

GRADUACIÓN DE LA MORTALIDAD EN ANDALUCÍA CON MODELOS DE MORTALIDAD CON HETEROGENEIDAD INOBSERVABLE

Antonio Fernández Morales¹
Profesor Titular de Universidad
Departamento de Economía Aplicada (Estadística y Econometría 68),
Universidad de Málaga

Abstract

The aim of this paper is to make use of generalized non-linear models to graduate mortality data from Andalucía allowing for unobserved heterogeneity. Two families of frailty models have been considered, Makeham-Gamma and Makeham-Inverse Gaussian. Both models give similar results, indicating a moderate level of heterogeneity in the investigated populations.

Key words Frailty, mortality, graduation, unobserved heterogeneity, generalized non-linear models.

Resumen

En este artículo se emplean los modelos generalizados no lineales para la graduación de los datos de mortalidad de Andalucía admitiendo la presencia de heterogeneidad no observable. Se han considerado dos familias de modelos: Makeham-Gamma y Makeham-Inversa Gaussiana. Ambos tipos de modelos ofrecen resultados similares, reflejando un nivel moderado de heterogeneidad en las poblaciones investigadas.

Palabras clave Frailty, mortalidad, graduación, heterogeneidad no observable, modelos no lineales generalizados.

¹ Departamento de Economía Aplicada (Estadística y Econometría 68) Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad de Málaga, C/ El Ejido, nº 6, 29071 Málaga. Email: afdez@uma.es

1. INTRODUCCIÓN

Los modelos de mortalidad que se utilizan habitualmente en el ámbito actuarial del seguro de vida tienen en cuenta la heterogeneidad de la población objetivo mediante la consideración de factores de riesgo observables, tales como el género, la edad o los hábitos relativos al tabaco, siendo poco frecuente contemplar fuentes de heterogeneidad no observables, como la propensión congénita a la supervivencia o a la enfermedad. Sin embargo, en el ámbito actuarial de la rama no vida es más frecuente el uso de modelos con efectos aleatorios no observables, como el modelo Poisson-Gamma para el número de siniestros.

Los motivos por los que la modelización en la rama vida no incluye habitualmente los factores de riesgo no observables son variadas. Olivieri (2006) señala en particular la dificultad inherente de la representación de factores que no pueden observarse, junto a la duración de largo plazo del contrato de seguro de vida, que requiere modelos multi-periodo y las tendencias a largo plazo de las tasas de mortalidad.

La representación de la heterogeneidad no observable puede realizarse mediante dos aproximaciones (Pitacco, 2004 a): un enfoque discreto o un enfoque continuo. Con el enfoque discreto, se plantean modelos de mortalidad como una mixtura discreta de términos aplicables a subpoblaciones homogéneas con distribuciones de probabilidad distintas y proporciones poblacionales que se actualizan con la edad (como el modelo de Keyfitz y Littman, 1979 o el modelo de Redington, 1969). Estos modelos son básicamente estáticos y están altamente parametrizados, por lo que el enfoque continuo iniciado por Vaupel *et al.* (1979) ha recibido más atención en el ámbito actuarial. Este enfoque continuo supone la caracterización de los factores de riesgo no observables mediante una variable aleatoria continua no negativa, denominada *frailty* (fragilidad) (o *longevity* en estudios más antiguos, Pitacco, 2004 a). La idea central de este enfoque consiste en que los individuos con mayor “fragilidad”, ya sea genética o adquirida (Yashin y otros, 1994) fallecen por término medio antes que los que tienen un menor valor de esta variable. Bajo este enfoque se pueden desarrollar diferentes modelos, algunos de los cuales tienen interesantes aplicaciones actuariales.

En el ámbito actuarial, Olivieri (2006) ha investigado como la no consideración de la heterogeneidad debida a factores no observables en una cartera de vida resulta en una subestimación de los pasivos tanto en valor esperado como en la cola derecha, ya que la distribución de la mortalidad en

una población heterogénea es distinta a la correspondiente a un grupo homogéneo, especialmente en las edades más avanzadas. Dicha subestimación afecta a la cartera en conjunto, por lo que resulta en un riesgo sistemático para el proveedor (Olivieri, 2006). Así mismo, Olivieri (2006) encuentra que la no consideración de la heterogeneidad no observable conlleva una subestimación de la provisión matemática y que la cantidad de capital extra requerido por carteras heterogéneas en las que no se considera la heterogeneidad revela un mayor riesgo que en una cartera homogénea.

Desde un punto de vista puramente demográfico, recientemente se viene observando que el perfil exponencial de las tasas de mortalidad respecto a la edad, habitualmente asumido en las edades más altas, parece no responder a la realidad actual en los países occidentales. Se observa una "deceleración" en las tasas de crecimiento de la mortalidad en dichas edades, Horiuchi y Wilmoth (1998), Zen Yi y Vaupel (2003). Es decir, la tasa de crecimiento exponencial en estas edades extremas no es constante, como ocurre con la ley de Gompertz, comúnmente aceptada en estudios anteriores, sino que decrece (Pitacco, 2004 b). Una de las posibles explicaciones de esta "deceleración" puede basarse en la hipótesis de la heterogeneidad no observable². Bajo esta hipótesis, la selección de los individuos con mayor "fragilidad" o "*frailty*", que fallecen con edades más jóvenes, conlleva que los supervivientes a las edades más altas tengan, por término medio, valores más reducidos de la variable que describe la *frailty* (Horiuchi y Wilmoth, 1998).

Por otro lado, la tendencia decreciente en el tiempo de la mortalidad observada en muchos países occidentales, más acentuada en las edades adultas y muy avanzadas, ha generado la necesidad de emplear modelos de mortalidad dinámicos que proyectan la mortalidad para su uso en contratos de larga duración, como pensiones o rentas. Autores como Olivieri (2006) o Pitacco (2004 b), indican que la mortalidad proyectada subestima con frecuencia la evolución observada, argumentando que una posible causa de dicha subestimación puede ser la no inclusión de la heterogeneidad en la modelización. Pitacco (2004 b) considera que la modelización con heterogeneidad no observable puede constituir una herramienta muy útil para los problemas detectados en las proyecciones de mortalidad en edades muy altas.

² Horiuchi y Wilmoth (1998) mencionan otra hipótesis que denominan de riesgo individual que también es compatible con la deceleración observada (aunque menos plausible según sus resultados empíricos). Esta hipótesis supone que el incremento del riesgo de mortalidad en las edades ancianas decelera por una o varias razones, que pueden ser biológicas, psicológicas e incluso evolutivas.

En este artículo se revisan los modelos de mortalidad con heterogeneidad no observable, siguiendo el enfoque continuo iniciado por Vaupel *et al.* (1979), en la sección 2. En la sección 3 se describen los métodos de estimación apropiados para dichos modelos y en la sección 4 se realiza una estimación de estos modelos para la población andaluza en 2004-2005. Finalmente, la sección 5 incluye las principales conclusiones obtenidas en este trabajo.

2. MODELOS DE MORTALIDAD CON HETEROGENEIDAD INOBSERVABLE

El modelo biométrico homogéneo usado tradicionalmente en el ámbito actuarial está basado, entre otras, en la hipótesis de homogeneidad en la mortalidad experimentada por todos los individuos del colectivo. Esta hipótesis simplificadora puede mantenerse dividiendo la población en subpoblaciones homogéneas, por ejemplo, población masculina y femenina, fumadores y no fumadores, y aplicando un modelo diferenciado a cada subpoblación. No obstante, este procedimiento elimina sólo muy parcialmente la heterogeneidad subyacente.

Las fuentes de heterogeneidad, o factores de riesgo observables, pueden incorporarse en los modelos de mortalidad a través de covariables. Pero hay otras fuentes de heterogeneidad que no admiten este tratamiento, porque no se dispone de información sobre ellas, o porque la información es insuficiente, o porque simplemente no pueden ser observadas. Los modelos de mortalidad que incluyen los riesgos derivados de estas fuentes no observables suelen denominarse modelos de mortalidad con heterogeneidad no observable.

