

LA TEORIA DEL VALOR EXTREMO: UNA APLICACIÓN AL SECTOR ASEGURADOR

Almudena García Pérez¹

ABSTRACT²

Debido a que los eventos extremos pueden poner en peligro la estabilidad de una entidad aseguradora, el comportamiento inusual de una variable aleatoria puede tener más interés que su 'normalidad' ampliamente tratada por la teoría clásica del riesgo.

La Teoría del Valor Extremo y más concretamente la distribución de Pareto generalizada permite modelizar los siniestros que exceden un determinado umbral o prioridad, dando un paso más en el análisis de riesgos y en gestión financiero – actuarial, tanto operativa como estratégica.

Key Words: *Extreme Value Theory, Generalized Pareto Distribution, tail inference, solvency and reinsurance.*

¹ Universidad de Alcalá de Henares. Plaza de la Victoria, 2. Alcalá de Henares (28802). Madrid.
Tel: 91.885.4293. Fax: 91.885.4294. e-mail: almu.garcia@uah.es

² Este artículo fue presentado como ponencia en el VII congreso Hispano – Italiano de Matemáticas Financieras y Actariales organizado por la Universidad de Castilla La Mancha en Julio de 2.004 y forma parte de la tesis doctoral: "Una aportación al análisis de solvencia: La teoría del valor extremo".

1. INTRODUCCIÓN

La preocupación por la solvencia³ de los aseguradores no es una particularidad de cada entidad sino también del sector y de las instituciones reguladoras, ya que la actividad aseguradora cumple un papel fundamental para la economía, en la medida en que facilita la compensación de riesgos entre personas a través de un principio de solidaridad, distribuyendo la siniestralidad sufrida por un grupo de individuos entre el conjunto de asegurados.

La inversión del proceso productivo, propia del seguro, implica que anticipadamente se reciban unas primas para atender el futuro volumen de pagos que se derive de la ocurrencia esperada de siniestros.

Esta siniestralidad es una variable aleatoria que el asegurador del riesgo necesita medir para mantener el equilibrio actuarial sin poner en peligro su estabilidad.

Existen modelos desarrollados por la Teoría del Riesgo, que, aplicando la ley de los grandes números, permiten estudiar el comportamiento medio esperado de siniestralidad.

No obstante, asumir que una única distribución de probabilidad es capaz de explicar toda la siniestralidad incluyendo la cola es, en muchos casos, inadecuado.

La Teoría del Valor Extremo es una disciplina estadística que desarrolla un conjunto de modelos y métodos tanto paramétricos como no paramétricos con el objeto de describir, cuantificar y modelizar los casos raros los cuales se distribuyen, no bajo la 'ley de los grandes números', sino bajo la ley de los pequeños números (*'law of the small numbers'*).

Esta teoría ha experimentado un importante desarrollo en los últimos 50 años, gracias a su aplicabilidad a múltiples disciplinas, como

³ Por solvencia se entiende la capacidad de una entidad aseguradora para hacer frente a los compromisos por ella asumidos.

mercados financieros, sector asegurador, ingenierías, biología, hidrología, medio ambiente, etc.

En el ámbito del seguro, el estudio de los extremos puede ayudar a responder varias cuestiones como:

¿Cuál es el tiempo medio de espera hasta la ocurrencia de un siniestro de una determinada cuantía elevada?

¿Cuál es la cuantía de siniestralidad probable en una cartera, dada una alta probabilidad, por ejemplo 0,999; esto es, cual es la máxima pérdida probable esperada para los próximos 1.000 siniestros?

¿Cuál debe ser el capital necesario para cubrir con una alta probabilidad las pérdidas extremas esperadas futuras en una determinada cartera?

¿Cuál es el pleno de retención óptimo en un reaseguro *excess of loss* (exceso de pérdida) con prioridad P ?

Se ha estructurado este trabajo describiendo brevemente los fundamentos clásicos de la Teoría del Valor Extremo para posteriormente realizar una aplicación empírica a un caso real, tomando la siniestralidad de una cartera de Responsabilidad Civil de vehículos a motor de una entidad aseguradora suficientemente representativa del ramo cuya identidad mantendremos oculta por motivos de confidencialidad.

Para la ejecución de los algoritmos se ha empleado el software XTREMES⁴, desarrollado por la Universidad de Siegen.

⁴ Copyright Notice: Copyright (C) 2000 by Xtremes Group, Siegen. All rights reserved.
<http://www.xtremes.math.uni-siegen.de/xtremes/>

2. LA TEORÍA DEL VALOR EXTREMO

La Teoría del Valor Extremo consiste en un conjunto de técnicas estadísticas para la identificación y modelización de los máximos o mínimos de una variable aleatoria.

El desarrollo de los modelos fundamentales de la Teoría del Valor Extremo se deben a los trabajos pioneros de Von Mises, Gnedenko o Fisher y Tippet (1928) cuyo teorema llevó al desarrollo de la distribución asintótica para modelizar máximos (o mínimos), denominada Distribución Generalizada del Valor Extremo (*Generalized Extreme Value Distribution* – G.E.V.D.).

Más adelante Gumbel, avanzaría en la estadística no paramétrica para estimar frecuencias en base a la ordenación de los siniestros.

El teorema de Pickands-Balkema-de Haan (Balkema y de Haan -1974-Pickands -1975-) daría lugar al modelo que concierne a la distribución de los excesos por encima de un umbral, donde cobra interés el comportamiento del valor extremo una vez alcanzado un elevado nivel. Esta distribución truncada por la izquierda, se conoce como Distribución Generalizada de Pareto (*Generalized Pareto Distribution* – G.P.D.).

2.1. La distribución generalizada del valor extremo

La distribución del valor extremo generalizada es la distribución que ajusta los máximos de bloques de observaciones adecuadamente normalizados y surge a partir del desarrollo de Teorema de Fisher y Tippet de 1928. Según éste, sean un conjunto de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con una función de distribución común $F(x)$ y donde M_n representa el máximo de todas ellas, la cuestión a la que da respuesta es: ¿cuál es la distribución del máximo?

