6	0,265057478	0,254053827	0,276762834	0,273945275	0,304032813	0,281184072
7	0,264881269	0,254464318	0,27567041	0,274001455	0,302510984	0,280785621
8	0,264652229	0,254789433	0,27460823	0,273998785	0,30104384	0,280376621
9	0,264375374	0,255035889	0,273575431	0,273941725	0,299628687	0,279957701
10	0,264055493	0,255210123	0,272571083	0,273834534	0,298262833	0,279529386
11	0,26369714	0,25531829	0,271594193	0,273681268	0,296943586	0,2790921
12	0,26330464	0,255366258	0,270643702	0,273485781	0,295668252	0,278646165
13	0,262882087	0,255359616	0,269718487	0,273251723	0,29443414	0,278191802
14	0,262433344	0,255303669	0,268817358	0,272982541	0,293238555	0,277729128
15	0,261962043	0,255203438	0,267939063	0,27268148	0,292078806	0,277258161
16	0,261471585	0,255063663	0,267082282	0,272351584	0,2909522	0,276778816
17	0,260965141	0,2548888	0,26624563	0,271995691	0,289856044	0,276290905
18	0,26044565	0,254683022	0,265427659	0,271616438	0,288787646	0,27579414
19	0,25991582	0,25445022	0,264626856	0,271216261	0,287744312	0,27528813
20	0,259378129	0,254194001	0,26384164	0,270797389	0,28672335	0,274772383
21	0,258834823	0,25391769	0,263070367	0,270361853	0,285722068	0,274246304
22	0,258287918	0,253624329	0,262311329	0,269911478	0,284737772	0,273709198
23	0,257739199	0,253316677	0,261562751	0,269447887	0,28376777	0,273160267
24	0,25719022	0,25299721	0,260822793	0,268972502	0,282809369	0,27259861
25	0,256642303	0,252668122	0,260089552	0,26848654	0,281859877	0,272023227
26	0,256096542	0,252331323	0,259361057	0,267991017	0,280916601	0,271433015
27	0,255553796	0,25198844	0,258635275	0,267486744	0,279976848	0,270826768
28	0,255014696	0,251640819	0,257910105	0,266974333	0,279037925	0,270203178
29	0,254479641	0,25128952	0,257183384	0,26645419	0,27809714	0,269560839
30	0,253948801	0,250935324	0,256452881	0,265926519	0,2771518	0,268898239
31	0,253422111	0,250578727	0,255716301	0,265391323	0,276199212	0,268213765
32	0,25289928	0,250219941	0,254971285	0,2648484	0,275236684	0,267505704
33	0,252379783	0,249858897	0,254215408	0,264297346	0,274261523	0,266772239
34	0,251862863	0,249495243	0,253446181	0,263737556	0,273271037	0,266011453
35	0,251347536	0,249128344	0,252661047	0,26316822	0,272262531	0,265221327
36	0,250832585	0,24875728	0,251857388	0,262588326	0,271233315	0,264399738
37	0,25031656	0,248380853	0,251032517	0,261996661	0,270180694	0,263544464
38	0,249797784	0,247997576	0,250183686	0,261391805	0,269101978	0,262653179
39	0,249274346	0,247605684	0,249308078	0,260772141	0,267994471	0,261723457
40	0,248744107	0,247203128	0,248402814	0,260135845	0,266855483	0,260752768
41	0,248204694	0,246787574	0,247464949	0,259480891	0,265682321	0,259738484
42	0,247653504	0,246356407	0,246491471	0,258805052	0,26447229	0,25867787
43	0,247087705	0,24590673	0,245479306	0,258105897	0,2632227	0,257568094
44	0,246504233	0,245435361	0,244425313	0,257380793	0,261930857	0,256406218
45	0,245899791	0,244938837	0,243326287	0,256626903	0,260594069	0,255189206
46	0,245270853	0,24441341	0,242178957	0,255841188	0,259209642	0,253913918
47	0,244613664	0,243855051	0,240979987	0,255020407	0,257774885	0,252577113
48	0,243924234	0,243259448	0,239725978	0,254161115	0,256287104	0,251175446
49	0,243198345	0,242622005	0,238413462	0,253259666	0,254743606	0,249705474
50	0,242431547	0,241937843	0,23703891	0,25231221	0,2531417	0,24816365
51	0,241619159	0,241201803	0,235598725	0,251314695	0,251478692	0,246546324
52	0,240756271	0,240408441	0,234089247	0,250262864	0,24975189	0,244849747
53	0,239837738	0,239552028	0,23250675	0,249152261	0,2479586	0,243070066
54	0,238858188	0,238626556	0,230847443	0,247978225	0,246096131	0,241203328
55	0,237812017	0,237625733	0,22910747	0,246735893	0,24416179	0,239245475
56	0,236693389	0,236542982	0,227282909	0,245420198	0,242152883	0,237192351
57	0,235496238	0,235371446	0,225369775	0,244025872	0,240066718	0,235039696
58	0,234214267	0,234103984	0,223364016	0,242547444	0,237900603	0,232783149
59	0,232840948	0,232733171	0,221261516	0,24097924	0,235651844	0,230418247
60	0,231369522	0,231251301	0,219058094	0,239315382	0,23331775	0,227940424
61	0,229792999	0,229650385	0,216749504	0,237549792	0,230895627	0,225345014

62	0,22810416	0,227922149	0,214331433	0,235676186	0,228382782	0,222627249
63	0,226295551	0,226058039	0,211799506	0,233688081	0,225776524	0,219782257
64	0,224359491	0,224049216	0,209149281	0,231578788	0,223074159	0,216805068
65	0,222288066	0,221886559	0,206376252	0,229341418	0,220272994	0,213690606

La representación gráfica del cálculo de probabilidades de transición para la transición de activo a activo en hombres mediante la regla del Trapecio compuesto es la siguiente:

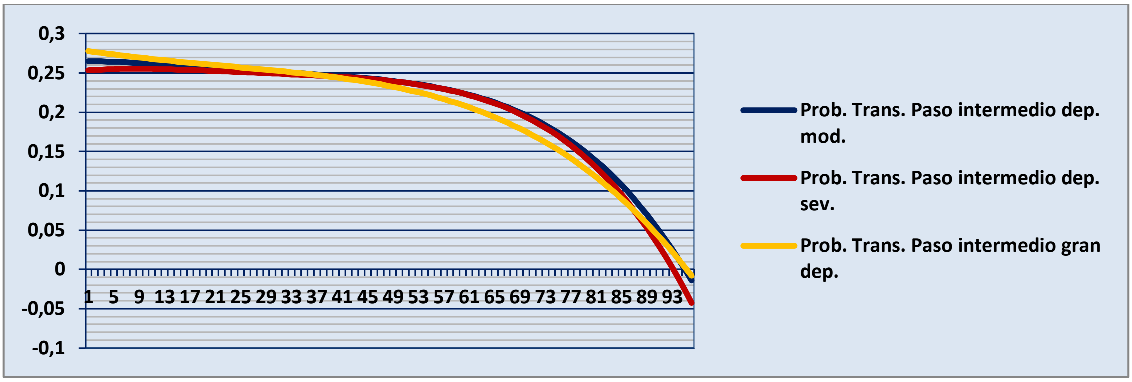


Ilustración 8 Probabilidad de transición de activo a activo en hombres aplicando método del Trapecio compuesto. Paso intermedio en dependencia moderada, severa o gran dependencia.

Con el Modelo 2 a partir de la Encuesta de Morbilidad hospitalaria, bajo la misma hipótesis de cálculo de probabilidades de transición de activo a activo, se puede hacer la siguiente representación tomando como objeto de estudio los años 2005, 2009 y 2013 en hombres con paso intermedio en dependencia moderada por enfermedad de Esclerosis múltiple.

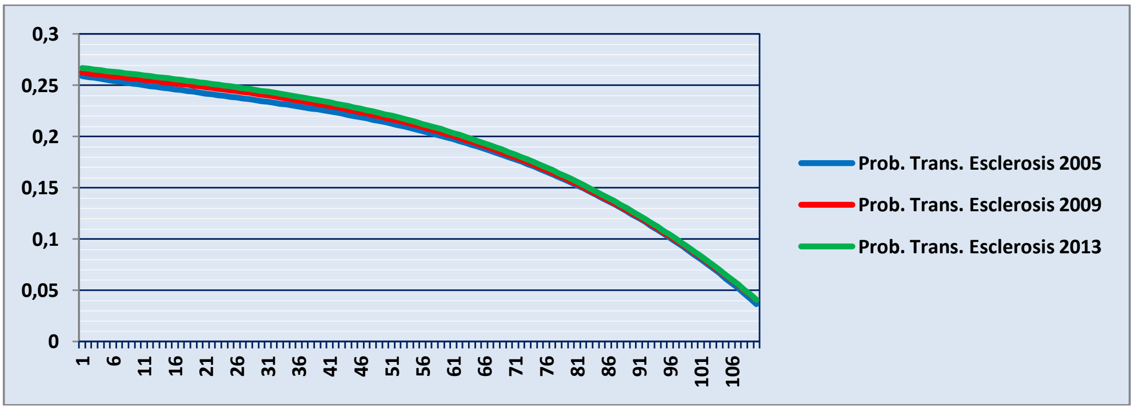


Ilustración 33 Probabilidad de transición de activo a activo en hombres aplicando método del Trapecio compuesto. Paso intermedio en dependencia moderada (Esclerosis múltiple). Años 2005, 2009 y 2013

Permite que representemos también como sería la evolución de las probabilidades de transición con paso intermedio en dependencia moderada por enfermedad de Esclerosis múltiple en hombres y mujeres tomando como referencia de estudio los datos del año 2013.

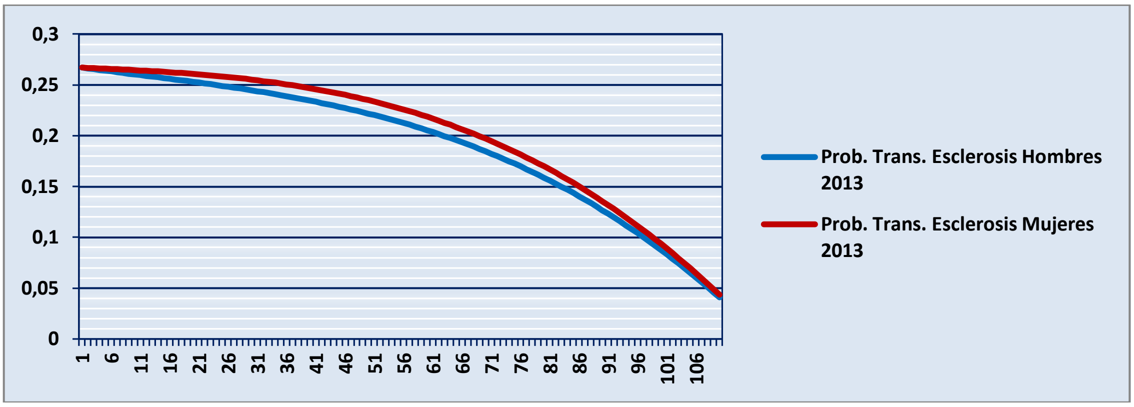


Ilustración 34 Probabilidad de transición de activo a activo en hombres y mujeres aplicando método del Trapecio compuesto. Paso intermedio en dependencia moderada (Esclerosis múltiple). Año 2013

5.2.2. Aproximación mediante el método de Gauss

La utilización del método de Gauss nos arroja unos resultados algo más precisos que con las aproximaciones mediante el Trapecio y Simpson.