El modelo más común en este ámbito es el modelo multiplicativo de Vaupel y otros (1979). En este modelo, se especifica una variable Z_x , denominada *frailty* (fragilidad), con función de densidad $f_x(z)$, que refleja la heterogeneidad de la población a la edad x , a través de la definición del tanto instantáneo de mortalidad a la edad x , para un individuo cuyo valor de Z_x es igual a z :

$$\mu(x | Z_x = z) = \mu_x(z) = z \cdot \mu_x. \quad (2.1)$$

En esta expresión, $\mu_x(z)$ representa el tanto instantáneo de mortalidad de un individuo de edad x y nivel de *frailty* z ; y μ_x es el tanto instantáneo de mortalidad estándar, correspondiente a un individuo “estándar”, cuyo valor de z (por convención) es igual a 1.

La variable Z se considera una variable aleatoria no observable no negativa, que recoge todos los factores (distintos de la edad) que afectan a la mortalidad de los miembros del colectivo. En esta versión del modelo, se asume, así mismo, que existe un valor único z asociado a cada individuo³. Los individuos con mayor valor de z tienen mayores probabilidades de muerte y es más probable que su fallecimiento ocurra antes que los individuos con menor valor de z .

La función de supervivencia, condicionada al nivel de z , se obtiene:

$$\begin{aligned} S(x | Z_x = z) &= \exp\left(-\int_0^x \mu(t | z) dt\right) = \exp\left(-\int_0^x z \cdot \mu_t dt\right) = \\ &= \exp(-zH_x) = \exp(-H(x | z)). \end{aligned} \quad (2.2)$$

En esta expresión, H_x , describe la función de riesgo acumulada “estándar”.

La función de densidad de la variable edad de muerte, condicionada a z se deriva de la definición del tanto instantáneo de mortalidad:

$$f(x | Z_x = z) = f(x | z) = \mu(x | z) \cdot S(x | z). \quad (2.3)$$

Por otro lado, la función de densidad conjunta de la edad de muerte y de Z tiene la forma:

$$\begin{aligned} f(x, z) &= f(x | z) \cdot f_0(z) = \mu(x | z) \cdot S(x | z) \cdot f_0(z), \\ f(x, z) &= \mu(x | z) \cdot S(x, z) \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde $f_0(z)$ es la función de densidad de z a la edad $x=0$ y $S(x, z)$ es la función de supervivencia conjunta dependiendo de la edad x y de z .

Para la cohorte con edad cumplida x , la función de densidad de la variable Z_x (condicionada a la supervivencia a la edad x) se obtiene como (Butt y Haberman, 2004):

³ Esto no quiere decir que los individuos con el mismo valor de z sean idénticos, sino simplemente que tienen la misma probabilidad de fallecimiento, Vaupel y otros (1979).

$$f_x(z) = \frac{\int_0^{\infty} f(t,z) dt}{\int_0^{\infty} S(x,z) dz} = \frac{\int_0^{\infty} f(t,z) dt}{\int_0^{\infty} S(x|z) f_0(z) dz} = \frac{\int_0^{\infty} f(t,z) dt}{\bar{S}(x)}, \quad (2.5)$$

donde $\bar{S}(x)$ representa la función de supervivencia de la cohorte a la edad x no condicionada a la variable Z .

Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} \int_x^{\infty} f(t,z) dt &= \int_x^{\infty} z \cdot \mu_t \cdot e^{-zH_t} f_0(z) dt = f_0(z) \int_x^{\infty} z \cdot H'_t \cdot e^{-zH_t} dt = \\ &= f_0(z) e^{-zH_x} = f_0(z) S(x|z), \end{aligned}$$

la función de densidad de Z_x se puede expresar como:

$$f_x(z) = \frac{f_0(z) S(x|z)}{\bar{S}(x)}. \quad (2.6)$$

La ecuación anterior nos muestra que la función de densidad de la variable Z_x viene dada por la función de densidad de Z_0 ajustada por el ratio $S(x|z)/\bar{S}(x)$, es decir por la proporción de supervivientes a la edad x con frailty igual a z respecto del total de supervivientes a dicha edad en toda la población (Olivieri, 2006).

Por otro lado, el tanto instantáneo de mortalidad de la población a la edad x (no condicionado) se obtiene como:

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(x) &= \frac{\int_0^{\infty} f(x,z) dz}{\bar{S}(x)} = \frac{\int_0^{\infty} \mu(x|z) S(x|z) f_0(z) dz}{\bar{S}(x)} = \mu_x \int_0^{\infty} z \cdot f_x(z) dz, \\ \bar{\mu}(x) &= \mu_x E(Z_x) = \mu_x \cdot \bar{z}_x, \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde \bar{z}_x es el valor esperado de la variable Z entre los supervivientes a la edad x . Por tanto, $\bar{\mu}(x)$ es la esperanza de $\mu(x|z)$ respecto a la función de densidad de z , $f_x(z)$ (Lancaster, 1990). Este resultado es considerado por

Vaupel y Yashin (1985) el teorema fundamental de los modelos con heterogeneidad, ya que relaciona la mortalidad del individuo “estándar” con la mortalidad de la población.

Generalmente, se toma la función de densidad marginal de z para la edad $x=0$ de tal forma que $\bar{z}_0 = 1$, de manera que en el momento del nacimiento el tanto instantáneo de mortalidad “estándar” es igual al tanto instantáneo de mortalidad de la población (no condicionado):

$$\bar{\mu}(0) = \mu_0. \quad (2.8)$$

Una de las implicaciones de mayor interés de este modelo consiste en que el valor esperado de la variable Z_x (\bar{z}_x) varía con la edad en sentido decreciente. La esperanza de Z_x se obtiene como:

$$\bar{z}_x = \frac{\int_0^{\infty} z f_0(z) \exp(-z H_x) dz}{\int_0^{\infty} f_0(z) \exp(-z H_x) dz}. \quad (2.9)$$

La derivada de \bar{z}_x respecto a x es de signo negativo (Lancaster, 1990):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \bar{z}_x &= \mu_x \left[- \frac{\int_0^{\infty} z^2 f_0(z) \exp(-z H_x) dz}{\int_0^{\infty} f_0(z) \exp(-z H_x) dz} + \left(\frac{\int_0^{\infty} z^2 f_0(z) \exp(-z H_x) dz}{\int_0^{\infty} f_0(z) \exp(-z H_x) dz} \right)^2 \right] = \\ &= \mu_x \left(- E(Z_x^2) + [E(Z_x)]^2 \right), \\ \frac{d}{dx} \bar{z}_x &= -\mu_x \sigma_x^2(z) < 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde $\sigma_x^2(z)$ representa la varianza condicionada de z entre la población que está viva con edad x . Esto significa que la media de Z_x disminuye con la edad, ya que los fallecimientos van eliminando de la población aquellos individuos con mayores valores de z . La principal implicación de esta característica es que el tanto instantáneo de mortalidad individual crece con la edad más rápidamente que el de una cohorte heterogénea (Vaupel y

Yashin, 1985) y por tanto la esperanza de vida de un individuo estándar será sobreestimada si no se tiene en cuenta el efecto de la heterogeneidad al estimarla en cohortes heterogéneas. En palabras de Vaupel *et al.* (1979), los estudios de mortalidad humana basados en datos de cohortes heterogéneas pueden estar sistemáticamente sesgados.

El modelo básico especificado más arriba consta de dos componentes: (i) un modelo que describe la relación entre μ_x y x , y (ii) un modelo que describe la distribución de probabilidad de Z_0 . La elección de estos dos componentes determina las principales características del modelo, siendo las más habituales los modelos de Gompertz y Makeham para (i) y las distribuciones de probabilidad Gamma e Inversa Gaussiana para (ii) (Hougaard, 1984, Butt y Haberman, 2004, Olivieri, 2006).