El producto de las probabilidades conduce a la convolución enésima de la función $F(x)$ y estandarizando adecuadamente el máximo con a_n (medida de la tendencia central de la distribución) y b_n (medida de la

dispersión), en el límite, existe una distribución asintótica $G(x)$ que ajusta dicho máximo normalizado:

sean

$$X_{1,n}, X_{2,n}, \dots, X_{k,n}, \dots, X_{n,n} \text{ y } [F(x) = P(X_{k,n} \leq x)]$$

donde

$$M_n = X_{1,n} = \max(X_{1,n}, X_{2,n}, \dots, X_{k,n}, \dots, X_{n,n})$$

entonces,

$$P(M_n \leq x) = P(X_{1,n} \leq x, \dots, X_{n,n} \leq x) = \prod_{i=1}^n P(X_{i,n} \leq x) = F^n(x)$$

Normalizando adecuadamente con $b_n > 0$ y $a_n \in \mathfrak{R}$:

$$P\left(\frac{M_n - a_n}{b_n} \leq x\right) \rightarrow G(x) \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

Del desarrollo asintótico de la expresión anterior aparecen tres tipos de distribución límite:

TIPO I: **Distribución de Gumbel** – colas medias

TIPO II: **Distribución de Frechet** – colas gruesas

TIPO III: **Distribución de Weibull** – colas suaves

Esta aproximación es fundamental, ya que la distribución límite $G(x)$ siempre pertenece a una de estas tres distribuciones sea cual sea la distribución original de los datos $F(x)$, es decir, la distribución asintótica de los máximos se puede estimar sin realizar suposiciones acerca de la naturaleza de la distribución original de las observaciones, generalmente desconocida.

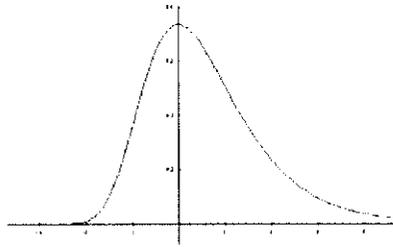
Se puede decir además que $F(x)$ se encuentra en el máximo dominio de atracción de $G(x)$:

Distribución inicial F(x)	Distribución límite para los máximos G(x)
Exponencial Gamma Normal Log-normal	TIPO I
Pareto Cauchy Burr Log-Gamma	TIPO II
Uniforme Beta	TIPO III

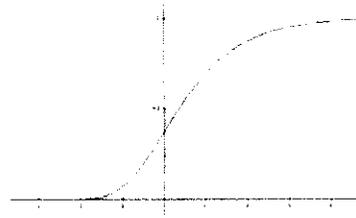
Los tres tipos de límites de dicha expresión asintótica son:

Distribución de Gumbel para colas medias

$$G_0(x) = \exp\{-\exp(-x)\}, \quad x \in R$$



Función de densidad de Gumbel

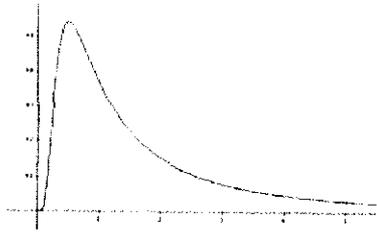


Función de distribución de Gumbel

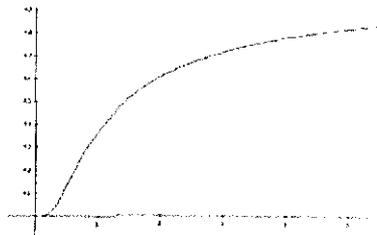
Distribución de Frechet para colas gruesas.

$$G_1(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \exp\{-x^{-\alpha}\}, & x > 0 \end{cases} \quad \text{con } \alpha > 0$$

Definida para valores positivos y caracterizada por un parámetro α o índice de cola positivo.



Función de densidad de Frechet

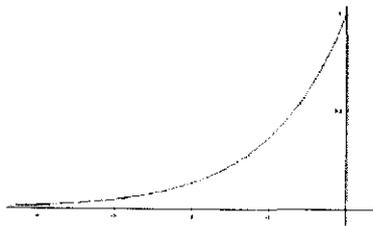


Función de distribución de Frechet

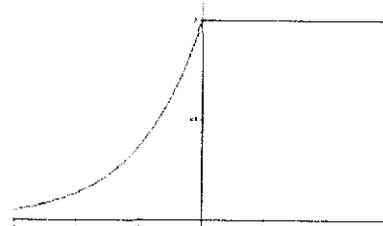
Distribución de Weibull para colas cortas o suaves.

$$G_2(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ \exp\{-(-x)^{-\alpha}\}, & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{con } \alpha < 0$$

Definida para valores negativos y caracterizada por un parámetro α o índice de cola negativo.



Función de densidad de Weibull



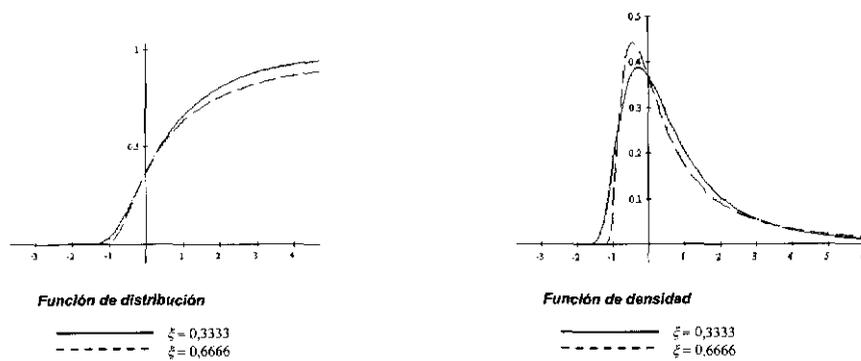
Función de distribución de Weibull

Las tres distribuciones se pueden fundir en un modelo continuo y unificado realizando una reparametrización ($\xi = 1/\alpha$) que da lugar a la expresión que configura la distribución del valor extremo generalizada. La función de distribución límite para los máximos estandarizados, explicitando los parámetros de localización (a_n) y escala (b_n):

$$G_{\xi, a_n, b_n} = \exp \left\{ - \left(1 + \xi \frac{x - a_n}{b_n} \right)_+^{-1/\xi} \right\} \quad \begin{array}{l} \xi, a_n \in \mathfrak{R} \\ b_n > 0 \end{array}$$

El parámetro ξ es el parámetro de forma o índice de cola. El valor del mismo identificará la distribución y determinará el grueso de la cola. Cuanto mayor sea ese índice, más gruesa será la cola.