En el siguiente cuadro se representan los valores de las probabilidades de transición del Modelo 1 en hombres para la transición de activo a activo con dependencia moderada o severa en el paso intermedio mediante el método de Gauss en dos puntos.

	MÉTODO DE GAUSS	
	n=1 (2 puntos)	
Peso Wi (gauss)	**1,0000**	
Raiz Zi (gauss)	**0,577350269**	
Edad/Duración	**Hombre**	
	Paso intermedio	
	Dependencia moderada	**Dependencia severa**
22	0,09645	0,001526517
23	0,10115	0,00902501
24	0,10553	0,016160474
25	0,10964	0,022991251
26	0,11354	0,029572288
27	0,11726	0,035955136
28	0,12085	0,042187954
29	0,12434	0,048315505
30	0,12778	0,054379159
31	0,13119	0,06041689
32	0,13461	0,066463279
33	0,13806	0,072549513

34	0,14158	0,078703383
35	0,14517	0,084949287
36	0,14887	0,091308228
37	0,15269	0,097797816
38	0,15663	0,104432265
39	0,16073	0,111222395
40	0,16497	0,118175633
41	0,16937	0,125296011
42	0,17394	0,132584165
43	0,17866	0,140037338
44	0,18354	0,147649381
45	0,18858	0,155410746
46	0,19376	0,163308495
47	0,19908	0,171326292
48	0,20451	0,17944441
49	0,21005	0,187639726
50	0,21568	0,195885722
51	0,22137	0,204152486
52	0,22709	0,212406714
53	0,23283	0,220611705
54	0,23855	0,228727364
55	0,24421	0,236710203
56	0,24979	0,244513338
57	0,25523	0,252086493
58	0,26051	0,259375995
59	0,26558	0,266324778
60	0,27039	0,272872382
61	0,27489	0,278954952
62	0,27902	0,28450524
63	0,28274	0,289452601
64	0,28599	0,293722998
65	0,28870	0,297239

Del anterior cuadro se puede extraer la representación de cómo sería la evolución de las probabilidades de transición de activo a activo con paso intermedio en grado de dependencia moderada o severa en hombres desde los 22 a los 85 años.

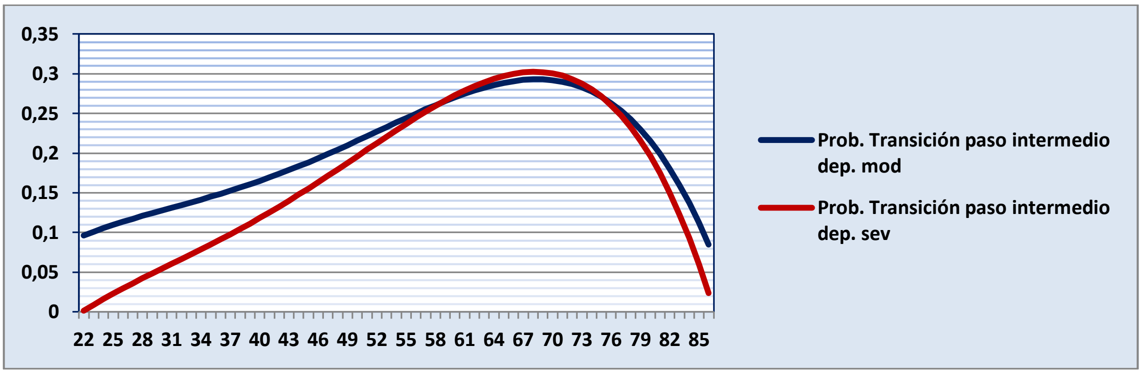


Ilustración 95 Probabilidades de transición de activo a activo en hombres aplicando método de aproximación de Gauss. Paso intermedio en dependencia moderada o severa.

De manera muy visual se puede representar la evolución de las probabilidades de transición para la transición de activo a activo en el Modelo 1 con paso intermedio en grado de dependencia moderada para los cuatro puntos de la cuadratura de Gauss. Se puede observar como los resultados son iguales con unas diferencias mínimas según aumentan los puntos de la cuadratura.

	MÉTODO GAUSS			
	n=1 (2 puntos)	**n=2 (3 puntos)**	**n=3 (4 puntos)**	**n=4 (5 puntos)**
Edad/Duración	**Hombre**			
	Paso intermedio			
	Dependencia moderada			
22	0,09645418975338240	0,09645418975338240	0,09645418975338260	0,09645418975338260
23	0,10115027268950700	0,10115027268950700	0,10115027268950700	0,10115027268950700
24	0,10553011203263800	0,10553011203263800	0,10553011203263800	0,10553011203263800
25	0,10964377161232600	0,10964377161232600	0,10964377161232600	0,10964377161232600
26	0,11353854433948800	0,11353854433948800	0,11353854433948800	0,11353854433948800
27	0,11725895220640500	0,11725895220640500	0,11725895220640500	0,11725895220640500
28	0,12084674628672500	0,12084674628672500	0,12084674628672500	0,12084674628672500
29	0,12434090673546000	0,12434090673546000	0,12434090673546000	0,12434090673546000
30	0,12777764278899000	0,12777764278899000	0,12777764278899000	0,12777764278899000
31	0,13119039276505700	0,13119039276505700	0,13119039276505700	0,13119039276505700
32	0,13460982406277200	0,13460982406277200	0,13460982406277200	0,13460982406277200
33	0,13806383316261000	0,13806383316261000	0,13806383316261000	0,13806383316261000
34	0,14157754562641100	0,14157754562641100	0,14157754562641100	0,14157754562641100
35	0,14517331609738100	0,14517331609738100	0,14517331609738100	0,14517331609738100
36	0,14887072830009200	0,14887072830009200	0,14887072830009200	0,14887072830009200
37	0,15268659504048200	0,15268659504048200	0,15268659504048200	0,15268659504048200
38	0,15663495820585200	0,15663495820585200	0,15663495820585200	0,15663495820585200

39	0,16072708876487200	0,16072708876487200	0,16072708876487200	0,16072708876487200
40	0,16497148676757500	0,16497148676757500	0,16497148676757500	0,16497148676757500
41	0,16937388134536100	0,16937388134536100	0,16937388134536100	0,16937388134536100
42	0,17393723071099500	0,17393723071099500	0,17393723071099500	0,17393723071099500
43	0,17866172215860700	0,17866172215860700	0,17866172215860700	0,17866172215860700
44	0,18354477206369300	0,18354477206369300	0,18354477206369300	0,18354477206369300
45	0,18858102588311500	0,18858102588311500	0,18858102588311600	0,18858102588311600
46	0,19376235815510100	0,19376235815510100	0,19376235815510100	0,19376235815510100
47	0,19907787249924200	0,19907787249924200	0,19907787249924200	0,19907787249924200
48	0,20451390161649700	0,20451390161649700	0,20451390161649700	0,20451390161649700
49	0,21005400728918900	0,21005400728918900	0,21005400728919000	0,21005400728919000
50	0,21567898038100900	0,21567898038100900	0,21567898038100900	0,21567898038100900
51	0,22136684083701100	0,22136684083701100	0,22136684083701100	0,22136684083701100
52	0,22709283768361600	0,22709283768361600	0,22709283768361600	0,22709283768361600
53	0,23282944902860900	0,23282944902860900	0,23282944902860900	0,23282944902860900
54	0,23854638206114100	0,23854638206114100	0,23854638206114100	0,23854638206114100
55	0,24421057305173100	0,24421057305173100	0,24421057305173100	0,24421057305173100
56	0,24978618735226100	0,24978618735226100	0,24978618735226100	0,24978618735226100
57	0,25523461939597800	0,25523461939597800	0,25523461939597800	0,25523461939597800
58	0,26051449269749700	0,26051449269749700	0,26051449269749700	0,26051449269749700
59	0,26558165985279600	0,26558165985279600	0,26558165985279600	0,26558165985279600
60	0,27038920253922100	0,27038920253922100	0,27038920253922100	0,27038920253922100
61	0,27488743151548200	0,27488743151548200	0,27488743151548200	0,27488743151548200
62	0,27902388662165500	0,27902388662165500	0,27902388662165500	0,27902388662165500
63	0,28274333677918100	0,28274333677918100	0,28274333677918100	0,28274333677918100
64	0,28598777999086700	0,28598777999086700	0,28598777999086700	0,28598777999086700
65	0,28869644334088600	0,28869644334088600	0,28869644334088600	0,28869644334088600

Conocidas las probabilidades de transición del estado de actividad al estado de actividad y en aplicación del método de Gauss para la aproximación de las ecuaciones de Volterra, es muy fácil obtener el resto de probabilidades de transición de nuestros modelos.

Probamos en el Modelo 2 de Morbilidad hospitalaria y podemos calcular las probabilidades de transición, por ejemplo, de individuos activos que pasan a ser dependientes (por Esclerosis múltiple, Parkinson o Alzheimer); de individuos dependientes que se mantienen dependientes en su estado final; también, pero de una forma muy hipotética, individuos dependientes (por Esclerosis múltiple, Parkinson o Alzheimer) que recuperan su estado de actividad total o parcial (reactivación); y finalmente de individuos dependientes o activos que fallecen.

- Para el cálculo de las probabilidades de transición de individuos que entran en dependencia, permite que tomemos como datos de referencia los datos de entrada en dependencia de hombres con dependencia severa por Parkinson de los años 2006 al 2013, en aplicación del método de aproximación de Gauss de dos puntos.