(i) Modelos de Gompertz y Makeham y para describir la función μ_x :

El modelo de Gompertz especifica el tanto instantáneo de mortalidad estándar con la función

$$\mu_x = \mu(x, Z = 1) = \beta e^{px}. \quad (2.11)$$

La función de riesgo acumulada correspondiente a esta especificación tiene, por tanto, la forma

$$H_x = \int_0^x \mu_t dt = \int_0^x \beta e^{pt} dt = \frac{\beta}{p} (e^{px} - 1). \quad (2.12)$$

Para emplear el modelo de Makeham (generalización del modelo de Gompertz, que se considera caso particular cuando $\alpha=0$), se especifica el tanto instantáneo de mortalidad condicionado, de acuerdo a la siguiente función, que difiere ligeramente de la especificación inicial de $\mu_x(z)$, en (2.1):

$$\mu_x(z) = \alpha + z \beta e^{px}. \quad (2.13)$$

La función de riesgo acumulada condicionada a z es igual, según esta especificación a

$$H(x | z) = \int_0^x \mu(t | z) dt = \int_0^x \alpha + z \beta e^{px} dt = \alpha x + z \frac{\beta}{p} (e^{px} - 1).$$

El tanto instantáneo de mortalidad para la cohorte de edad x es ahora

$$\bar{\mu}(x) = \int_0^{\infty} \mu(x|z) f_x(z) dz = \int_0^{\infty} (\alpha + z\beta e^{px}) f_x(z) dt = \alpha + \bar{z}_x \beta e^{px}. \quad (2.14)$$

Con ambos modelos, la función de densidad de Z_x (y por tanto su esperanza) es idéntica (Butt y Habermann, 2004).

ii) Distribuciones Gamma e Inversa Gaussiana para describir la distribución de probabilidad de Z_x :

Para describir la distribución de probabilidad de Z_x se ha propuesto un conjunto variado de modelos. Hougaard (1984) generalizó los resultados de Vaupel *et al.* (1979) a un grupo de distribuciones de la familia exponencial no negativa que incluye las distribuciones Gamma, Poisson, Inversa Gaussiana, normal truncada y χ^2 no central, entre las cuales son la distribución Gamma y la Inversa Gaussiana las más habituales. Este autor demostró que si la distribución de la variable Z_0 pertenece a la familia exponencial no negativa con z como estadístico canónico,

$$f_0(z) = P(\delta, \theta) = \frac{m(z)z^{\delta}}{\varphi(\delta, \theta)} e^{-\theta z}. \quad (2.15)$$

Entonces, la distribución de Z_x pertenece a la misma familia pero con parámetros modificados $P(\delta\theta+H_x)$.

Por tanto, si se describe la función de densidad de Z_0 con un modelo Gamma,

$$f_0(z) = \frac{\theta^{\delta} z^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)} e^{-\theta z}, \quad (2.16)$$

la distribución de la variable Z_x , la fragilidad entre los supervivientes a la edad x se obtiene como

$$f_x(z) = \frac{(\theta + H_x)^{\delta} z^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)} e^{-z(\theta+H_x)}. \quad (2.17)$$

Y el valor esperado de las variables Z_0 y Z_x es, respectivamente,

$$\bar{z}_0 = \frac{\delta}{\theta}, \quad \bar{z}_x = \frac{\delta}{\theta + H_x}. \quad (2.18)$$

El parámetro de forma de la distribución Gamma, δ , tiene una interpretación clara como indicador de la extensión de la heterogeneidad, ya que la variable Z_0 tiene coeficiente de variación igual a $1/\sqrt{\delta}$. Así, cuando $\delta \rightarrow 0$, el coeficiente de variación de la variable que describe la heterogeneidad se anula y los tantos instantáneos de mortalidad de la población e individuales se igualan. Y cuanto menor sea el valor de δ , más importante será la heterogeneidad en la población.

Además, se puede incorporar esta relación en la ecuación que liga el tanto instantáneo de mortalidad de la población con la función de riesgo individual del modelo de Gompertz, obteniendo:

$$\bar{\mu}(x) = \bar{z}_x \mu_x = \frac{\delta}{\theta + H_x} \mu_x = \frac{\delta \beta e^{px}}{\theta + \frac{\beta}{p}(e^{px} - 1)}. \quad (2.19)$$

Por otro lado, si se emplea la especificación correspondiente al modelo de Makeham, se obtendría

$$\bar{\mu}(x) = \alpha + \bar{z}_x \beta e^{px} = \alpha + \frac{\delta}{\theta + H_x} \beta e^{px} = \alpha + \frac{\delta p \beta e^{px}}{(\theta p - \beta) + \beta e^{px}}. \quad (2.20)$$

Si la distribución probabilística de Z_0 se describe mediante una distribución Inversa Gaussiana, la función de densidad de esta variable se puede escribir como

$$f_0(z) = \left(\frac{\psi}{\pi z^3} \right)^{\frac{1}{2}} e^{(4\psi\theta)^{\frac{1}{2}}} e^{-\theta z - \frac{\psi}{z}}. \quad (2.21)$$

Por tanto, según los resultados obtenidos por Hougaard (1984), la densidad de la variable Z_x , la fragilidad entre los supervivientes a la edad x , se obtiene como

$$f_x(z) = \left(\frac{\psi}{\pi z^3} \right)^{\frac{1}{2}} e^{[4\psi(\theta + H_x)]^{\frac{1}{2}}} e^{-(\theta + H_x)z - \frac{\psi}{z}}. \quad (2.22)$$

De aquí que las medias de las variables Z_0 y Z_x son, respectivamente,

$$\bar{z}_0 = \left(\frac{\psi}{\theta}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \bar{z}_x = \left(\frac{\psi}{\theta + H_x}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.23)$$

Emplear la distribución Inversa Gaussiana implica que el coeficiente de variación de la variable Z_x es igual a $2^{-1/2}[\psi(\theta + H_x)]^{1/4}$, que no es constante respecto a la edad. Esta característica es netamente diferencial respecto al uso del modelo Gamma para representar la distribución probabilística de Z_x . Mientras que en el caso del modelo Gamma la heterogeneidad de la población mantiene constante la dispersión relativa, el caso de la Inversa Gaussiana redonda en un modelo con heterogeneidad de dispersión decreciente con la edad, es decir, una población más homogénea a medida que crece x . A pesar de que Hougaard (1984) considera la dispersión decreciente más apropiada para este tipo de modelos, como un efecto de la selección progresiva, hay autores como Manton y Stallard (1984) para los que una dispersión constante es adecuada, justificándolo en la oposición entre el efecto de la selección frente al efecto de la difusión en procesos estocásticos.

Combinando el modelo Makeham para el tanto instantáneo de mortalidad con la distribución Inversa Gaussiana inversa para Z_x , de manera análoga a como se ha realizado para la distribución Gamma, se llega a la expresión siguiente para $\bar{\mu}(x)$ correspondiente al modelo de Makeham (la expresión del modelo de Gompertz se obtiene para el caso particular $\alpha=0$):

$$\bar{\mu}(x) = \alpha + \left(\frac{\psi p \beta^2}{(\theta p - \beta) + \beta e^{px}}\right)^{\frac{1}{2}} e^{px}. \quad (2.24)$$

Para concluir este epígrafe, debemos señalar que la expresión de $\bar{\mu}(x)$ derivada del modelo multiplicativo con heterogeneidad no observada Gamma y tanto de mortalidad individual Makeham coincide con uno de los miembros de la familia de curvas propuesta por Perks (1932) para la graduación de la mortalidad, posteriormente empleada en la graduación de las tablas británicas E.L.T. 11 y 12 (Benjamin y Pollard, 1970). Por este motivo, Pitacco (2004 a) considera los modelos de Perks como el antecedente actuarial de la modelización de la heterogeneidad no observable de la mortalidad.

3. MÉTODOS DE ESTIMACIÓN

La estimación de modelos matemáticos para la graduación de la mortalidad presenta ciertas dificultades técnicas conocidas en la literatura (Forfar y otros, 1988, Renshaw, 1995, entre otros). El método de estimación de los mínimos cuadrados no lineales, muy usado en este ámbito presenta el problema de la exigencia de varianzas constantes y distribución normal de los errores, las cuales no se cumplen de forma exacta en la graduación del tanto instantáneo de mortalidad o del número de fallecimientos, por lo que se suele acudir a ponderaciones, generalmente con el inverso de la varianzas.