$\xi > 0$	Distribución de Fréchet
$\xi < 0$	Distribución de Weibull
$\xi = 0$	Distribución de Gumbel



2.2 La distribución de Pareto Generalizada

La segunda distribución relevante en la Teoría del Valor Extremo es la distribución de Pareto generalizada que surge a partir del método conocido como P.O.T. (*Peaks over threshold method*), que consiste en la modelización de los extremos que exceden un determinado umbral o prioridad, bien sea de las cuantías totales (X_i), bien de los excesos ($Y_i = X_i - u$) sobre el umbral u .

De la aplicación de este método surgen tres cuestiones a resolver:

Una es determinar el nivel del umbral u , cuya elección está sujeta al problema de la varianza y el sesgo, ya que cuanto menor sea el umbral

mayor es el número de observaciones lo que puede disminuir la varianza del ajuste pero puede incrementar el sesgo si se intenta modelizar observaciones que no pertenecen a la cola. Por otro lado, si se reduce el número de observaciones (con un umbral más elevado), se reduce el sesgo pero hace que la estimación del índice sea más volátil al realizarse con un menor número de observaciones⁵.

La segunda es determinar qué función de distribución ajusta dichos excesos. Se trata de una distribución condicionada a que el extremo haya superado u y según el teorema de probabilidad condicionada se llega al cociente entre la probabilidad conjunta y la probabilidad del suceso condicionante, definiendo x positivo e inferior al punto derecho final de la distribución, ya sea éste finito o infinito.

$$F^u(x) = F^u(y+u) = P(X-u \leq y / X > u) = \frac{F(x) - F(u)}{1 - F(u)}$$

para $0 \leq x \leq x_0$, $0 \leq y \leq x_0 - u$

La tercera cuestión, consecuencia de la segunda, es la función de supervivencia, complementaria de la función de distribución.

$$\begin{aligned} 1 - F^u(x) &= 1 - F^u(y+u) = \\ &= P(X > y+u / X > u) = P(X-u > y / X > u) = \frac{1 - F(x)}{1 - F(u)} = \frac{1 - F(y+u)}{1 - F(u)} \end{aligned}$$

para $0 \leq x \leq x_0$

El teorema de Pickands-Balkema-de Haan (Balkema y de Haan -1974- Pickands -1975-) muestra que bajo condiciones de máximos dominios de atracción, la distribución generalizada de Pareto es la distribución límite para los excesos sobre una prioridad u cuando ésta es elevada.

De la expresión de la función de distribución condicional surge la distribución Generalizada de Pareto:

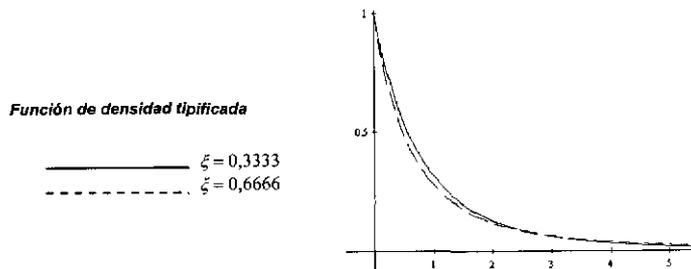
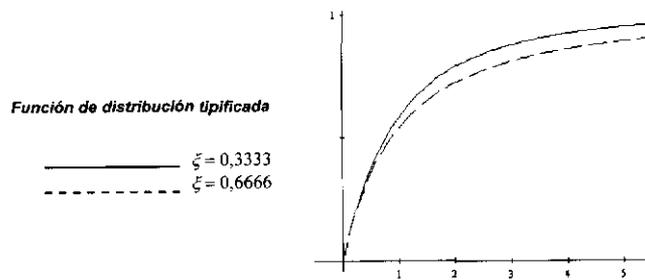
⁵ Si se desea saber más respecto a la elección de este umbral consulte Beirlant, J.; Teugels, J.L.; Vynckier, P. (1996).

$$F^u(x) = P(X - u \leq y / X > u) \approx W_\xi(y) \text{ para } 0 \leq y \leq x_0 - u$$

$$W_\xi(x) = 1 - (1 + \xi \cdot x)^{-1/\xi} \begin{cases} x > 0 & \text{si } \xi > 0 \\ 0 < x < \frac{1}{|\xi|} & \text{si } \xi < 0 \end{cases}$$

$$W_{\xi=0}(x) = 1 - e^{-x}, \quad x \geq 0$$

La distribución está definida por el parámetro ξ , o índice de cola y por el parámetro de escala β . Cuanto mayor sea el parámetro ξ , más larga es la cola:



3. APLICACIÓN EMPÍRICA A LOS EXCESOS SOBRE UNA PRIORIDAD.

En este apartado el objetivo es llegar a un ajuste que modelice los valores muestrales que exceden un determinado umbral y, como ya se ha indicado, la distribución generalizada de Pareto es la más adecuada para modelizar los excesos sobre el umbral cuando éste es elevado.

Las hipótesis consideradas en el estudio son:

El fenómeno que se estudia es una variable aleatoria.

Las observaciones son independientes y comparten una distribución común que no ha variado sustancialmente a lo largo del tiempo.

Las aproximaciones probabilísticas se sostienen, ya que el volumen de observaciones del que se extrae la muestra es elevado.

En esta investigación se ha contado con la base de datos de siniestros de una entidad aseguradora suficientemente representativa del sector y cuya identidad se mantiene oculta por motivos de confidencialidad. En concreto, se ha estudiado la siniestralidad derivada de pólizas del ramo de responsabilidad civil de vehículos a motor, desde el año 1992 hasta el 2001⁶.