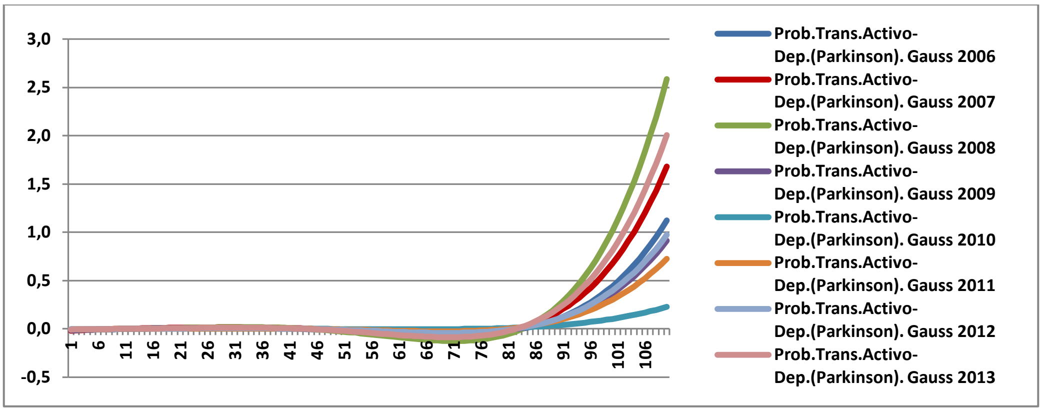


Ilustración 36 Probabilidad de transición activo a dependiente severo (Parkinson). Hombres 2006 a 2013. Aproximación método Gauss

Analizamos también el comportamiento de la entrada en dependencia moderada (Esclerosis múltiple) de hombres y mujeres en el año 2013 con aproximación de probabilidades mediante método de Gauss con dos puntos.

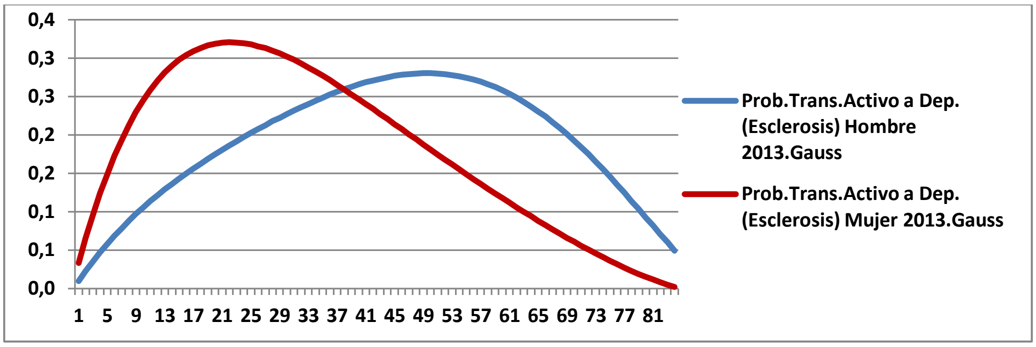


Ilustración 37 Probabilidad de transición activo a dependiente moderado (Esclerosis). Comparación entre hombres y mujeres. Año 2013. Aproximación método Gauss

Y el comportamiento de la entrada en gran dependencia (Alzheimer) de hombres y mujeres en el año 2013 con aproximación de probabilidades mediante método de Gauss con dos puntos tiene la siguiente forma:

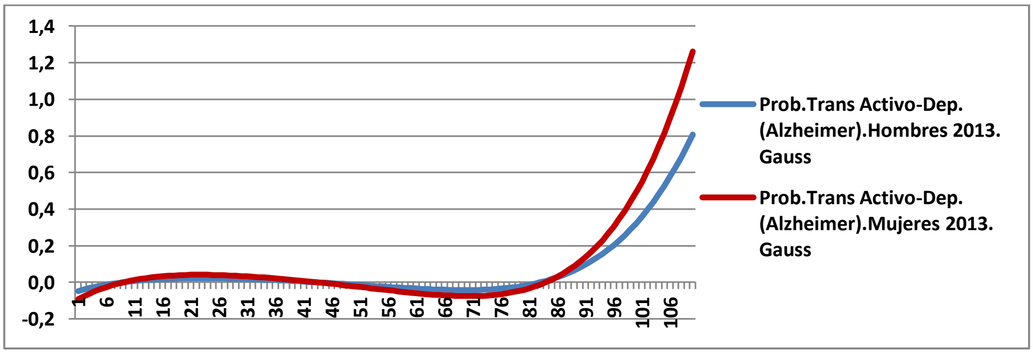


Ilustración 38 Probabilidad de transición activo a gran dependiente (Alzheimer). Comparación entre hombres y mujeres. Año 2013. Aproximación método Gauss

- En el caso de representar probabilidades de reactivación, es muy interesante analizar la hipotética recuperación de hombres y mujeres con gran dependencia por Alzheimer de edades comprendidas entre 60 y 95 años, en el año 2013, y hacer varias simulaciones de las probabilidades de recuperación en función de la duración de la dependencia al tratarse de modelos de Semi-Markov. Vamos a hacer una simulación con una duración de la dependencia de 5 años y aplicaremos el método de Gauss para su aproximación.

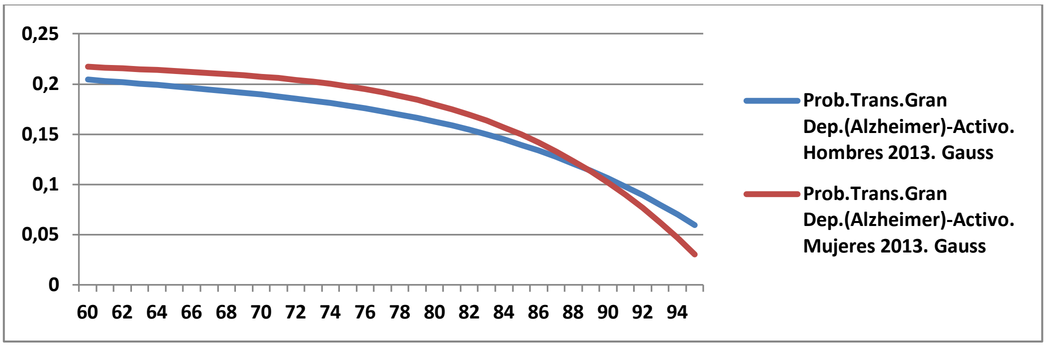


Ilustración 39 Probabilidad de transición gran dependiente (Alzheimer) a activo. Comparación entre hombres y mujeres. Año 2013. Duración de 5 años. Aproximación método de Gauss 2 puntos

- Para la transición de individuos que mantienen su estado de dependencia, queremos ver las diferencias entre hombres y mujeres con gran dependencia por Alzheimer que mantienen su mismo estado de dependencia para el año 2013, mediante el mismo método de aproximación.

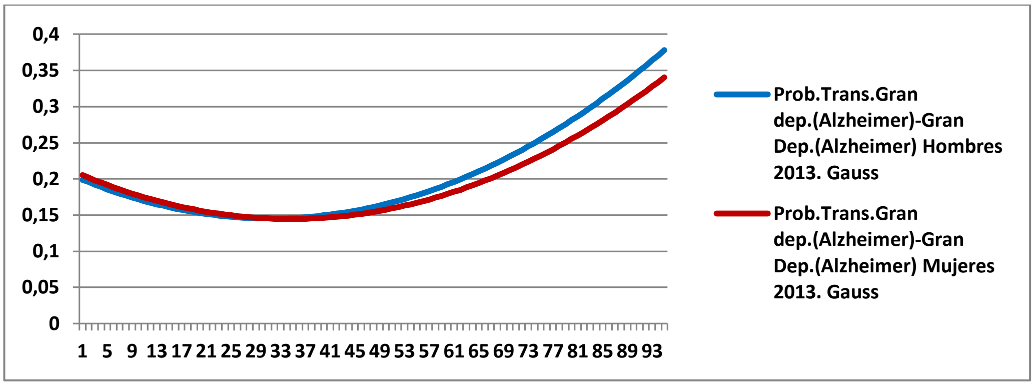


Ilustración 40 Probabilidad de transición gran dependiente (Alzheimer) a gran dependiente (Alzheimer). Comparación entre hombres y mujeres. Año 2013. Aproximación con método de Gauss de 2 puntos.

- Ahora queremos ver cómo evolucionan las probabilidades de transición de individuos dependientes que fallecen. Para este propósito queremos analizar el comportamiento en hombres, por ejemplo, de los enfermos categorizados con gran dependencia por Alzheimer para el año 2013 y haremos varias simulaciones con duraciones de la dependencia entre 1 y 10 años y veremos cómo fluctúan las curvas de mortalidad de dependientes. Al aumentar la edad del individuo dependiente aumenta su mortalidad, mientras que para un aumento de la duración de la dependencia, la probabilidad de fallecer decrece, observando cómo las curvas van cayendo.

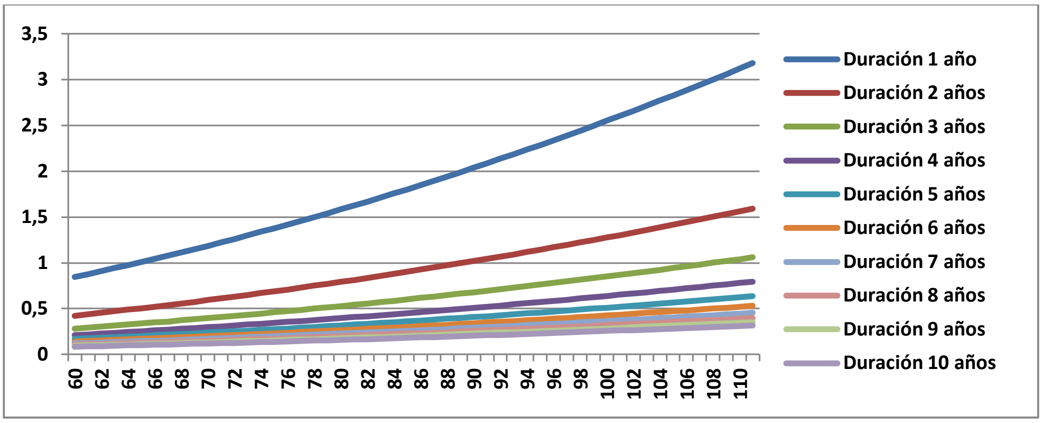


Ilustración 41 Probabilidad de transición Gran dependiente (Alzheimer) a muerto. Hombres 2013. Duración 1 a 10 años. Aproximación con método de Gauss 2 puntos

- Para analizar el comportamiento de las probabilidades de transición de individuos activos que fallecen, queremos conocer cómo evolucionan los fallecimientos de individuos activos tanto hombres como mujeres con paso intermedio en gran dependencia por enfermedad de Alzheimer.