Dado que en la modelización del número de fallecimientos, se puede asumir una distribución esperada de los errores de Poisson, diversos autores (Renshaw 1991, 1995 y Haberman y Renshaw 1996) proponen el uso de modelos lineales generalizados (GLM) para la estimación y ajuste de modelos en el campo de la graduación actuarial de la mortalidad.

Los modelos lineales generalizados explican el vector de respuestas $y=(y_i)$, $i=1,2,\dots,n$, tratado como una muestra aleatoria de la variable aleatoria independiente o respuesta \mathbf{Y} , con una estructura sistemática definida a través del vector de medias $\mathbf{m}=E(\mathbf{Y})$. Éste último es explicado a su vez por un conjunto de variables predictoras \mathbf{x}_j , $j=1,2,\dots,p$, a través de una combinación lineal, denominada predictor lineal, $\boldsymbol{\eta}=\sum_j \mathbf{x}_j \beta_j$. La relación entre \mathbf{m} y $\boldsymbol{\eta}$ puede ser cualquier función monótona g continua y diferenciable, denominada *link*, $g(\mathbf{m})=\boldsymbol{\eta}$ o $\mathbf{m}=g^{-1}(\boldsymbol{\eta})$. La principal diferencia con el método clásico de la regresión consiste en que la distribución normal se generaliza a una serie más amplia de modelos de la clase exponencial, haciendo depender la varianzas de la media de la variable respuesta (no necesariamente constante) mediante una relación conocida a priori.

Por tanto, se asume que la variable respuesta observada es una muestra aleatoria de \mathbf{Y} con densidad

$$f_{\mathbf{Y}}(y, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varphi}) = \exp\left(\frac{y\boldsymbol{\theta} - b(\boldsymbol{\theta})}{k(\boldsymbol{\varphi})} + c(y, \boldsymbol{\varphi})\right), \quad (3.1)$$

donde las funciones k , b y c definen la estructura del modelo. Para un parámetro $\boldsymbol{\varphi}$ conocido, la expresión anterior define la familia exponencial con parámetro canónico $\boldsymbol{\theta}$. La media y la varianzas de \mathbf{Y} vienen dadas por $E(\mathbf{Y})=b'(\boldsymbol{\theta})$ y $\text{Var}(\mathbf{Y})=k(\boldsymbol{\varphi})b''(\boldsymbol{\theta})$.

Se puede obtener un modelo GLM óptimo para la función *link* denominada *link* canónico que verifica la condición $g(\mathbf{m}) = \boldsymbol{\theta}$. Por ejemplo, las funciones *link* identidad y logarítmica son canónicas para la distribución normal y Poisson, respectivamente.

La estimación de los parámetros definidos en $\boldsymbol{\eta}$ se realiza maximizando el logaritmo neperiano de la función de verosimilitud. Y la medida habitual del grado de ajuste es la *deviance* (escalada), que consiste en dos veces la diferencia entre el logaritmo neperiano de la función de verosimilitud del modelo saturado y el modelo ajustado.

$$D^*(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{m}}) = 2 \left\{ l(\mathbf{y}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \varphi) - l(\mathbf{y}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \varphi) \right\} \\ = 2 \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\frac{y_i \tilde{\theta}_i - b(\tilde{\theta}_i)}{k_i(\varphi)} + c(y_i, \varphi) \right] - \sum_{i=1}^n \left[\frac{y_i \hat{\theta}_i - b(\hat{\theta}_i)}{k_i(\varphi)} + c(y_i, \varphi) \right] \right\}, \quad (3.2)$$

donde el parámetro canónico correspondiente al modelo saturado y al modelo ajustado son, respectivamente, $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}(\mathbf{y})$ y $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}(\hat{\mathbf{m}})$.

La estimación del modelo que describe al tanto instantáneo de mortalidad se realiza habitualmente aplicando la metodología descrita al número observado de fallecimientos, A_x , procedentes de una exposición central al riesgo r_x . Se considera que las variables A_x son variables aleatorias de Poisson con esperanzas iguales a $r_x \cdot \mu_x$ (Forfar y otros, 1988). Por tanto, la estructura del modelo para una variable respuesta $\mathbf{Y} \sim P(\mathbf{m})$ en cada intervalo de edad considerado, con densidad

$$f_{\mathbf{Y}}(y, \boldsymbol{\theta}, \varphi) = \exp(y \cdot Ln(m) - m - Ln(y!)),$$

tiene las características siguientes

$$E(\mathbf{Y}) = \mathbf{m}, \text{Var}(\mathbf{Y}) = k(\varphi)\mathbf{m}, \\ \boldsymbol{\theta} = Ln(\mathbf{m}), b(\boldsymbol{\theta}) = \exp(\boldsymbol{\theta}),$$

de donde obtenemos que el *link* canónico es $g(\mathbf{m}) = \boldsymbol{\theta} = Ln(\mathbf{m})$.

Dado que la metodología de los GLM especifica un predictor lineal para el *link* de m_i , sólo los modelos matemáticos para μ_x lineales en los parámetros, o linealizables mediante logaritmos, permiten la aplicación directa de la

metodología de los GLM, como es el caso de los modelos $GM_x(0,s)$ de Forfar y otros (1988), de los que el modelo de Gompertz es un caso particular. Si la especificación matemática de μ_x no es lineal o linealizable, se la denomina generalmente modelo no lineal generalizado, GNM, y se hace necesario aplicar técnicas aptas para predictores no lineales.

Los modelos no lineales generalizados, GNM, por tanto, se pueden considerar una extensión de los modelos lineales generalizados en la cual algunos términos del predictor son no lineales en los parámetros, o también como una extensión de los modelos de regresión no lineales en los cuales la varianza de la respuestas puede ser dependiente de la media.

Para estimar este tipo de modelos GNM, en el ámbito de la graduación actuarial de la mortalidad en modelos con heterogeneidad no observable, Butt y Haberman (2004) emplean dos técnicas alternativas, por un lado usan una expansión de Taylor para aproximar la parte no lineal del predictor y por otro desarrollan una función *link* “parametrizada”, que genera un perfil de la *deviance*, que minimizan para obtener el óptimo, pero esta segunda técnica impide la estimación del error estándar para el parámetro de la función *link*.

En este trabajo hemos optado por aplicar las rutinas desarrolladas recientemente por Turner y Firth en la Universidad de Warwick para el software estadístico R. Estas rutinas, agrupadas bajo la denominación *gnm* para R, están basadas en un algoritmo de ajuste que puede trabajar incluso con representaciones sobreparametrizadas de modelos. Los parámetros de los modelos se estiman mediante un algoritmo basado en mínimos cuadrados ponderados iterativos, usando la pseudo inversa de Moore-Penrose para tratar las matrices de diseño con problemas de rango (Turner y Firth, 2007). Por defecto, *gnm* aplica sólo restricciones de identificabilidad mínimas.

La estimación que se realiza en este trabajo corresponde al modelo de Makeham para el tanto instantáneo de mortalidad estándar, con los modelos Gamma e Inversa Gaussiana para la distribución de la variable Z_x . Es conveniente estandarizar las expresiones básicas obtenidas en el epígrafe anterior, estableciendo que $z_0 = 1$, lo cual implica que $\delta = \theta$ y $\psi = \theta$, respectivamente. Además, reparametrizamos las expresiones anteriores como sigue, obteniéndose para las distribuciones Gamma e Inversa Gaussiana de Z_x , respectivamente:

$$\bar{\mu}(x) = \alpha + \frac{a}{1 + e^{b-px}}, \quad \bar{\mu}(x) = \alpha + \frac{e^{-d+px}}{\sqrt{1 + e^{-c+px}}}, \quad (3.3)$$

donde

$$\beta = \frac{a}{1+e^b}, \quad \theta = \frac{a}{p}, \quad (3.4)$$

en el caso de seleccionar el modelo Gamma para la distribución de Z_x y:

$$\beta = \frac{e^{-d}}{\sqrt{1+e^{-c}}}, \quad \theta = \frac{e^{-d}}{e^{-c}} \frac{\sqrt{1+e^{-b}}}{p}. \quad (3.5)$$

en caso de seleccionar la distribución Inversa Gaussiana. En ambos casos resulta, tal y como se ha asumido, que $\beta = \mu_0 = \mu(0)$.