La sensibilidad de la información requerida restringe el alcance de este artículo. En el momento de conclusión del mismo la muestra disponible llega únicamente hasta 2001 y se encuentra expresada en pesetas.

En todo caso el aspecto relevante de este trabajo no son las conclusiones numéricas puesto que éstas son particulares de la entidad colaboradora y sólo extensivas a otras entidades o al sector tras una necesaria adecuación.

⁶ Con objeto de que las cuantías fuesen comparables en unidades monetarias equivalentes, éstas han sido adecuadamente ajustadas a la inflación. (www.ine.es/inebase/cgi/um)

El verdadero objeto de este trabajo es manifestar la utilidad de la Teoría del Valor Extremo en la gestión financiero – actuarial de una entidad aseguradora así como sentar una metodología de aplicación empírica de cara a establecer futuros modelos internos en el marco del proyecto de Solvencia II, metodología susceptible de ser inducida a otras entidades, al sector o a otros ramos de cola gruesa.

Estructura de la aplicación empírica:

Selección del umbral óptimo por encima del cual la distribución de Pareto generalizada pueda ser ajustada a los excesos sobre dicho valor.

Descripción de la muestra a modelizar.

Estimación de los parámetros del modelo.

Comprobación de la bondad del ajuste realizado a través de los gráficos de cuantil-cuantil.

Inferencia en base al modelo estimado. Es importante recordar que se trata de una distribución condicionada y que por tanto la inferencia también lo está a que el siniestro sea superior al umbral elegido.

Elección del umbral:

Tal como se indica anteriormente, en virtud del teorema de Pickands-Balkema-de Haan, la distribución generalizada de Pareto ajusta aquellos valores que exceden un determinado umbral cuando este umbral u toma un valor suficientemente grande.

La dificultad radica en determinar ese umbral a partir del cual es posible ajustar la distribución de Pareto Generalizada. Para ello, en primer lugar, se ha tomado un umbral de 25 millones para conseguir una muestra de aproximadamente 1.000 observaciones.

A través de la función de exceso medio y más concretamente, mediante el gráfico de exceso medio empírico, se intenta aproximar el

punto a partir del cual se puede ajustar la distribución de Pareto generalizada a los datos.

La función empírica de exceso medio se estima con la siguiente expresión dada una muestra ordenada de forma descendente $(X_{1,n} \geq \dots \geq X_{k,n} \geq \dots \geq X_{n,n})$ ⁷:

$$\hat{e}_n(u) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_{i,n} - u)^+}{\sum_{i=1}^n 1_{(X_{i,n} > u)}}$$

En el numerador se encuentra la suma de los excesos sobre la prioridad y en el denominador el número de valores que cumplen la condición de ser superiores al umbral, determinando la media aritmética de los valores que exceden u .

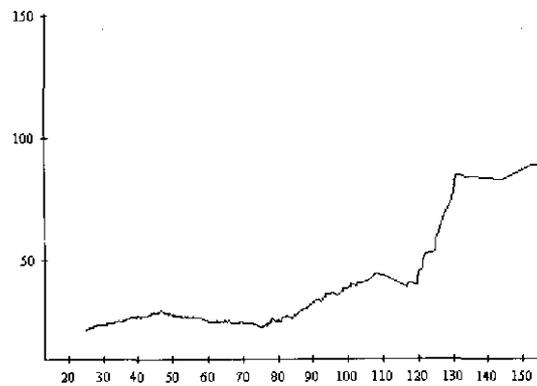
Sin embargo, en la práctica resulta de interés tomar como umbrales los propios datos de la muestra, esto es, $u = X_{k+1}$. En tal caso, la función de exceso medio empírica que resulta, es la media aritmética de los k mayores valores muestrales:

$$E_{k,n} = \hat{e}_n(X_k) = \frac{\sum_{i=1}^k X_i}{k} - X_{k+1}, \quad k = 1, \dots, n-1$$

Para representar el gráfico de exceso medio se toma la función empírica $E_{k,n}$ como variable dependiente y como variable independiente los valores de la prioridad $u = X_{k+1}$.

La representación de la función de exceso medio queda como sigue (en millones de pesetas):

⁷ k indica la posición en la jerarquía de los datos ordenados de mayor a menor, siendo $k=1$ la mayor de las observaciones y $k=n$ la menor de ellas.



En el eje de abscisas se han representado los valores muestrales, y en el eje de ordenadas el valor de la función de exceso medio para cada umbral.

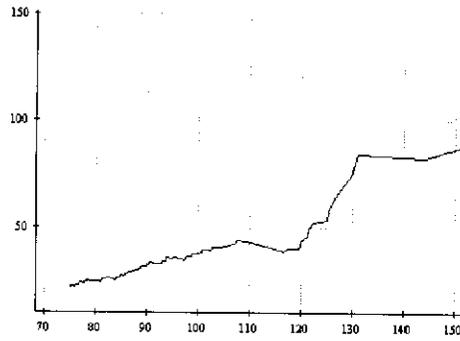
Cuando el ajuste a través de la distribución generalizada de Pareto es razonable, es posible elegir un umbral o prioridad óptimo, tomando el valor a partir del cual el gráfico toma una forma lineal ascendente, ya que el gráfico de exceso medio para la distribución generalizada de Pareto es lineal y tiende a infinito con pendiente positiva⁸.