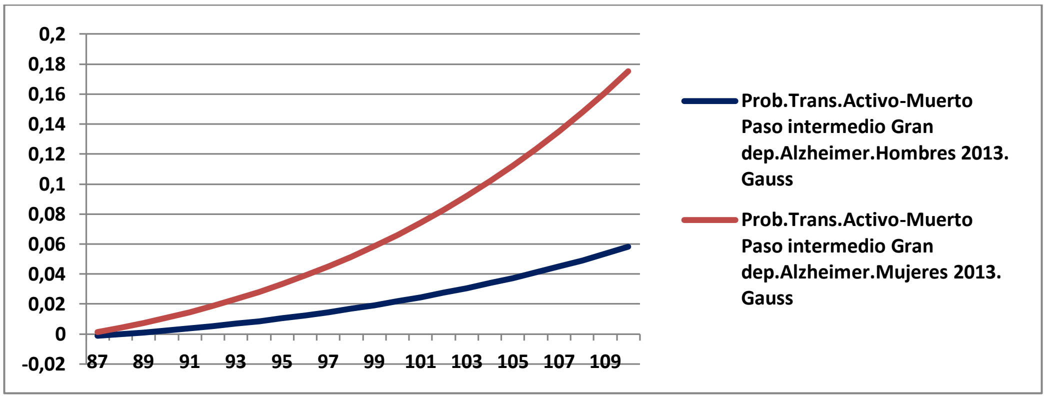


Ilustración 42 Probabilidad de transición Activo a muerto. Paso intermedio Gran dependencia (Alzheimer). Hombres y mujeres 2013. Aproximación con método de Gauss 2 puntos

Además de los análisis anteriores, cabe señalar cuáles son las diferencias que existen entre el modelo de dependencia de Semi-Markov a partir de la graduación de intensidades de transición con el modelo de regresión lineal múltiple y con modelos lineales generalizados con función link logit.

Para este análisis, tomamos como método de aproximación el método de Gauss de dos puntos por su gran eficiencia y precisión en el cálculo. Pretendemos analizar la evolución de hombres con edades comprendidas entre 5 y 65 años que entran en estado de dependencia moderada a partir de la Encuesta de dependencia de 2008.

Vamos a suponer en el análisis a todos los modelos analizados, esto es, LGM (0,2), LGM (0,3), LGM (0,4), LGM (0,5), LGM (0,6) y LGM (0,7) con función link logit para datos de tipo binomial, y en función de estos datos se puede hacer el análisis comparativo con el modelo de regresión lineal múltiple seleccionado en nuestro modelo. El siguiente gráfico muestra los resultados:

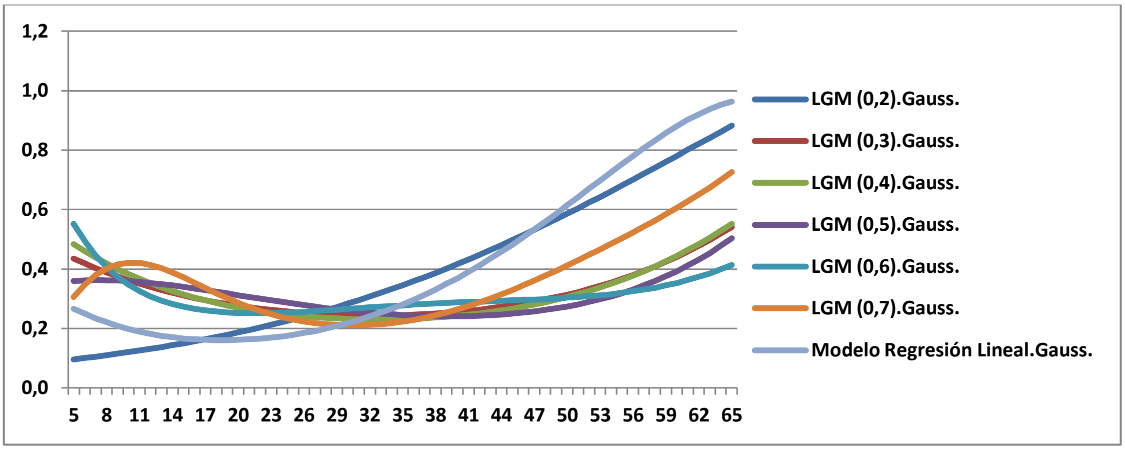


Ilustración 43 Probabilidad de transición Activo a dependiente moderado. Comparación LGM (r,s) y Modelo de Regresión Lineal. Hombres 2008. Aproximación con método de Gauss 2 puntos

5.2.3. Aproximación mediante el método de Simpson 1/3 compuesto

En último lugar, para el caso de hombres y mujeres con dependencia moderada mediante el método del Simpson 1/3 compuesto, la forma de las probabilidades de transición es la siguiente:

	SIMPSON 1/3 COMPUESTO					
	b			1		
	a			0		
	n			6		
	h			0,166666667		
Edad/Duración						
	Paso intermedio			Paso intermedio		
	Dependencia moderada	Dependencia severa	Gran dependencia	Dependencia moderada	Dependencia severa	Gran dependencia
5	0,276292556	0,268945501	0,279852252	0,284078926	0,279157558	0,286049089
6	0,275543056	0,268679208	0,278616978	0,283564649	0,279038647	0,285438437
7	0,274782626	0,26837453	0,277423005	0,283032509	0,27887969	0,284832942
8	0,274013711	0,268035164	0,276268822	0,28248462	0,278683491	0,284232252
9	0,273238596	0,267664619	0,275152876	0,281922957	0,278452705	0,283635942
10	0,272459417	0,267266216	0,274073572	0,281349362	0,278189831	0,283043524
11	0,271678154	0,266843085	0,273029269	0,280765541	0,277897218	0,282454438
12	0,270896633	0,266398171	0,272018286	0,280173066	0,277577065	0,281868059
13	0,270116525	0,265934229	0,271038896	0,279573373	0,277231415	0,281283692

14	0,26933935	0,265453825	0,27008933	0,278967762	0,276862161	0,280700575
15	0,268566472	0,264959335	0,269167774	0,2783574	0,276471045	0,280117879
16	0,2677991	0,26445295	0,268272372	0,277743317	0,276059655	0,279534706
17	0,267038293	0,26393667	0,267401225	0,277126408	0,275629427	0,278950091
18	0,266284952	0,263412306	0,26655239	0,276507435	0,275181647	0,278363
19	0,265539825	0,262881483	0,26572388	0,275887022	0,274717446	0,277772331
20	0,264803508	0,262345634	0,264913665	0,275265659	0,274237807	0,277176916
21	0,264076441	0,261806006	0,264119673	0,274643702	0,273743556	0,276575518
22	0,263358912	0,261263657	0,263339787	0,27402137	0,27323537	0,275966831
23	0,262651052	0,260719455	0,262571846	0,273398748	0,272713775	0,275349484
24	0,261952841	0,260174081	0,261813649	0,272775786	0,272179142	0,274722034
25	0,261264104	0,259628027	0,261062947	0,272152297	0,271631691	0,274082974
26	0,260584511	0,259081596	0,260317452	0,271527961	0,271071492	0,273430728
27	0,259913581	0,258534904	0,259574829	0,270902323	0,270498459	0,27276365
28	0,259250675	0,257987875	0,258832703	0,270274791	0,269912358	0,27208003
29	0,258595004	0,257440248	0,258088653	0,26964464	0,2693128	0,271378085
30	0,257945623	0,256891572	0,257340215	0,269011007	0,268699246	0,27065597
31	0,257301432	0,256341207	0,256584883	0,268372897	0,268071004	0,269911768
32	0,25666118	0,255788325	0,255820106	0,267729178	0,267427229	0,269143495
33	0,256023459	0,255231909	0,255043292	0,267078583	0,266766926	0,2683491
34	0,25538671	0,254670754	0,254251802	0,266419711	0,266088947	0,267526463
35	0,254749217	0,254103467	0,253442958	0,265751024	0,265391991	0,266673398
36	0,254109113	0,253528464	0,252614034	0,26507085	0,264674607	0,265787648
37	0,253464375	0,252943975	0,251762265	0,264377383	0,263935189	0,264866891
38	0,252812828	0,25234804	0,250884839	0,26366868	0,263171982	0,263908736
39	0,252152139	0,251738511	0,249978903	0,262942662	0,262383078	0,262910724
40	0,251479827	0,251113052	0,24904156	0,262197119	0,261566416	0,261870329
41	0,250793252	0,250469136	0,248069869	0,261429701	0,260719784	0,260784955
42	0,250089623	0,249804051	0,247060846	0,260637926	0,259840817	0,259651941
43	0,249365993	0,249114894	0,246011464	0,259819176	0,258926999	0,258468556
44	0,248619263	0,248398573	0,244918653	0,258970698	0,257975662	0,257232002
45	0,247846179	0,247651809	0,243779298	0,258089602	0,256983984	0,255939413
46	0,247043333	0,246871135	0,242590243	0,257172867	0,255948993	0,254587855
47	0,246207163	0,246052892	0,241348285	0,256217333	0,254867565	0,253174326
48	0,245333954	0,245193237	0,240050182	0,255219706	0,253736422	0,251695757
49	0,244419837	0,244288134	0,238692646	0,254176558	0,252552137	0,250149009
50	0,243460787	0,243333362	0,237272345	0,253084324	0,251311127	0,248530878

La evolución de las probabilidades de transición con el método de aproximación de Simpson 1/3 compuesto para la transición de activo a activo en hombres con paso intermedio en grado de dependencia moderada, severa o gran dependencia es la siguiente:

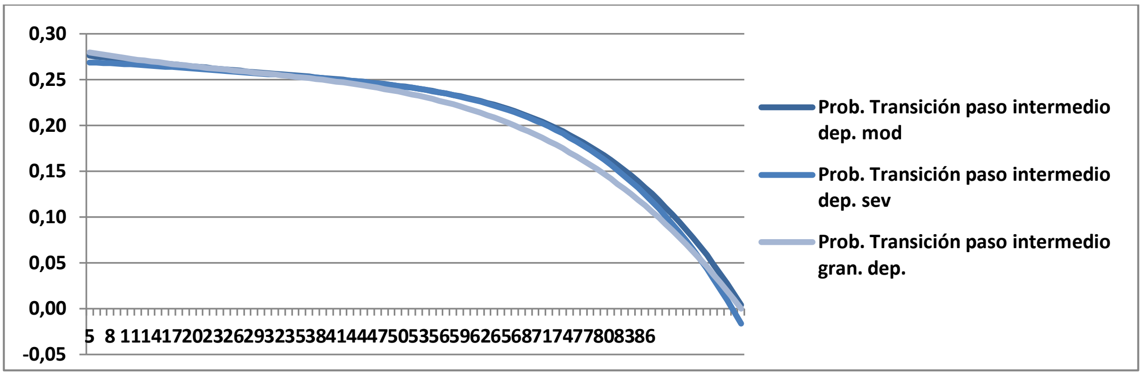


Ilustración 44 Probabilidades de transición de activo a activo en hombres con paso intermedio en dependencia moderada, severa o gran dependencia. Aplicación del método de Simpson 1/3 compuesto

5.3. Resultados del cálculo actuarial de rentas de Semi-Markov

El objetivo en esta parte del trabajo es establecer una base correcta para el cálculo de rentas con modelos de Semi-Markov tomando como punto de referencia los datos de las encuestas analizadas en nuestros modelos. En los siguientes apartados resumimos de forma detallada el cálculo de rentas con los tres métodos de aproximación que hemos manejado a lo largo de todo el trabajo.