4. RESULTADOS

En esta sección se presentan los resultados del ajuste de los modelos de mortalidad con heterogeneidad no observable descritos en la sección 3 a la población andaluza masculina y femenina para los años 2004 y 2005. Los tantos instantáneos de mortalidad brutos, para el rango de edades 20-99 se han estimado con la información demográfica del I.N.E.

Los estimadores de los tantos instantáneos de mortalidad brutos se han obtenido, asumiendo la distribución uniforme de los fallecimientos durante el año, según la expresión habitual, usada en otros trabajos como Debón y otros (2005) o Escuder y otros (2008),

$$\hat{\mu}_x = \frac{D_{x,t-1} + D_{x,t}}{\frac{1}{2}P_{x,t-1} + P_{x,t} + \frac{1}{2}P_{x,t+1}}, \quad (4.1)$$

donde $D_{x,t}$ es el número de fallecimientos con edad cumplida x ente 1 de enero del año t y 1 de enero del año $t+1$, y $P_{x,t}$ es la población con edad cumplida x a 1 de enero del año t .

Los parámetros estimados de los modelos Makeham-Gamma (M-G) y Makeham-Inversa Gaussiana (M-IG) se muestran en la tabla 1, para las poblaciones masculina y femenina, junto con los errores estándar de las estimaciones. En dicha tabla se han incluido, en primer lugar las estimaciones de los parámetros α , a , b y p del modelo M-G y de los

parámetros α , c , d y p del modelo M-IG, obtenidas mediante el método de los modelos no lineales generalizados descrito en la sección 3. En segundo lugar, se han obtenido los valores de los parámetros β y δ resultantes de las estimaciones anteriores.

Tabla 1. Parámetros estimados de los modelos Makeham-Gamma (M-G) y Makeham-Inversa Gaussiana (M-IG)

	Población masculina		Población femenina	
	M-G	M-IG	M-G	M-IG
α	$4,838 \cdot 10^{-4}$ ($2,589 \cdot 10^{-5}$)	$4,819 \cdot 10^{-4}$ ($2,628 \cdot 10^{-5}$)	$3,283 \cdot 10^{-4}$ ($1,321 \cdot 10^{-5}$)	$3,250 \cdot 10^{-4}$ ($1,33 \cdot 10^{-5}$)
a	2,527 (0,6367)	-	2,352 (0,4351)	-
b	11,60 (0,2145)	-	14,17 (0,1421)	-
c	-	10,88 (0,2515)	-	13,48 (0,184)
d	-	10,67 (0,05397)	-	13,28 (0,06558)
p	0,1019 ($7,625 \cdot 10^{-4}$)	0,1088 ($8,052 \cdot 10^{-4}$)	0,1288 ($8,474 \cdot 10^{-4}$)	0,1285 ($8,933 \cdot 10^{-4}$)
β	$2,316 \cdot 10^{-5}$	$2,323 \cdot 10^{-5}$	$1,650 \cdot 10^{-6}$	$1,708 \cdot 10^{-6}$
θ	24,79	12,12	18,26	9,51

Nota: Entre paréntesis errores estándar.

Los resultados obtenidos revelan que, tanto en el caso de la población masculina como en el de la población femenina, la elección de la distribución Gamma o la Inversa Gaussiana para representar la distribución de probabilidad de la variable Z_x no afecta seriamente a los resultados obtenidos en cuanto a la parte del modelo que representa el tanto instantáneo de mortalidad estándar, un modelo de Makeham en nuestro caso. Esto se refleja en estimaciones muy parecidas de los parámetros α , β y p en los dos modelos para la población masculina y en los dos modelos estimados para la población femenina.

Los valores obtenidos del parámetro de perfil de la distribución Gamma que describe la distribución de la variable Z_x son algo superiores a los obtenidos por Butt y Haberman (2004) con datos de asegurados y rentistas del C.M.I. Bureau, los cuales estiman modelos Gompertz-Gamma, Makeham-Gamma y Gompertz-Inversa Gaussiana. Por otra parte, la estimación realizada por

Damaskos (1988) con información de las tablas E.L.T. (usando una especificación Gompertz-Gamma) resulta en valores del parámetro de perfil de la gamma más cercanos a los obtenidos en este trabajo, llegando a alcanzar el valor 27,7 para la población femenina 30-90 con la E.L.T. 14.

El grado de heterogeneidad no observable obtenido en las estimaciones en este trabajo es, por tanto, inferior al encontrado por Butt y Haberman (2004). En nuestro caso, los coeficientes de variación de la distribución de la variable Z_x estimados con el modelo M-G son 0,201 y 0,204, respectivamente para la población masculina y femenina, siendo los estimados por Butt y Haberman (2004) superiores, aunque todos ellos menores que 0,45.

Las medidas del grado de ajuste obtenido en las estimaciones se muestran en la tabla 2. En la tabla se han incluido las medidas habituales en la graduación paramétrica (Forfar y otros, 1988): el número de desviaciones relativas absolutas mayores que 2 (DRA>2) y mayores que 3 (DRA>3), los estadísticos de signos y rachas, los coeficientes de autocorrelación serial de orden 1, 2 y 3 (R_1 , R_2 y R_3), el estadístico χ^2 , el test de Kolmogorov-Smirnov de dos muestras (KS).

Tabla 2. Estadísticos de ajuste de los modelos estimados: Makeham (M), Makeham-Gamma (M-G) y Makeham-Inversa Gaussiana (M-IG).

	Población masculina			Población femenina		
	M	M-G	M-IG	M	M-G	M-IG
DRA>2	16	14	14	44	44	43
DRA>3	4	2	3	19	17	15
Test signos	35 (0,079)	37 (0,144)	40 (0,272)	39 (0,23)	39 (0,28)	39 (0,28)
Test rachas	24 (4,5 10 ⁻⁵)	28 (0,001)	22 (4,76 10 ⁻⁵)	15 (1,24 10 ⁻⁹)	11 (3,7 10 ⁻¹²)	11 (3,7 10 ⁻¹²)
R_1	0,454 (1,35 10 ⁻⁵)	0,4116 (6,34 10 ⁻⁵)	0,4143 (5,78 10 ⁻⁵)	0,81 (1,9 10 ⁻¹³)	0,797 (3,4 10 ⁻¹³)	0,800 (2,9 10 ⁻¹³)
R_2	0,435 (3,08 10 ⁻⁵)	0,4015 (9,79 10 ⁻⁵)	0,4065 (9,16 10 ⁻⁵)	0,79 (7,3 10 ⁻¹³)	0,791 (7,2 10 ⁻¹³)	0,793 (6,1 10 ⁻¹³)
R_3	0,246 (0,008)	0,2192 (0,0136)	0,220 (0,0134)	0,68 (4,8 10 ⁻¹⁰)	0,694 (2,8 10 ⁻¹⁰)	0,699 (2,2 10 ⁻¹⁰)
χ^2	179,24	163,39	164,18	528,17	505,96	506,27
Deviance	181,18	164,77	164,18	530,12	501,22	504,71
KS	0,008	0,007	0,0077	0,0159	0,0143	0,0142

Nota: Entre paréntesis *p-values*.

En general se observa un grado de ajuste notablemente superior en el caso de la población masculina respecto a la población femenina. Esto se debe, en parte a que, como se observa en las figuras 1 y 2, el perfil (en escala logarítmica) de la evolución del tanto instantáneo de mortalidad bruto con la edad en el caso femenino presenta una prominencia entre los 30 y los 50 años (menos acusada en el caso de la población masculina), que no puede ser “captada” por modelos como los usados en este trabajo⁴.

La presencia de esta mortalidad superpuesta en el tramo de edades mencionado, teniendo en cuenta que el modelo de μ_x que describe la mortalidad estándar no incorpora una componente específica para este fenómeno, es la causante de la significatividad de los tests de autocorrelación serial y de rachas.