En esta figura se observa que entre los valores 20 y 70 la función de exceso medio se muestra bastante lineal, mientras que aproximadamente a partir del valor 75 la función empieza a ser creciente indicativo de cola gruesa a partir de dicho punto:

⁸ La función de exceso medio teórica de la distribución de Pareto Generalizada es:

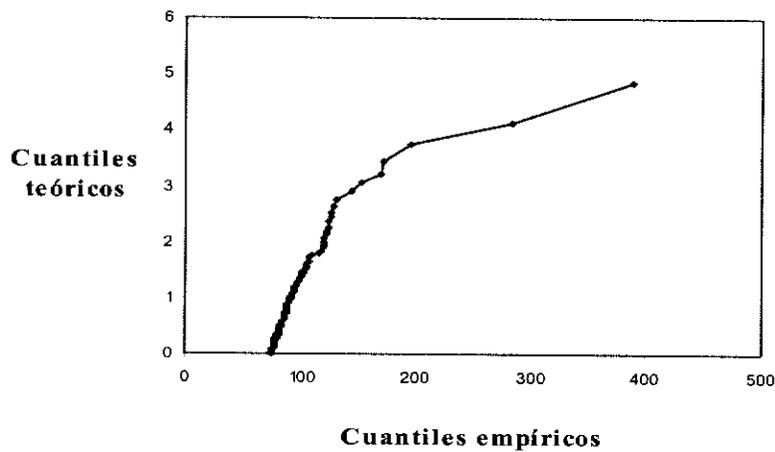
$$e_{u_i}(u) = \frac{1 + \xi \cdot u}{1 - \xi}, \text{ para } \begin{cases} u > 0 & \text{si } 0 \leq \xi < 1 \\ 0 < u < -\frac{1}{\xi} & \text{si } \xi < 0 \end{cases}$$

Cuya pendiente: $\frac{\xi}{1 - \xi}$



Para contrastar esta afirmación y cerciorar la existencia de cola gruesa en las observaciones de la entidad aseguradora se representa en un gráfico de cuantil-cuantil los cuantiles empíricos (observaciones muestrales) frente a los cuantiles teóricos de la distribución exponencial⁹:

**GRAFICO DE CUANTIL-CUANTIL
(Exponencial)**



⁹ Si la función de distribución exponencial es: $F(x_p) = 1 - e^{-x_p r} = p$; entonces la función inversa o función de cuantiles es: $F^{-1}(p) = Q(p) = -\text{Ln}(1-p) = x_p$, siendo $p = \frac{r}{n+1}$.

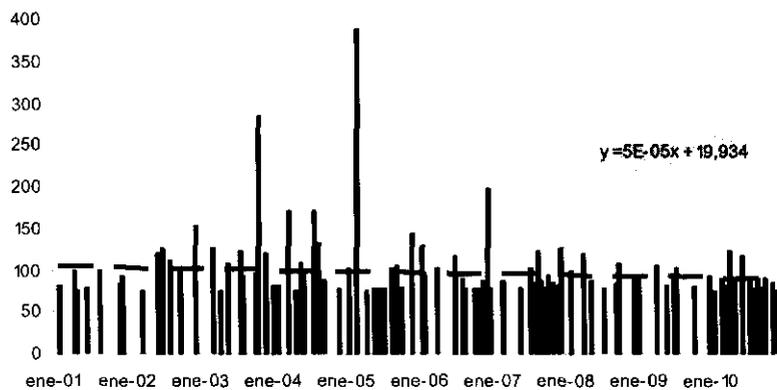
A pesar de representarse en distintas escalas la linealidad en el gráfico sería indicativa de que la distribución empírica de los extremos se ajusta a la distribución exponencial, sin embargo, la curvatura nos indica la existencia de una cola más gruesa que la de la distribución exponencial a partir del valor 75.

Descripción de la muestra a modelizar:

Los descriptores de la muestra que excede el umbral seleccionado son:

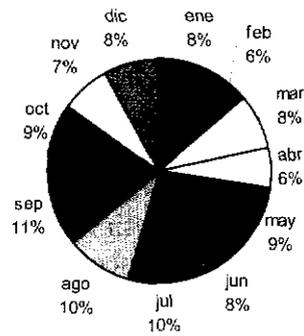
Tamaño de la muestra: 125		Varianza: 1412,3
Media: 97,2063		Desviación estándar: 37,5806
Mínimo: 75,0258		Mediana: 86,2817
Máximo: 388,598		Asimetría: 4,98084
Percentiles (q)	Valor para el percentil (X_q)	Número de valores por encima de X_q (k)
$q=0,25$	$X_{0,25}=79,5628$	$k=93$
$q=0,50$	$X_{0,50}=86,2817$	$k=62$
$q=0,75$	$X_{0,75}=100,583$	$k=31$
$q=0,90$	$X_{0,90}=125,202$	$k=12$

Con el fin de observar si existe alguna tendencia, ciclo o comportamiento estacional que pueda interferir en el estudio, se representan los siniestros que forman la muestra de excesos:



Su representación gráfica frente al momento de ocurrencia junto con una regresión lineal a los datos indica una tendencia ligeramente descendente en el coste de los mismos.

En busca de comportamientos estacionales o concentración de siniestros en determinados meses del año, en el siguiente gráfico se agrupan los 125 siniestros.



Aunque visualmente se aprecia mayor proporción de extremos en los meses de julio a septiembre, con el objeto de comprobar si esa concentración es estadísticamente significativa, se planteó un contraste de hipótesis de Chi-cuadrado, a través del cual, se confirma la hipótesis de que no existen diferencias significativas en la frecuencia de siniestralidad por meses.

Al no existir evidencias estadísticas que indiquen estacionalidad, en este trabajo se mantiene la hipótesis de no correlación entre el mes de ocurrencia y el tamaño del siniestro.

Estimación de parámetros:

Con ayuda del software XTREMES para la ejecución de los algoritmos, se obtuvieron distintos ajustes de los cuales se seleccionaron como óptimos aquellos que minimizaron las medidas de error empleadas.

Para la estimación de los parámetros se emplearon varios estimadores entre los que se encontraban los estimadores por máxima verosimilitud o los estimadores a través de los momentos, sin embargo, fueron los estimadores de Drees-Pickands¹⁰ los que, en este caso, han proporcionado las mejores estimaciones de parámetros para el ajuste de la distribución a la muestra disponible.

El criterio para seleccionar los estimadores de Drees-Pickands y desechar los otros estimadores ha sido el del mínimo error cuadrático medio¹¹, el promedio de las desviaciones relativizadas y el coeficiente de determinación del ajuste lineal al gráfico de cuantil – cuantil.