Se va a asumir una serie de hipótesis necesarias para la configuración de las rentas, pudiendo emplear estas hipótesis tanto en el Modelo 1 como en el Modelo 2 objeto de estudio en el presente trabajo.

- Se toman como referencia las probabilidades de transición de entrada en estado de dependencia moderada, severa y gran dependencia a partir de los datos ajustados calculados en este trabajo. Se pueden tomar los datos ajustados calculados para el Modelo 1 y los datos ajustados del Modelo 2.

- Se toman como referencia las probabilidades de fallecimiento de población dependiente a partir de los datos ajustados calculados en el presente trabajo. Se pueden tomar los datos ajustados calculados para el Modelo 1 y para el Modelo 2.

- Igualmente, se incorporan las probabilidades de mortalidad de población activa a partir del ajuste de los datos de dependencia de la Encuesta EDAD 2008 (Modelo 1) y de la Encuesta de Morbilidad de los años 2005 a 2013 (Modelo 2).

- Asumimos un tipo de interés técnico dentro de los límites que marca el ROSSP[7].

- Apoyo para el cálculo técnico de rentas en las normativas de Solvencia 1 y Solvencia 2.

- Se asumen gastos de gestión interna y de gestión externa.

[7] Real Decreto 2486/ 1998, de 20 de noviembre, por el que se aprueba el Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados (ROSSP).

- Se emplean hipótesis de mortalidad realista y de caídas en el cálculo de rentas con metodología de Solvencia 2.

5.3.1. Rentas con regla del Trapecio compuesto

Permite que nos apoyemos en los datos de probabilidades de transición del Modelo 2 de Morbilidad hospitalaria. Queremos representar la evolución de la renta anual que percibe un hombre en el año 2013 en caso de continuar en estado de actividad, con paso intermedio en dependencia moderada por Esclerosis múltiple con una edad de 30 años y al que se le van a aplicar 40 periodos de pago.

Teniendo en cuenta además que queremos calcular la evolución de este tipo de renta utilizando la aproximación mediante el método del Trapecio compuesto, los resultados que se obtienen los siguientes:

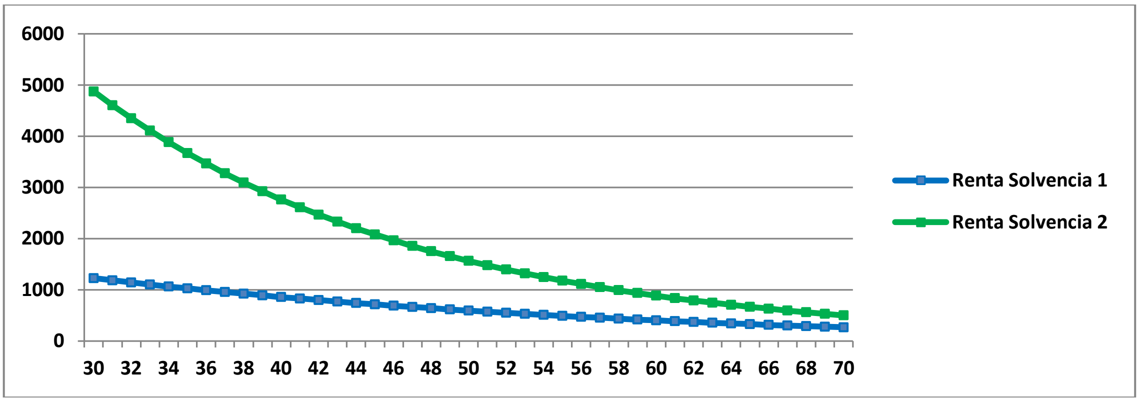


Ilustración 45 Renta de Semi-Markov en Hombres. Aplicación del método del Trapecio compuesto para la transición de activo a activo con paso intermedio en grado de dependencia moderada (Esclerosis múltiple), Año 2013. Comparación Solvencia 1 y Solvencia 2

5.3.2. Rentas con método de Gauss

En aplicación del método de aproximación de Gauss y asumiendo las mismas hipótesis que para el método del Trapecio compuesto, lo que nos interesa ahora es conocer la evolución de la renta anual pagadera a un hombre en el año 2013 en el supuesto de que la transición que experimenta es de estado de actividad a un estado final de dependencia moderada por Esclerosis múltiple. Tarificamos un hipotético producto de rentas para un individuo de 15 años de edad, al que se le aplican 40 periodos de pago en caso de entrar en dependencia.

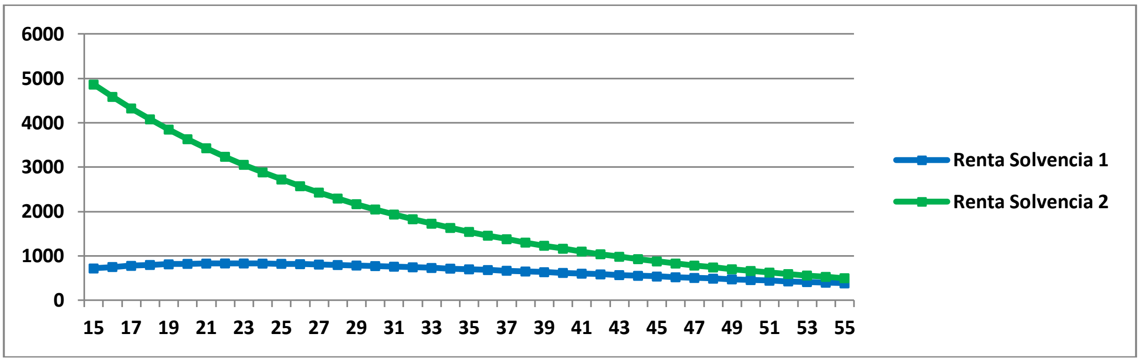


Ilustración 46 Renta de Semi-Markov en Hombres. Aplicación del método de Gauss de 2 puntos para la transición de activo a dependiente moderado por Esclerosis Múltiple. Comparación Solvencia 1 y Solvencia 2. Año 2013

5.3.3. Rentas con método de Simpson 1/3 compuesto

Para el cálculo de una renta anual en aplicación del método de aproximación de Simpson 1/3 compuesto, la representación de la evolución de dicha renta tiene la siguiente forma:

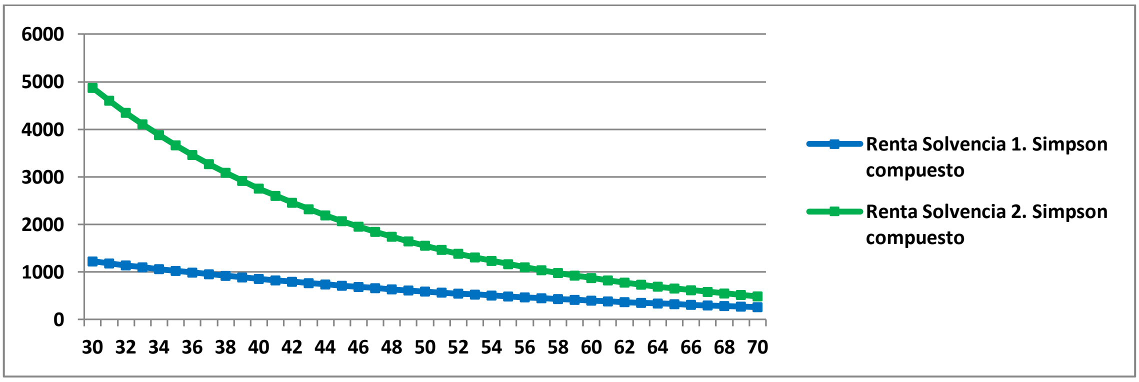


Ilustración 47 Rentas de Semi-Markov en Hombres. Aplicación del método de Simpson 1/3 compuesto para la transición de activo a activo con paso intermedio en grado de dependencia moderada, severa o gran dependencia.

La evolución de la renta presenta resultados muy parecidos al calculado con el método del Trapecio, si bien su formulación es totalmente diferente. En este caso, se pretende tarificar la renta a percibir por un hombre de 30 años, asumiendo que la transición experimentada es de activo a activo con paso intermedio en dependencia moderada por Esclerosis Múltiple, por lo que la condición para recibir la renta es continuar activo.

5.4. Resultados del cálculo actuarial de primas de Semi-Markov

En el cálculo de primas de Semi-Markov se fijan como hipótesis principales las ya planteadas en el cálculo de rentas. Nos apoyamos en las probabilidades de transición calculadas en el modelo y configuramos las bases técnicas de cálculo a partir de la normativa de Solvencia 1 y Solvencia 2. En función de todos estos elementos obtendremos el cálculo aproximado de primas mediante las reglas de Gauss, Trapecio y Simpson.

5.4.1. Primas con regla del Trapecio compuesto

Gráficamente, utilizando el modelo de Semi-Markov mediante las ecuaciones de Volterra y en base a los datos que nos ofrece la Encuesta del Modelo 2 de Morbilidad hospitalaria, se puede obtener mediante el método del Trapecio compuesto la siguiente evolución de las primas anuales para la transición de activo a activo con paso intermedio en dependencia moderada por Esclerosis múltiple.

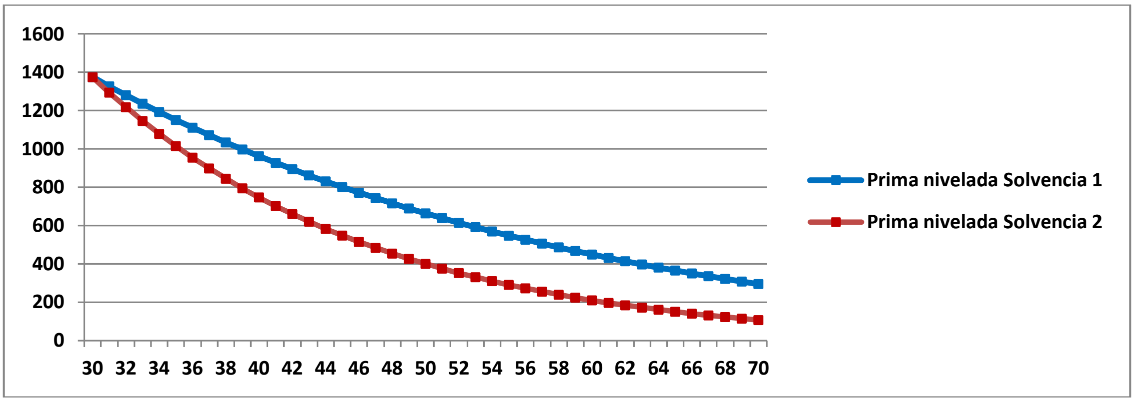


Ilustración 48 Prima nivelada de Semi-Markov en Hombres. Aplicación del método del Trapecio compuesto para la transición de activo a activo con paso intermedio en grado de dependencia moderada (Esclerosis múltiple), Año 2013. Comparación Solvencia 1 y Solvencia 2