En la tabla 2 se ha incluido, adicionalmente, los estadísticos de ajuste de un modelo de Makeham sin heterogeneidad (M), cuyos parámetros han sido estimados con el mismo procedimiento que los modelos que sí la incorporan, Makeham-Gamma (M-G) y Makeham-Inversa Gaussiana (M-IG), de los que se puede considerar como un caso particular. Se puede constatar que al añadir la heterogeneidad, se produce un incremento significativo del grado de bondad del ajuste, medido con la *deviance*, tanto en la población masculina como en la población femenina.

Por último, para interpretar correctamente los resultados, es necesario recordar que existe un problema de identificación en este tipo de modelos. La distribución de la variable Z no es identificable, dado que se define como un componente individual y sólo sería identificable si fuera común para grupos de individuos (Hougaard, 1984). Es decir, diferentes modelos de mortalidad y diferentes distribuciones de la variable que representa la *frailty* podrían producir el mismo patrón observado de mortalidad (Hoem, 1990).

⁴ Para captar la mortalidad superpuesta al perfil general en los tramos de edad juveniles y adultos atribuibles principalmente, aunque no exclusivamente, a los accidentes de tráfico que viene denominándose “*accident hump*” en la literatura anglosajona se suele añadir al modelo un componente aditivo que incrementa notablemente el número de parámetros del modelo. El modelo de Heligman y Pollard (1980) y sus derivados se cuentan entre los más usados en este campo.

Figura 1. Ajustes de los modelos M-G (a) y M-IG (b) a la población masculina.

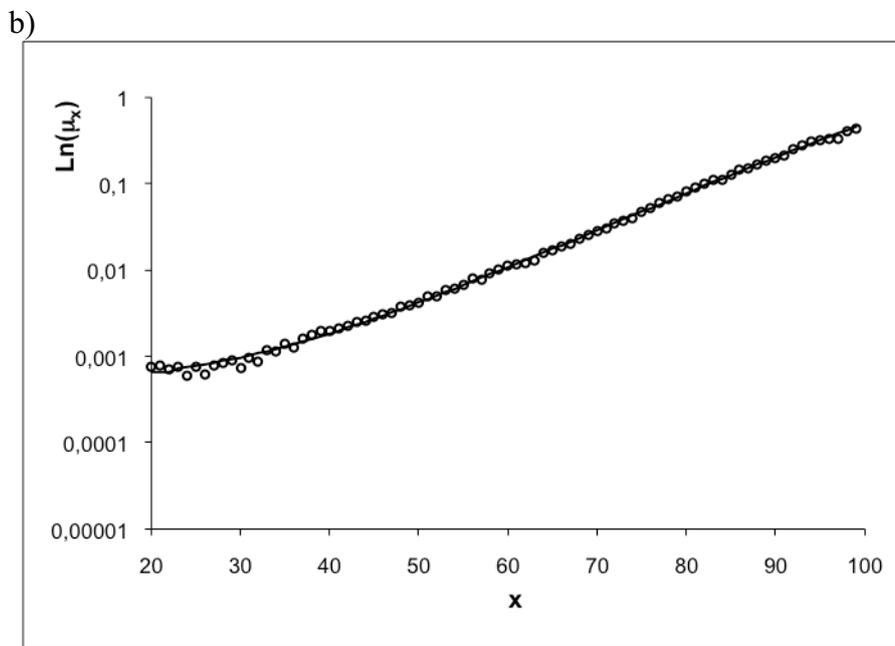
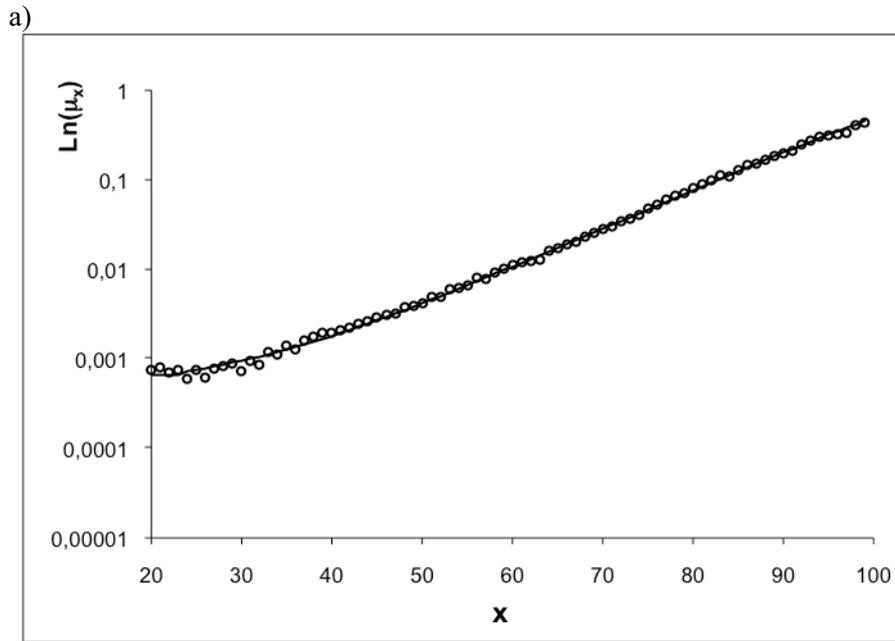
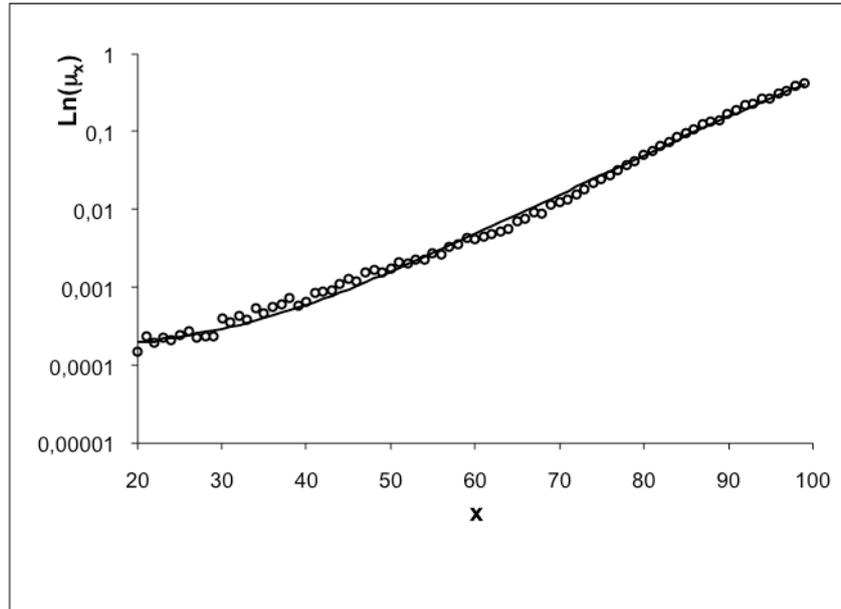
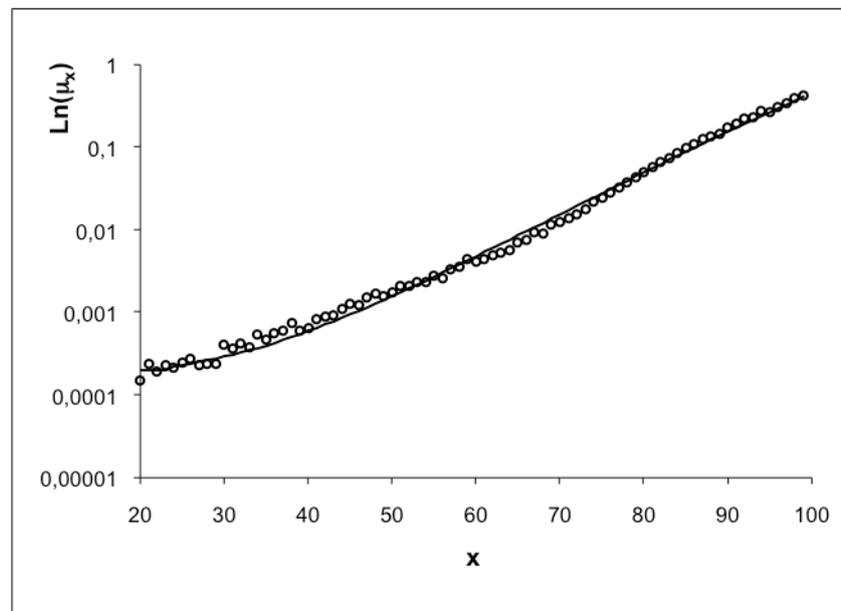