La estimación de los parámetros y el ajuste de la distribución generalizada de Pareto se ha realizado sobre el logaritmo neperiano de los datos, consiguiendo así una mayor exactitud en el ajuste, por tanto, cualquier inferencia realizada a partir de los parámetros estimados deberá invertirse, a través de la exponencial, para conocer el valor del siniestro en millones de pesetas.

¹⁰ El estimador de Drees-Pickands se basa en una mixtura de estimaciones de Pickands, las cuales toman las k observaciones más altas de la muestra.

El estimador de Pickands para el parámetro (ξ) de la distribución de Pareto generalizada, viene dado por:

$$\xi_{k,n}^P = \frac{\ln \frac{X_k - X_{2k}}{X_{2k} - X_{4k}}}{\ln 2}$$

donde X_i representa la i -ésima observación más alta y el parámetro k representa el número de datos empleados en el proceso de estimación, esto es, en el estimador se emplean las k mayores observaciones.

¹¹

$$PDR = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{|X_i^o - X_i^t|}{X_i^o} \right)}{n}$$

$$ECM = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i^o - X_i^t)^2}{n}$$

X_i^o : cuantiles muestrales o empíricos y

X_i^t : cuantiles teóricos determinados a partir de la función estimada

Los parámetros estimados para el modelo, tomando el logaritmo neperiano de los valores muestrales y optimizando el ajuste con un umbral de 75,95 y 118 excesos, son los siguientes:

$$\xi = 0,246814$$

$$\beta = 0,181233$$

$$\mu = 4,33014$$

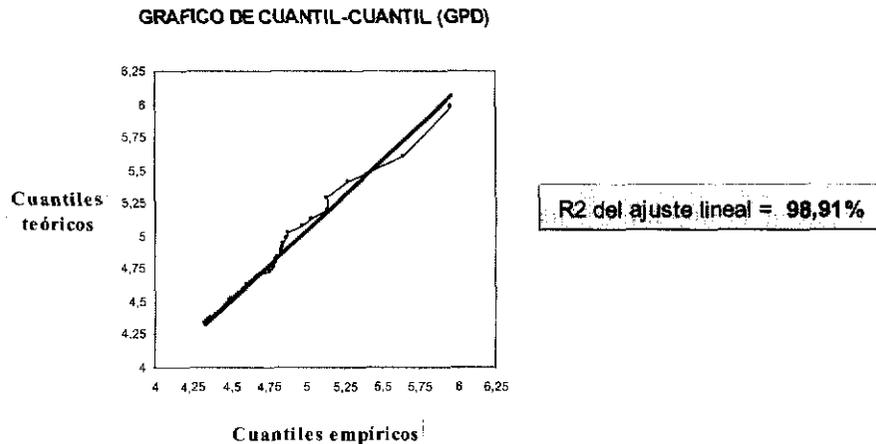
La función de Distribución Generalizada de Pareto se ha estimado para que ajuste los valores extremos que exceden la prioridad u y no los excesos, ya que en caso de ajustarse los excesos sobre u ($X-u$), el parámetro de localización, μ , sería 0 en lugar de 4,33.

Comprobación de la bondad del ajuste:

El siguiente gráfico muestra el gráfico de cuantil-cuantil (*QQ-plot*), que representa los cuantiles empíricos (valores muestrales) frente a los cuantiles teóricos obtenidos a través de la distribución estimada:

$$\hat{W}_{\xi, \beta, \mu}^{-1}(p) = \mu + \frac{\beta}{\xi} \left((1-p)^{-\xi} - 1 \right) = 4,33014 + \frac{0,181233}{0,246814} \left((1-p)^{-0,246814} - 1 \right) = x_p$$

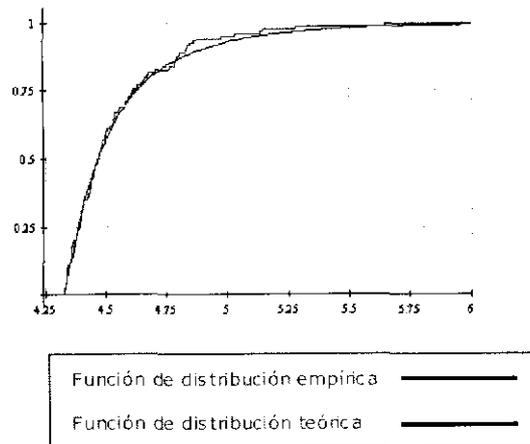
con $p = r/n+1$



La nube de puntos en este gráfico muestra una línea que, prácticamente, coincide con la bisectriz.

De los modelos estimados, este era el que minimizaba las medidas de error empleadas y maximizaba el coeficiente de determinación del ajuste lineal al gráfico de uantil – cuantil.

La representación conjunta de la distribución teórica y la distribución empírica muestra la bondad del ajuste obtenido¹²:



Inferencia y Predicción

Este modelo ajustado es una distribución truncada y, por tanto, condicionada a que los siniestros excedan 75,95 millones de pesetas.

A partir de la función de distribución condicionada se pueden estimar la probabilidad de que un siniestro sea inferior al valor x , una vez que

$$^{12} \text{ Distribución teórica: } \hat{W}_{\hat{\xi}, \hat{\beta}, \hat{\mu}}(x) = 1 - \left(1 + 0,246814 \cdot \frac{x - 4,33014}{0,181233} \right)^{-1/0,246814}$$

$$\text{Distribución empírica: } \hat{F}_n(c) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i \leq n} 1(X_i \leq c)$$

haya excedido el umbral fijado en 75,95 millones (cuyo logaritmo neperiano es 4,33014).