5.4.2. Primas con método de Gauss

En aplicación del método de Gauss para aproximación de probabilidades de transición, queremos representar la evolución de las primas anuales para un individuo de sexo masculino de 15 años de edad para la transición de activo a dependiente moderado por Esclerosis Múltiple asumiendo que puede encontrarse en un estado intermedio en estado de dependencia moderada por Esclerosis múltiple. Los resultados son los siguientes:

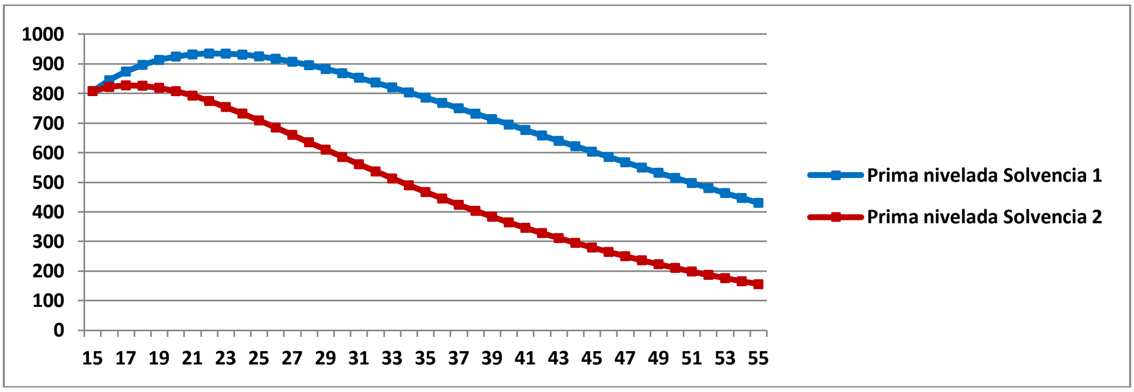


Ilustración 49 Prima nivelada de Semi-Markov en Hombres. Aplicación del método del Gauss para la transición de activo a dependiente moderado con paso intermedio en grado de dependencia moderada (Esclerosis múltiple), Año 2013. Comparación Solvencia 1 y Solvencia 2

5.4.3. Primas con método de Simpson 1/3 compuesto

De forma muy sencilla se puede comprobar la evolución del volumen de primas en aplicación del método de aproximación de Simpson 1/3 compuesto tomando como hipótesis que la tarificación del producto corresponde a un hombre de 30 años de edad que percibe una renta en el supuesto de continuar en estado activo, pudiendo pasar por un estado intermedio de dependencia moderada por Esclerosis múltiple.

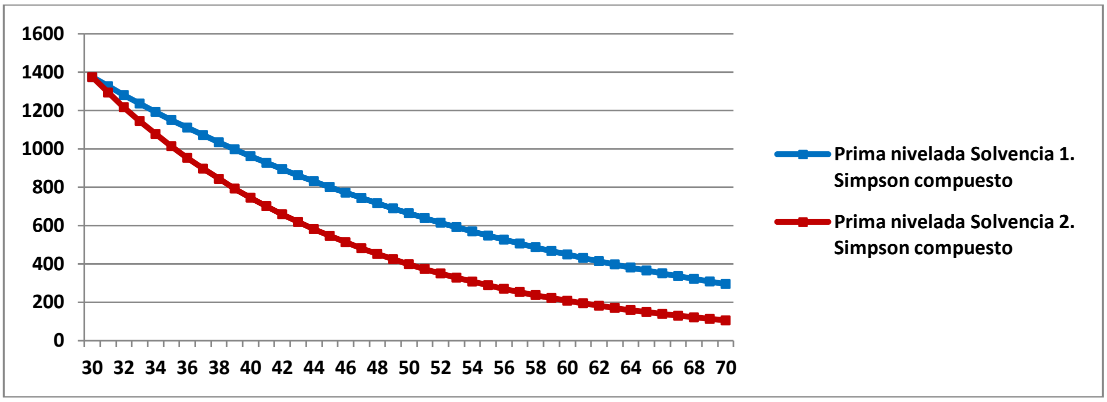


Ilustración 50 Prima nivelada de Semi-Markov en Hombres. Aplicación del método del Simpson 1/3 compuesto para la transición de activo a activo con paso intermedio en grado de dependencia moderada (Esclerosis múltiple), Año 2013. Comparación Solvencia 1 y Solvencia 2

5.5. Resultados del cálculo actuarial de provisiones de Semi-Markov

Para el cálculo de provisiones con modelos de Semi-Markov nos apoyamos en idénticas hipótesis a las utilizadas en el cálculo de productos de rentas y primas. El conjunto de provisiones calculadas en el trabajo se estructuran en torno al cálculo de las probabilidades de transición de nuestro modelo de ecuaciones de Volterra.

Asumimos como hipótesis principales los datos obtenidos en el cálculo de probabilidades de transición, es decir, probabilidades de cambio al estado de dependencia, de reactivación y de mortalidad y asumimos también las mismas hipótesis realistas marcadas por la directiva de Solvencia 2 con el objetivo de crear modelos comparativos de consistencia actuarial.

5.5.1. Provisiones con regla del Trapecio compuesto

Asumiendo que queremos obtener el volumen de provisiones generado por una operación actuarial en la que un individuo percibe una renta anual por los pagos de primas realizados, se debe tener en cuenta que el cálculo de las provisiones tanto en aplicación de la directiva de Solvencia 1 como de Solvencia 2, asume la continuación del estado de actividad con un posible paso intermedio en dependencia moderada por Esclerosis Múltiple.

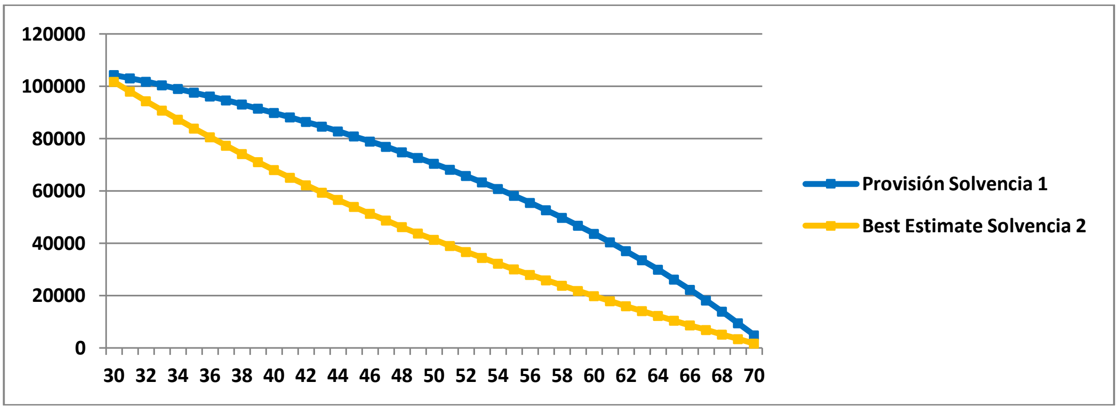


Ilustración 51 Provisión matemática de Semi-Markov en Hombres. Aplicación del método del Trapecio compuesto para la transición de activo a activo con paso intermedio en grado de dependencia moderada (Esclerosis múltiple), Año 2013. Comparación Solvencia 1 y Solvencia 2

5.5.2. Provisiones con método de Gauss

El volumen de provisiones en aplicación del método de Gauss asumiendo la aplicación de probabilidades de transición de estado activo a dependiente moderado con paso intermedio en dependiente moderado por Esclerosis múltiple y bajo la hipótesis de que el método de aproximación a aplicar es el de Gauss de dos puntos, el modelo de provisiones tiene la siguiente forma:

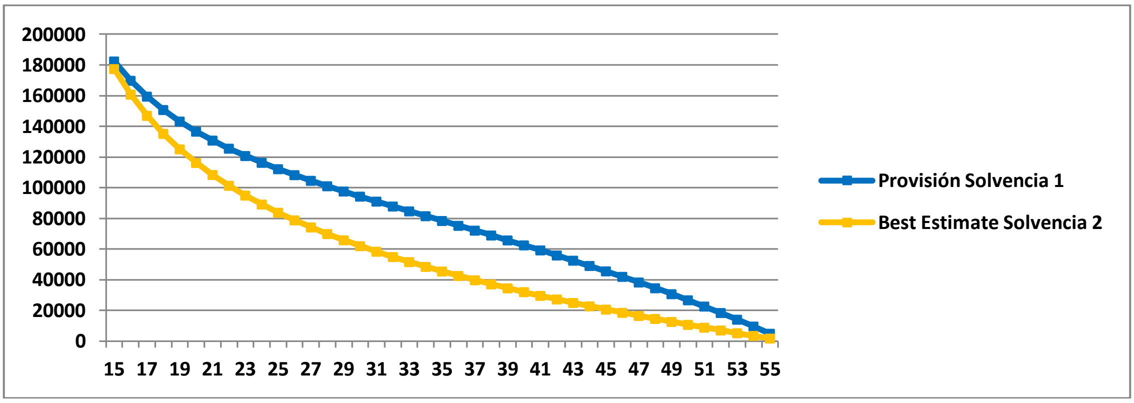


Ilustración 52 Provisión matemática de Semi-Markov en Hombres. Aplicación del método del Gauss de 2 puntos para la transición de activo a dependiente moderado con paso intermedio en grado de dependencia moderada (Esclerosis múltiple), Año 2013. Comparación Solvencia 1 y Solvencia 2

Se puede apreciar como para edades comprendidas entre los 15 y los 55 años el volumen de las provisiones tiende a disminuir a medida que el individuo avanza en edad tanto para las provisiones calculadas con Solvencia 1 como con Solvencia 2.

5.5.3. Provisiones con método de Simpson 1/3 compuesto

Finalmente, en el estudio de las provisiones aplicando nuestro modelo de Semi-Markov, hay que hacer el análisis de cómo sería la evolución de las mismas apoyando el cálculo en el uso del método de aproximación de Simpson 1/3 compuesto. Igual que en el cálculo de las rentas y las primas, tomamos como hipótesis que el volumen de provisiones a calcular corresponde a una provisión de actividad, asumiendo en el cálculo probabilidades de transición de activo a activo pudiendo estar en el paso intermedio dependiente moderado por Esclerosis múltiple.