Figura 2. Ajustes de los modelos M-G (a) y M-IG (b) a la población femenina.

a)



b)



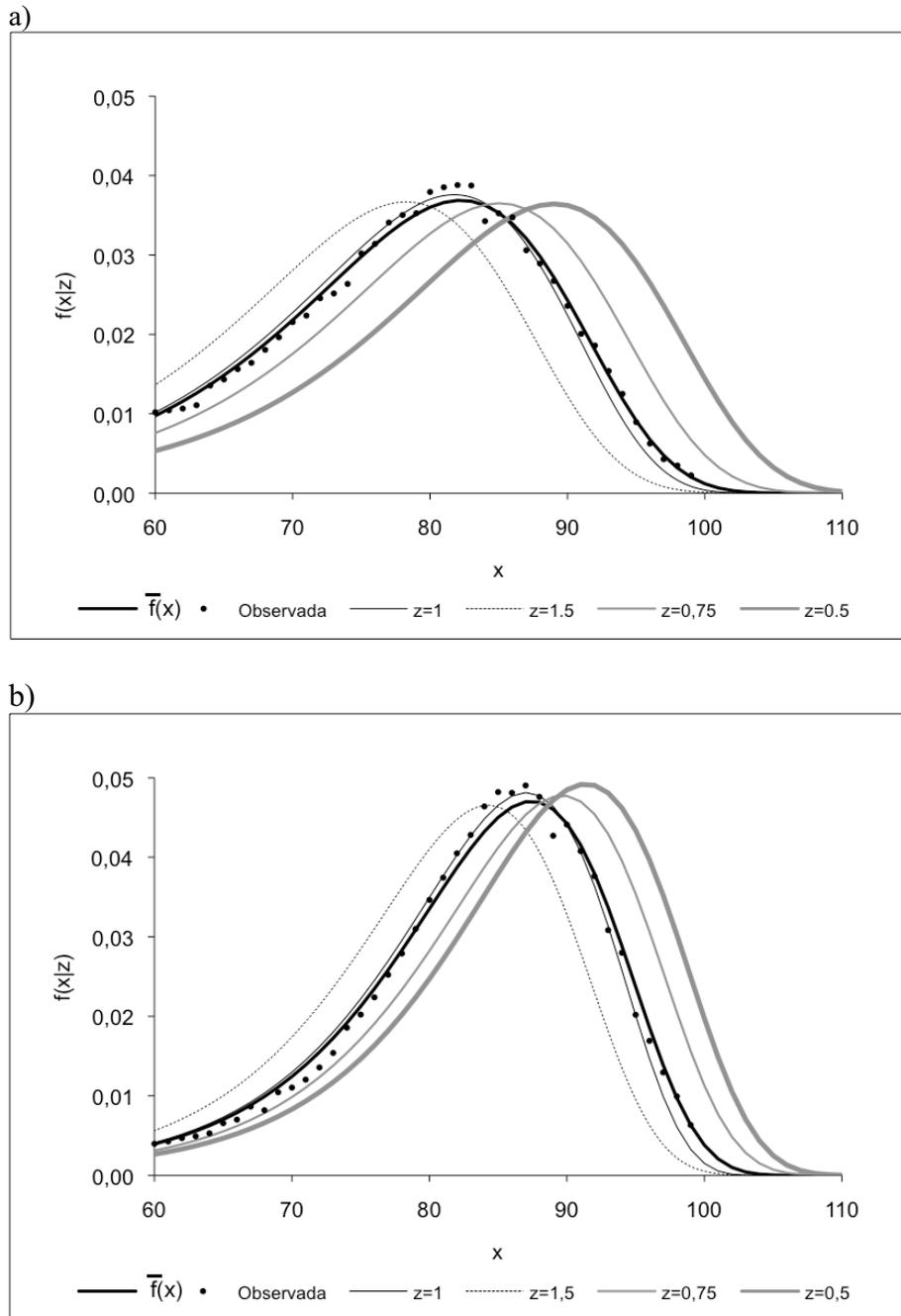
Dada la importancia que desde el punto de vista actuarial tiene la distribución de la variable que representa la heterogeneidad, sobre todo teniendo en cuenta su influencia sobre la distribución de probabilidad de la edad de muerte individual, se ha representado en la figura 3 la función de densidad de x condicionada a varios valores de z (0,5; 0,75; 1 y 1,5) estimada para las poblaciones masculina y femenina a partir de los 60 años. En estos dos gráficos se ha incluido también, con fines comparativos, los valores observados con una línea de puntos. Respecto a las densidades estimadas según el valor de z , las funciones correspondientes a individuos de mayor valor de z muestran una mortalidad superior a aquellos con un valor de z menor, con unas diferencias de una magnitud considerable, tanto en la población masculina como en la población femenina.

En todos los casos, las curvas de la población femenina presentan un perfil con valor modal claramente superior a su correspondiente en el caso de la población masculina, denotando una mayor “expansión” de la mortalidad en edades avanzadas en la población femenina.

La función estimada para $z=1$ corresponde a la mortalidad de un individuo estándar, que al ser comparada con la función promedio $\bar{f}(x)$ (no condicionada a z), refleja una mortalidad mayor. Esta diferencia es causada por el efecto de selección, que provoca que los individuos que poseen un valor de z mayor tienden a morir con edades más tempranas, manteniéndose en la cohorte individuos con una mortalidad individual progresivamente menor. Sin embargo, la diferencia entre ambas funciones no es de una gran magnitud. Ello se debe a que el grado de heterogeneidad estimado no es muy elevado.

Las estimaciones obtenidas del grado de heterogeneidad no observable están en consonancia con la desviación de la mortalidad observada respecto a la generada por los modelos Gompertz-Makeham en las edades más altas del rango de datos (20, 99). El tanto instantáneo de mortalidad correspondiente a un modelo Makeham se hace lineal en su logaritmo para las últimas edades, en tanto que un modelo con heterogeneidad no observable predice una desviación de dicho comportamiento lineal, debido al efecto de la selección. En los gráficos de las figuras 1 y 2 se puede contemplar que dicha desviación, aún estando presente no es de una gran magnitud. Para analizar con más detalle este fenómeno, se estimará la LAR (*life-table aging rate*) observada para compararla con la generada con los modelos estimados.

Figura 3. Función de densidad $f(x|z)$ estimada para diversos valores de z de la población masculina (a) y femenina (b).



La heterogeneidad no observable se ha propuesto como una de las causas de la deceleración de la mortalidad en las edades más elevadas, como se señaló en la introducción. Una técnica habitual para la comprobación de la presencia e intensidad de esta deceleración consiste en la comparación de la LAR observada con la generada por un modelo Gompertz, que tiene un perfil horizontal (Horiuchi y Wilmoth, 1998). En el caso de aplicar un modelo con heterogeneidad no observable la LAR presenta un perfil decreciente en las últimas edades.