La probabilidad de que sea superior a dicho valor x , se obtendrá a partir de la función complementaria, esto es, la función de supervivencia:

$$\hat{W}_{\hat{\gamma}, \hat{\beta}, \hat{\mu}}(x) = 1 - \left(1 + 0,246814 \cdot \frac{x - 4,33014}{0,181233} \right)^{-1/0,246814}$$

$$1 - \hat{W}_{\hat{\gamma}, \hat{\beta}, \hat{\mu}} = \left(1 + 0,246814 \cdot \frac{x - 4,33014}{0,181233} \right)^{-1/0,246814}$$

En la siguiente tabla se presentan algunos de los posibles resultados que pueden ser obtenidos, a través de la función de distribución y función de supervivencia teóricas:

e^x (en mill. de €)	X	W(x)	1-W(x)
100	4,605	72,44%	27,56%
150	5,011	92,98%	7,01%
250	5,521	97,99%	2,01%
350	5,858	98,95%	1,05%

Por ejemplo, habiendo superado un siniestro el umbral de 75,95 millones, la probabilidad de que el importe total del mismo sea inferior a 150 es de 92,985% y por tanto, la probabilidad de que sea superior a 150 millones de pesetas es 7,015%.

Luego se espera, que de entre los próximos 100 siniestros que superen el umbral de 75,95 millones de pesetas, 93 tengan un importe inferior a 150, pero 7 de ellos superen los 150 millones de pesetas.

Por otro lado, la función de cuantiles estimada, inversa de la función de distribución, indica cuál es la cuantía esperada de siniestralidad que deja la probabilidad p a la izquierda de la misma.

$$\hat{W}_{\gamma, \beta, \mu}^{-1}(p) = \mu + \frac{\beta}{\gamma} \left((1-p)^{-\gamma} - 1 \right) = 4,33014 + \frac{0,181233}{0,246814} \left((1-p)^{-0,246814} - 1 \right) = x_p$$

De dicha expresión se puede obtener también información relevante. Algunos de los resultados se presentan en la siguiente tabla:

p	Frecuencias de retorno $\frac{1}{1-p}$	Nivel de retorno (x_p) en Ln	Nivel de retorno (x_p) en mill de pts.
90%	10 siniestros	4,892079	133,230
95%	20 siniestros	5,133934	169,683
99%	100 siniestros	5,884058	359,264
99,9%	1.000 siniestros	7,635182	2.069,747

Por ejemplo, se espera que, con una probabilidad del 99%, una vez que un siniestro supere el umbral de 75,95 millones de pesetas, el importe total del mismo sea inferior a unos 359,26 millones de pesetas. Por el contrario, con una probabilidad del 1% (esto es 1 de cada 100 siniestros que superen el umbral) el coste total será superior a esos 359 millones.

Sin embargo, desde el punto de vista de la gestión en las entidades aseguradoras, interesa la inferencia no condicionada. Ello requiere cuestionarse por el número de siniestros esperado que superará el umbral el próximo año.

Para obtener este número se revisó la frecuencia histórica de siniestralidad por encima de dicha cuantía, resultando un promedio de 11,8 siniestros:

Año	Nº de siniestros que han superado 75,95 u.m.
1	10
2	12
3	9
4	14
5	12
6	16
7	14
8	8
9	7
10	16
total	118
Media	11,8
Varianza	10,4

Dado que la varianza es muy similar al número medio se asumió una distribución de Poisson de parámetro 12 para inferir que el próximo año, con una probabilidad de 96,3% el número de siniestros por encima de 75,95 no sería superior a 18:

$$p_k = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} \quad \text{con } \lambda=12 \quad \begin{array}{l} p_{\lambda=12}(k=17) = 93,7\% \\ p_{\lambda=12}(k=18) = 96,3\% \end{array}$$

De modo que, para estimar probabilidades no hay más que aplicar el postulado de probabilidad condicionada:

Numero esperado de siniestros por encima de 75,95 = $E(n) = 18$

Probabilidad condicionada: $P(x > 350 / x > 75,95) = 0,0105$

Numero medio esperado de siniestros por encima de 350 el próximo año:

$$p' = E(n) \cdot P(x > 350 / x > 75,95) = 0,189$$

Aplicación al reaseguro exceso de pérdida:

La modelización paramétrica, a través de la distribución Generalizada de Pareto ajustada a la muestra, que estima la distribución de siniestralidad por encima de un cierto umbral, resulta de interés a la

hora de evaluar la prima neta o prima pura de riesgo en el reaseguro XL (*excess of loss* – exceso de pérdida)¹³.

La esperanza de siniestralidad en exceso de la prioridad (P) del reaseguro será la medida de la prima de riesgo necesaria para cubrir los siniestros extremos:

Se determina por un lado, el número esperado de siniestros por encima del umbral.

Y por otro lado, la esperanza de siniestralidad condicionada a que el siniestro supere los 75,95 millones de pesetas.

$$PR_{XL(P)} = E(n) \cdot \left[\int_P^{\infty} x \cdot dF(x) \right] = E(N) \cdot \left[\int_0^{\infty} (x - P) \cdot dF(x) \right]$$

$$E(X / X > P) = \frac{\int_P^{\infty} x \cdot dF^u(x)}{1 - F^u(P)} = \frac{\int_P^{\infty} x \cdot w(x)}{1 - W(P)}$$

siendo,

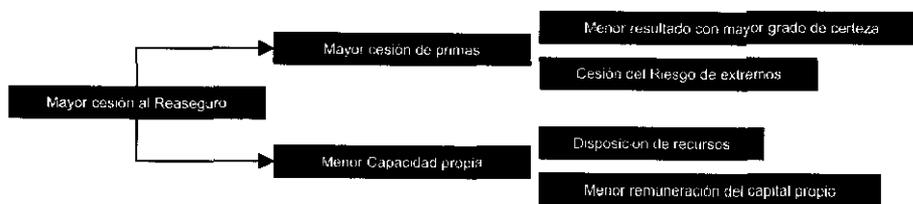
$$w(x) = \frac{1}{\beta} \cdot \left(1 + \hat{\xi} \cdot \frac{x - \mu}{\beta} \right)^{-1 - 1/\hat{\xi}}$$

Sin embargo, no sólo es de interés el ajuste desde el punto de vista del reasegurador, sino que la entidad aseguradora puede evaluar su necesidad de cesión y el pleno de retención en función de su esperanza de siniestralidad, nivel de riesgo aceptado y coste del capital:

¹³ Tipo de reaseguro donde el reasegurador pagará el exceso por encima de un pleno de retención (P) para siniestros individuales. Esto es, la retención del reasegurador R será:

$$R = \sum R_i; \quad i = 1, 2, \dots, \quad \text{si} \begin{cases} x_i < P \rightarrow R_i = 0 \\ x_i > P \rightarrow R_i = x_i - P \end{cases}$$

siendo x_i la cuantía individual de los siniestros y P el pleno de retención del reasegurador.