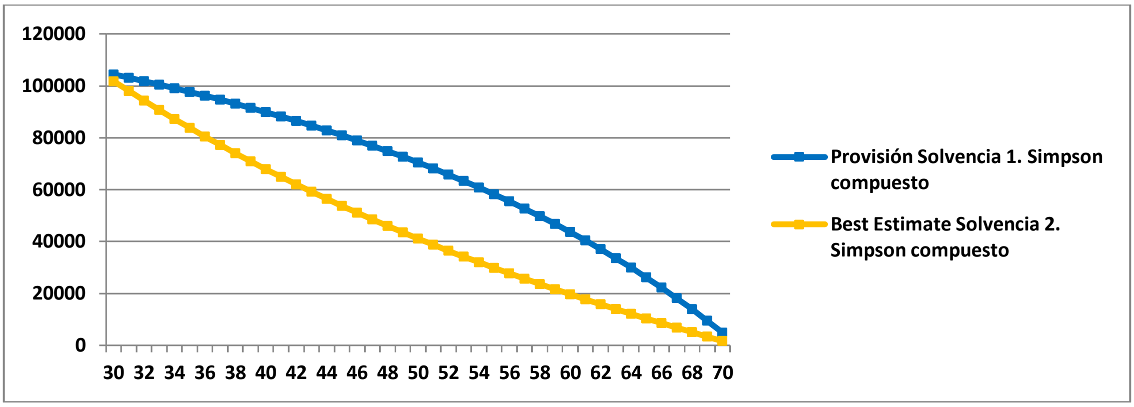


Ilustración 53 Provisión matemática de Semi-Markov en Hombres. Aplicación del método de Simpson 1/3 compuesto para la transición de activo a activo con paso intermedio en grado de dependencia moderada (Esclerosis múltiple), Año 2013. Comparación Solvencia 1 y Solvencia 2

5.6. Comparación de los métodos de aproximación

Podemos hacer un análisis comparativo de los resultados obtenidos con los tres métodos de aproximación (Trapecio, Gauss de cinco puntos y Simpson) y ver sus diferencias con el valor exacto. En el siguiente cuadro se analiza una muestra de los datos observados para cada uno de los métodos de aproximación en relación al cálculo exacto de las probabilidades de transición de personas de sexo masculino que transitan de estado activo a activo con paso intermedio en dependencia moderada por Esclerosis múltiple.

	Probabilidad de transición Activo a activo con paso intermedio en dependiente moderado (Esclerosis múltiple)			
	Hombres			
Edad	Trapecio compuesto	Gauss 5 puntos	Simpson 1/3 compuesto	Valor Exacto
20	0,25305253	0,253183655	0,253076812	0,254057823
21	0,252276494	0,25241118	0,252301436	0,253309091
22	0,251490018	0,251627622	0,2515155	0,252544985
23	0,25069225	0,250832161	0,25071816	0,251764901
24	0,24988234	0,250023978	0,249908569	0,250968232
25	0,249059434	0,24920225	0,249085881	0,250154361
26	0,24822268	0,248366157	0,24824925	0,249322669
27	0,247371228	0,247514876	0,247397829	0,248472531
28	0,246504223	0,246647583	0,246530771	0,247603317
29	0,245620814	0,245763454	0,245647228	0,246714392
30	0,244720146	0,244861664	0,244746353	0,245805115
31	0,243801368	0,243941386	0,243827297	0,24487484
32	0,242863625	0,243001794	0,242889212	0,243922916

33	0,241906065	0,242042059	0,241931249	0,242948688
34	0,240927833	0,241061354	0,240952559	0,241951493
35	0,239928075	0,240058847	0,239952292	0,240930666
36	0,238905937	0,23903371	0,238929598	0,239885534
37	0,237860564	0,23798511	0,237883628	0,23881542
38	0,236791102	0,236912216	0,23681353	0,237719642
39	0,235696696	0,235814194	0,235718455	0,236597514
40	0,234576491	0,23469021	0,23459755	0,235448341

El siguiente gráfico muestra las diferencias entre los tres métodos de aproximación dando con gran detalle la calidad del ajuste de los mismos.

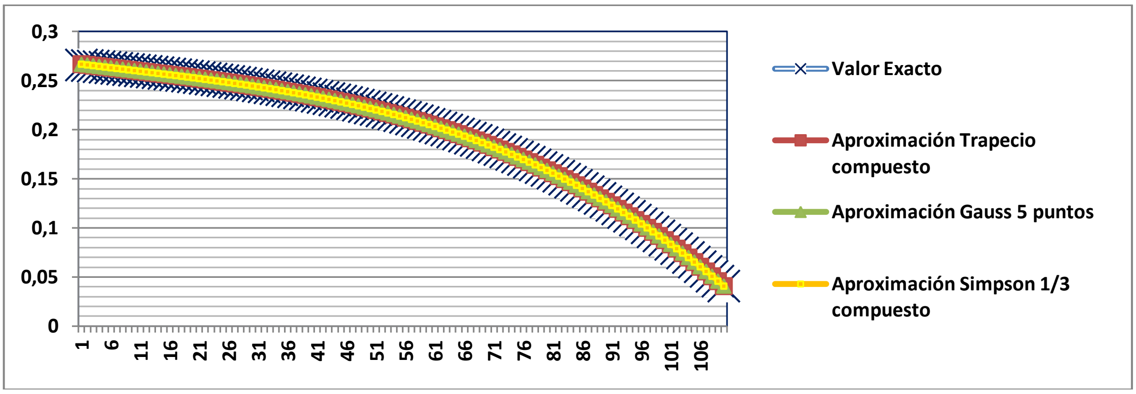


Ilustración 54 Análisis comparativo de los tres métodos de aproximación de ecuaciones integro-diferenciales de Volterra (Trapecio, Gauss 5 puntos y Simpson) con el valor exacto. Probabilidades de transición de activo a activo con paso intermedio en dependencia moderada (Esclerosis múltiple). Hombres. Año 2013.

6. CONCLUSIONES

El presente trabajo supone una línea de investigación complementaria a otras líneas propuestas en materia de desarrollo del seguro de dependencia. No existe una única vía válida que permita dar solución a la cobertura del riesgo en personas dependientes, sino que existen ya múltiples trabajos que intentan explicar cómo se puede dar protección al sector más débil de la población.

Desarrollar un trabajo de estas características supone la aceptación de una serie de condiciones en cuanto al fenómeno de la dependencia en España. Tales condiciones tienen que ver con una carencia en el sector público de una mayor cobertura a la población dependiente y, por tanto, la necesidad de generar mayores coberturas y de mayor calidad a dicha población a partir de un modelo privado con base en el seguro de dependencia.

Este trabajo investiga en la importancia de gestionar todas esas necesidades de cobertura de riesgos en población dependiente mediante la creación de un modelo estocástico de Semi-Markov muy preciso en la generación de probabilidades de dependencia y posterior tarificación de productos aseguradores. Las conclusiones de este trabajo son las siguientes:

- Investigar la evolución de la dependencia en España mediante la generación de dos modelos de estudio del fenómeno, el Modelo 1 tomado a partir de datos de la Encuesta EDAD 2008, un modelo más general con el que se obtienen datos muy realistas con base en la experiencia y que permite ver las múltiples relaciones entre los estados de dependencia; de otro lado, el Modelo 2 de dependencia con base en datos de altas hospitalarias a partir de la Encuesta de morbilidad del INE y la OMS, un modelo muy preciso porque permite dar explicación en detalle a la evolución de las enfermedades que causan dependencia en nuestro país.

  Tomar como referencia ambas encuestas permite dotar a los modelos de una base de datos de dependencia muy reforzada capaz de explicar como la dependencia evoluciona más rápida o más lenta y porque las enfermedades generan cada año más o menos altas hospitalarias, lo que permite extraer conclusiones sobre los avances en materia médica y de investigación.

- Asumiendo como hipótesis que la evolución de las enfermedades genera un volumen determinado de población dependiente cada año, nos permite asumir en el Modelo 2 de dependencia que el desarrollo del Alzheimer puede presentar todos los casos de altas hospitalarias en fase de dependencia avanzada o gran dependencia, que los casos de enfermos de Parkinson con altas nuevas cada año se focalizan todos en la fase de dependencia severa y que los enfermos de Esclerosis múltiple son todos enfermos en fase de dependencia moderada, y asumiendo todas estas hipótesis se llega a la conclusión de que la tendencia en altas hospitalarias ha ido disminuyendo principalmente por los avances en la medicina y que además las altas hospitalarias se concentran cada año en los mismos grupos de población dadas las características de cada enfermedad.

  Con esto se puede concluir que la enfermedad del Alzheimer concentra el mayor número de casos en edades avanzadas siendo mayor la aparición de la enfermedad en mujeres cada año; mientras, los enfermos de Parkinson comienzan su contacto con la enfermedad a edades más tempranas que el Alzheimer y se presentan más casos en hombres que en mujeres; en último lugar, la enfermedad de la Esclerosis múltiple ataca más a la población joven y presenta mayor número de casos en mujeres que en hombres.

  Todas estas conclusiones permiten hacer un riguroso análisis de la dependencia moderna, extraer probabilidades ajustadas y determinar cómo influye cada una de las enfermedades en el modelo de dependencia planteado, y poder así determinar en donde las compañías aseguradoras deben poner más énfasis a la hora de crear productos aseguradores y saber porque estos productos evolucionan de una manera o de otra en función de las variables que intervienen.

- Resulta de vital importancia crear un modelo de dependencia sobre el que se sostenga la política de tarificación de una compañía aseguradora. El modelo propuesto en este estudio consiste en aplicar procesos estocásticos de Semi-Markov con base en la edad del asegurado y la duración de su contingencia/dependencia. Se trata de modelos precisos de análisis de la evolución de los estados de un asegurado que nos ha permitido en conjunción con los datos de la experiencia conocer con detalle cómo se mueven las curvas de probabilidades de dependencia, de muerte o de recuperación ajustadas.

- La obtención de tasas de dependencia, de mortalidad de dependientes, de mortalidad de activos y de reactivación de dependientes basados en datos de la experiencia, permite construir modelos estocásticos muy fiables, los cuales a partir de modelos de graduación tipo Gompertz-Makeham nos permiten extraer una evolución precisa del fenómeno de la dependencia en modelos de múltiples estados.

- Los actores participantes en el modelo como son la edad y la duración dotan de una mayor confianza y fiabilidad al mismo, permitiendo hacer cambios simultáneos de un estado a otro y asumiendo pasos intermedios que dan mayor complejidad a los cálculos.

- Como cualquier otro trabajo de investigación centrado en dar respuesta a la dependencia en España, este tiene como meta final poder dar respuestas en materia de tarificación. Es esencial disponer de datos fiables basados en la experiencia y previamente graduados para a posteriori poder tomar decisiones en cuanto a la tarificación por parte de los seguros privados.

  Se ha hecho un estudio formal de cómo sería la evolución de rentas a percibir por un individuo asegurado a partir de las hipótesis del modelo y su variación en función de los parámetros introducidos en el mismo. Permite generar además un hipotético estudio del volumen de primas que recibiría una compañía aseguradora y un cálculo de las provisiones técnicas a partir de la normativa en materia de seguros que regula el ROSSP.