CONCLUSIONES

En el terreno actuarial, el interés por la teoría de los valores extremos es inherente al riesgo potencial de siniestros de elevada cuantía, que pueden causar un gran perjuicio económico y poner en peligro la estabilidad y solvencia de las entidades.

Cualquier entidad aseguradora necesitará conocer el comportamiento de sus extremos para decidir sobre su asunción con capacidad propia o bien sobre cesión al Reaseguro en cuyo caso la teoría del valor extremo y más concretamente el modelo de Pareto Generalizado, apoyará la estimación óptima del pleno de retención ya que atendiendo al Proyecto de Solvencia II, su capital económico debe responder a sus riesgos retenidos.

El nuevo marco de Solvencia II permitirá gestionar al asegurador con modelos internos para calcular el Capital basado en el Riesgo (*Risk Based Capital*). Si la culminación del proyecto está prevista en 2009, las entidades deben estar preparadas y disponer de todos los medios a su alcance para descifrar la naturaleza de sus riesgos, para estimar el capital económico necesario o para decidir sobre nivel de cesión al reaseguro:

A mayor cesión al reaseguro, mayor cesión de primas y menor resultado pero con mayor grado de certeza, a cambio la entidad aseguradora tiene menor necesidad de recursos propios de los cuales puede disponer libremente.

El objeto de este trabajo ha ido dirigido a mostrar la aplicabilidad de la teoría del valor extremo a la gestión financiera – actuarial de

entidades aseguradoras tanto desde un punto de vista operativo como estratégico de cara a la planificación.

La sensibilidad de la información necesaria para la investigación ha restringido el alcance de este trabajo, sin embargo, aunque una única entidad no permite establecer principios generales, su representatividad dentro del sector apunta comportamientos y situaciones anómalas esperadas.

La particularidad de esta entidad aseguradora ha permitido obtener predicciones adecuadas para optimizar la toma de decisiones, aplicando una metodología extensiva a otras entidades, otros ramos del seguro y otros campos como los mercados financieros, dando un paso más en el análisis de riesgos.

La inferencia sobre la base de modelos válidos es el apoyo al control financiero en la entidad dirigido a mantener la solvencia y la estabilidad de la misma.

Nuestro deseo como investigadores, ha sido abrir una brecha a través de la cual las teorías matemáticas los modelos estadísticos sean de utilidad para la gestión en el mercado mejorando la capacidad para la toma de decisiones eficiente.

BIBLIOGRAFÍA

- BEARD, R.E.; (1963): "Some notes on the statistical theory of extreme values"; *Astin Bulletin*, Vol. III; Pt. 1; pp. 6-12.
- BEIRLANT, J.; TEUGELS, J.L.; VYNCKIER, P.; (1996): *Practical Analysis of Extreme Values*; Leuven University Press. Leuven.
- BENSALAH, Y.; (2000): "Steps in applying Extreme Value Theory to finance: a Review" *Bank of Canada Working Paper 2000-20*.
- COLES, S.; (2001): *An Introduction to Statistical Modelling of Extreme Value*; Springer-Verlag, Londres.
- COLES, S.; (2001): "The use and misuse of extreme value models in practice": www.stats.bris.ac.uk/~masgc/papers/semstat.ps
- CHAVEZ-DEMOULIN, V.; ROEHRL, A.; (2004): "Extreme value theory can save your neck": www.approximity.com/papers/evt_wp.pdf

- D'HOOGHE, L.; (1965): "Theorie des valeurs extremes et la tarification de l'excess of loss" *Astin Bulletin*, Vol.III; Pt. 2; pp. 163-177.
- EMBRECHTS, P.; KLÜPPELBERG, C.; MIKOSCH, T.; (1997): *Modelling extremal events for Insurance and Finance*; Applications of Mathematics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- EMBRECHTS, P.; RESNICK, S.I.; SAMORODNITSKY, G.; (1999): "Extreme Value Theory as a Risk management Tool"; *North American Actuarial Journal*, Volume 3, N. 2; pp.30-41.
- FALK, M.; HÜSSLER, J.; REISS, R.-D.; (1994): *Laws of Small Numbers: Extremes and Rare Events*. DMV- Seminar Bd. 23 Birkhäuser, Basel.
- JUNG, J.; (1965): "On the use of extreme values to estimate the premium for an excess of loss reinsurance"; *Astin Bulletin*, Vol. III; Pt. II; pp. 178-184.
- KINNISON, R.P.; (1985): *Applied Extreme Value Statistics*; Macmillan Publishing Company. New York. Battelle Press, Columbus.
- KOTZ, S; NADARAJAH, S.; (2000): *Extreme Value Distributions: Theory and applications*; Imperial College Press, London
- MCNEIL, A.J.; (1997): "Estimating the tails of loss severity distributions using Extreme Value Theory"; *Astin Bulletin*, Vol.27, nº 1; pp. 117-137.
- MCNEIL, A.J.; SALADIN, T.; (1997): "The Peaks over Thresholds Method for Estimating High Quantiles of loss Distributions":
<http://www.math.ethz.ch/~mcneil/pub_list.html>
- PACTWA, T.; PRAKASH, A.; (2002): "Using Extreme Value Theory to Value Stock Market Returns"; *2nd Conference on Actuarial Science and Finance*, Samos.
- PATRIK, G.; GUIAHI, F. (1998): "An extremely important application of extreme value theory to Reinsurance Pricing":
<<http://www.casact.org/library/patrik.pdf>>
- REISS, R.D.; THOMAS, M.; (2001): *Statistical Analysis of Extreme Values (with applications to insurance, finance, hydrology and other fields)*; Birkhäuser Verlag, 2ª Edición.
- REISS, R.D.; THOMAS, M.; (2001): "Statistical analysis of extreme values"; *Documentación del paquete informático XTREMES*.