- Este modelo se apoya además en técnicas de ajuste de probabilidades de transición basadas en métodos matemáticos de aproximación. La utilización de los métodos del Trapecio, de Gauss y de Simpson no sólo permite aproximar dichas probabilidades, permite además realizar tareas de análisis y estudio comparativos de resultados con dichos métodos dando una base fiable de apoyo a la hora de hacer tarificación.

7. REFERENCIAS

7.1. Bibliografía de referencia

JACQUES JANSSEN, RAIMONDO MANCA – Semi-Markov Risk Models for Finance, Insurance and Reliability.

JACQUES JANSSEN, RAIMONDO MANCA – Applied Semi-Markov Processes

N. LIMNIOS, G. OPRISAN – Semi-Markov processes and reliability

JACQUES JANSSEN, NIKOLAOS LIMNIOS – Semi-Markov models and applications

INSTITUTE AND FACULTY OF ACTUARIES – CMIR12

S. HABERMAN, E. PITACCO – Actuarial Models for Disability Insurance

BOWERS – Actuarial Mathematics

STEVEN HABERMAN, ANNA MARIA OLIVIERI Y ERMANNO PITACO - Multiple state modelling and long term care insurance.

RONALD A. HOWARD - Dynamic Probabilistic Systems. Semi- Markov and Decission Processes

ATTILA CSENKI – Dependability for Systems with a Partitioned State Space. Markov and Semi-Markov Theory and Computational Implementation.

VLAD STEFAN BARBU, NIKOLAOS LIMNIOS – Semi-Markov Chains and Hidden Semi-Markov Models Toward Applications.

ANDREI D. POLYANIN Y ALEXANDER V. MANZHIROV – Handbook of Integral Equations

IRENE SCHUMM – Lessons learned from Germany's 2001-2006 Labor Market Reforms

ANDRE MONTEIRO, GEORGI V. SMIRNOV Y ANDRE LUCAS – Non parametric Estimation for Non homogeneous Semi-Markov Processes: An Application to Credit Risk.

WALTER R. NUNN, ANTHONY M. DESIDERIO – Semi-Markov processes: an introduction

JOAQUIN PEDRUELO JAUREGUI – Desarrollo comercial del seguro colectivo de dependencia en España

EDUARDO SANCHEZ DELGADO – Bases técnicas dinámicas del seguro de Dependencia en España: una aproximación en campo discreto

PABLO ALONSO GONZALEZ E IRENE ALBARRAN LOZANO - Análisis del riesgo en seguros en el marco de Solvencia II: Técnicas estadísticas avanzadas Monte Carlo y Bootstrapping

RICK DURRETT – Essentials of Stochastic Processes

YIU-KUEN TSE – Nonlife Actuarial Models Theory, Methods and Evaluation

DAVID C. M. DICKSON, MARY R. HARDY and HOWARD R. WATERS – Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks

LEY 39/2006, de 14 de diciembre, de Promoción de la Autonomía Personal y Atención a las personas en situación de dependencia.

ALZHEIMER'S DISEASE INTERNATIONAL – Informe Mundial sobre el Alzheimer 2009

INSTITUTO NACIONAL DE ESTADÍSITICA (INE) – Encuesta sobre discapacidades, Deficiencias y Estado de Salud 1999 (EDDES 1999)

INSTITUTO NACIONAL DE ESTADÍSITICA (INE) – Encuesta sobre Discapacidades, Autonomía personal y situaciones de Dependencia 2008 (EDAD 2008)

OBSERVATORIO ESTATAL DE LA DISCAPACIDAD – Informe Olivenza 2010. Las personas con discapacidad en España.

IMSERSO – La situación de los enfermos afectados por la enfermedad de Parkinson, sus necesidades y demandas

LEWY BODY DEMENTIA ASSOCIATION, INC – Introducción a la demencia por cuerpos de Lewy

INSTITUTO NACIONAL DE ESTADÍSITICA (INE) – Suicidios España
RETINA PLUS+ y ERNST & YOUNG – Informe sobre la ceguera en España

GOBIERNO DE ARAGÓN – Programa de atención a enfermos crónicos dependientes.

GOBIERNO DE CANTABRIA – Manual de formación. La atención y el cuidado de las personas en situación de dependencia.

PWC y LILLY – Estado del arte de la enfermedad del Alzheimer en España

IMSERSO. OBSERVATORIO DE PERSONAS MAYORES DEL IMSERSO – Informe 2008. Las personas mayores en España

IMSERSO. LIBRO BLANCO – Atención a las personas en situación de dependencia en España

7.2. Documentación de referencia en internet

ENRIQUE POCIELLO GARCIA – Modelo semimarkoviano de invalidez.

ENG HOCK GUI and ANGUS MACDONALD – Early-onset Alzheimer's disease, critical illness insurance and life insurance.

ANGUS MACDONALD and DELME PRITCHARD – A mathematical model of Alzheimer's disease and the Apoe gene

CHRISTIAN WACHINGER, KAYHAN BATMANGELICH, POLINA GOLLAND and MARTIN REUTER – BrainPrint in the Computer-Aided Diagnosis of Alzheimer's Disease

FUNDACIÓN ESPAÑOLA DE ENFERMEDADES NEUROLÓGICAS (FEEN) – Impacto social de la enfermedad del Alzheimer y otras demencias 2011

CONFEDERACÓN ESPAÑOLA DE FAMILIARES DE ENFERMOS DE ALZHEIMER Y OTRAS DEMENCIAS (C.E.A.F.A.) – La enfermedad del Alzheimer

SCOR INFORM NOVIEMBRE 2012 – Creación de bases biométricas para el seguro de dependencia

PABLO ALONSO GONZALEZ e IRENE ALBARRÁN LOZANO – Long term care in Spain: Extent, Costs and Challenges

BAOPENG LU – Some new actuarial models of the insurance implications of genetic testing for breast and ovarian cancer

STEPHEN RICHARDS – Mortality projections and Solvency II

ANTONIO ALEGRE ESCOLANO, MERCEDES AYUSO GUTIERREZ, MONTSERRAT GUILLEN ESTANY, MALENA MONTEVERDE VERDENELLI y ENRIQUE POCIELLO GARCÍA – Tasa de dependencia de la población española no institucionalizada y criterios de valoración de la severidad

ICEA – Tablas de invalidez de la población asegurada española

INSTITUTO NACIONAL DE ESTADÍSTICA (INE) – Estimaciones de la Población Actual. Metodología

EZEQUIEL URIEL – El modelo de regresión simple: estimación y propiedades

EDUARDO AGUILAR FERNANDEZ – Estimación y proyección de la mortalidad para Costa Rica con la aplicación del método Lee-Carter con dos variantes

NÉLIDA LAMELAS CASTELLANOS, EVA AGUAYO LORENZO, MARIA TERESA CANCELO MARQUEZ - Reducción de la mortalidad infantil: modelización econométrica para Centroamérica y Sudamérica, 1970 – 2000

EDUARDO SANCHEZ DELGADO, JUAN MANUEL LOPEZ ZAFRA y SONIA DE PAZ COBO – La corrección de los tantos de mortalidad de los dependientes: una aplicación al caso español

ANA DEBÓN AUCEJO, FRANCISCO MONTES SUAY y RAMÓN SALA GARRIDO – Tablas de mortalidad dinámicas para España. Una aplicación a la hipoteca inversa

ANA DEBÓN AUCEJO – Graduaciones de tablas de mortalidad. Aplicaciones actuariales.

7.3. Enlaces web de referencia en internet

SISTEMA PARA LA AUTONOMÍA Y ATENCIÓN DE LA DEPENDENCIA (SAAD-IMSERSO). PORTAL DE LA DEPENDENCIA.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTADÍSTICA (INE)

ORGANIZACIÓN MUNDIAL DE LA SALUD (EUROPA)

ORGANIZACIÓN MUNDIAL DE LA SALUD – Datos del observatorio mundial de salud

GLOBAL AGEWATCH INDEX 2014

WORLDOMETERS

INSTITUTO DE MAYORES Y SERVICIOS SOCIALES (IMSERSO)

MINISTERIO DE SANIDAD, SERVICIOS SOCIALES E IGUALDAD (MSSSI)

FUNDACIÓN ALZHEIMER ESPAÑA (ALZFAE)

ASOCIACIÓN NACIONAL DEL ALZHEIMER (AFAL)

FUNDACIÓN ESPAÑOLA PARA EL FOMENTO DE LA INVESTIGACIÓN DE LA ESCLEROSIS LATERAL AMIOTRÓFICA (FUNDELA)

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE PARKINSON (FEDESPARKINSON)

INSTITUTE OF ACTUARIES AND FACULTY OF ACTUARIES

8. ANEXO

8.1. Código de programación en Visual Basic

Con el objetivo de reforzar los cálculos y dotar de seguridad el razonamiento teórico y práctico del modelo, nos apoyamos en Visual Basic como herramienta de programación principal para ver que los cálculos de probabilidades de transición que arroja nuestro modelo tienen una base técnica razonable y no se producen diferencias de cálculo importantes.

El siguiente código es un código sencillo formado por la definición de las variables intervinientes en el modelo, la extracción y localización de los principales datos participantes en la fórmula de Volterra y los cálculos intermedios y finales necesarios en la obtención de las probabilidades de transición del seguro de dependencia.

El código propuesto plantea el cálculo de las ecuaciones integro-diferenciales de Volterra para el cálculo de las probabilidades de transición de un hombre activo que continúa en estado activo mediante el método de aproximación del Trapecio compuesto.

```
Sub tpxaatrapeciocompuesto()

Dim intdep As Integer
Dim intmort As Integer
Dim intreact As Double
Dim pt00 As Integer
Dim pt01 As Integer
Dim h As Integer
Dim b As Single
Dim a As Single
Dim n As Single
Dim tpxaatrapeciocompuesto As Double



  Sheets("Tasa dependencia3 x").Activate
```

```
'Extracción datos

intdep = Range("K22").Value

Sheets("Tasa mortalidad x").Activate

'Extracción datos

intmort = Range("K19").Value

Sheets("Tasa recuperación x,z").Activate

'Extracción datos

intreact = Range("W19").Value

Sheets("Prob. transición t0px").Activate

'Extracción datos

pt00 = Range("A5").Value
pt01 = Range("B5").Value

Sheets("Herramienta vba").Activate

Sheets("Prob.Transicion Aprox.").Activate

'Extracción datos

b = Range("E5").Value
a = Range("E6").Value
n = Range("E7").Value

'Cálculo h

h = (b - a) / n


tpxaatrapeciocompuesto = ((1 - h * (intdep + intmort)) * pt00 + ((h ^ 2) / 2) * intdep * pt01 *
intreact) / 10

'Salida final probabilidad transición activo a activo Trapecio compuesto

Sheets("Herramienta vba").Range("E30").Value = tpxaatrapeciocompuesto
```

```
End Sub
```