La LAR se define como el incremento relativo de la intensidad de la mortalidad con la edad. Tal y como la definen Hioruchi y Coale (1990), que la denotan como $k(x)$, la LAR es

$$k(x) = \frac{dLn(\mu(x))}{dx}. \quad (4.1)$$

Un crecimiento de la LAR con la edad indica una aceleración de la mortalidad con la edad, mientras que un decrecimiento de la LAR implica una deceleración de la mortalidad. Así, la LAR es una medida muy útil para cuantificar con precisión la extensión e intensidad de la deceleración de la mortalidad en edades altas (Horiuchi y Wilmoth, 1998). La edad a partir de la cual se produce esta deceleración es una cuestión de gran interés en las investigaciones demográficas actuales. En el modelo de Makeham con heterogeneidad no observable distribuida según un modelo Gamma, para la parametrización de (3.3) la LAR es igual a

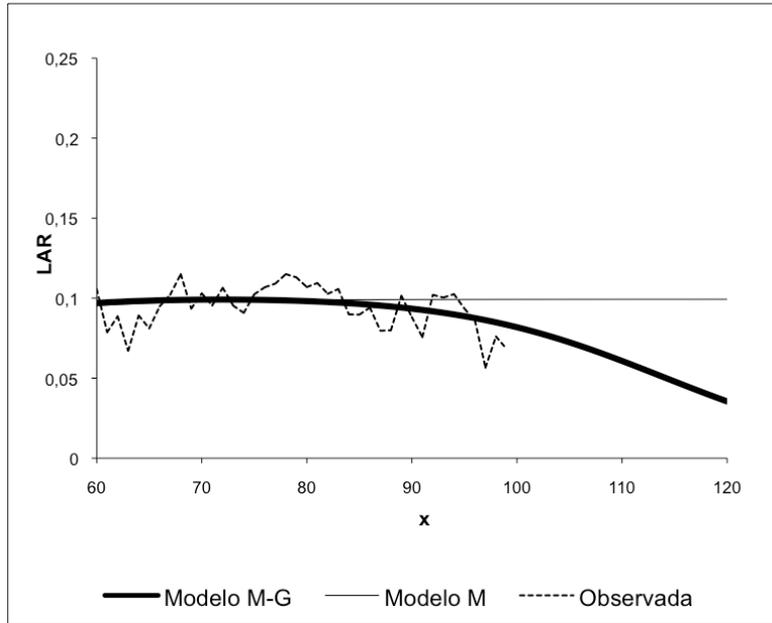
$$k(x) = \frac{ap}{a + \alpha(1 + e^{-b-px})}. \quad (4.2)$$

En la figura 4 se muestra para las poblaciones masculina y femenina la LAR observada (suavizada con una media móvil) y la que genera el modelo (4.2). Además, se muestra la LAR correspondiente al modelo Makeham sin heterogeneidad observada, que se aproxima al perfil horizontal del modelo de Gompertz con la edad.

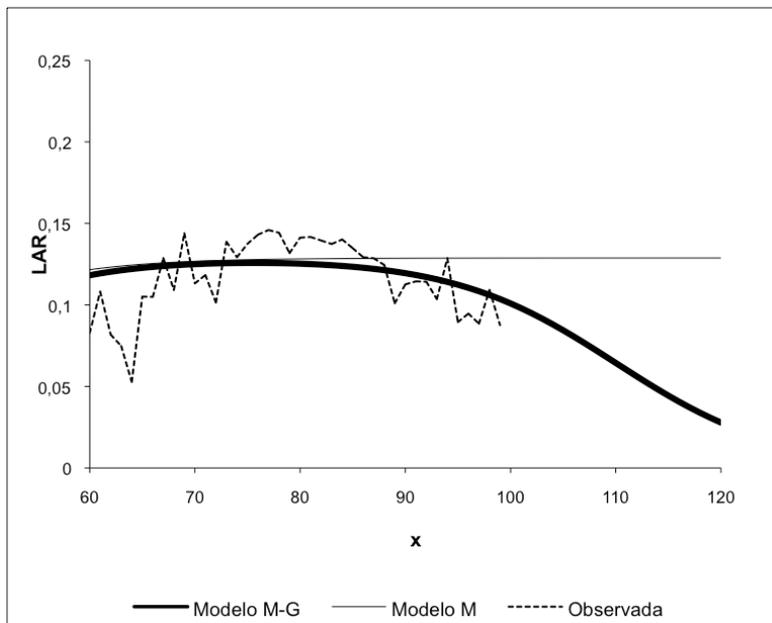
En dichos gráficos se puede constatar que la desviación de la LAR observada respecto al perfil horizontal está presente en ambas poblaciones, aunque con una magnitud no muy elevada, lo cual es coherente con las estimaciones del grado de heterogeneidad no observable obtenidas.

Figura 4. LAR estimada con el modelo M-G para la población masculina (a) y femenina (b).

a)



b)



5. CONCLUSIONES

La consideración de la heterogeneidad no observable en los estudios de mortalidad, a pesar de las dificultades técnicas que implica, parece de una gran importancia, tanto en la determinación de las tendencias que experimenta la mortalidad, como en la estimación de las tasas para edades muy avanzadas. Un número creciente de investigadores, Butt y Haberman (2004), Vaupel y otros (1979), Congdon (1994) inciden en que la no inclusión de la heterogeneidad en los modelos de mortalidad puede redundar en una incorrecta estimación de las mejoras de la mortalidad observada en las edades más avanzadas en los últimos años.

Desde el punto de vista puramente actuarial, autores como Olivieri (2006) o Pitacco (2004 a) sugieren que la inclusión de la heterogeneidad no observable en la modelización de la mortalidad puede ser una herramienta de gran importancia para evitar sesgos sistemáticos en las valoraciones de los costes asociados a las carteras de vida, sesgos que se pueden acentuar en las edades más avanzadas. En esta línea se sitúa la propuesta de Horiuchi y Wilmoth (1998) cuando sugieren que para evaluar el progreso en la reducción de la mortalidad es más conveniente cuantificar dicho progreso en términos de la mortalidad de individuos estándar en lugar de hacerlo con la mortalidad experimentada por cohortes heterogéneas.

Una implicación de la presencia de heterogeneidad para las empresas del sector asegurador, para evitar los sesgos mencionados consiste en la necesidad de recopilar más información de los clientes que contratan seguros, rentas o pensiones, de forma que las covariables responsables de la heterogeneidad sean identificadas y cuantificadas. Esto sería una réplica de la práctica habitual en la rama no vida (como por ejemplo en automóvil, en la que se incluye una amplia gama de variables en la evaluación del riesgo). Para rentas y pensiones hay poca tradición de evaluación del riesgo (para la aseguradora) de la propensión a la longevidad (valores bajos de la variable que cuantifica la *frailty*). Sin embargo, la posibilidad de una clasificación más detallada del riesgo en la rama vida puede generar discusiones éticas y políticas que exceden el ámbito estrictamente técnico.

De las diversas propuestas existentes en la literatura, en este trabajo se ha optado por seguir el modelo multiplicativo de Vaupel y los posteriores desarrollos de Butt y Haberman. No obstante, a diferencia de los trabajos anteriores en esta línea, en este artículo se ha empleado para realizar la estimación los métodos de ajuste de los modelos no lineales generalizados

(GNM) directamente, a través del software desarrollado por Turner y Firth (2007).

Los ajustes obtenidos para la población andaluza son más satisfactorios en la población masculina que en la femenina, donde encontramos algunos problemas en el análisis de los residuos. No obstante hay que tener en cuenta que el modelo base especificado para la mortalidad estándar, modelo de Makeham, es un modelo poco parametrizado y los datos observados, sugieren una forma funcional más compleja que la especificada, resultando ésta una interesante línea de investigación futura, consistente en la inclusión de heterogeneidad no observable en modelos más complejos.

Respecto a las dos especificaciones de la *frailty*, usadas en este trabajo, distribuciones Gamma e Inversa Gaussiana, ambos modelos ofrecen en este caso propiedades de ajuste similares. No obstante, desde el punto de vista teórico, parece más razonable, según diversos autores, el modelo Gamma, ya que predice poblaciones heterogéneas en edades avanzadas (al contrario que la especificación Inversa Gaussiana, que formula una población que se hace cada vez más homogénea con la edad).

El grado de heterogeneidad estimado en ambas poblaciones no es muy elevado, siendo ligeramente superior en la población femenina. Esta apreciación está en consonancia con la desviación que muestra la LAR observada respecto de la esperada por un modelo de Gompertz en las edades más elevadas, que en el caso de la población femenina presenta además una mayor expansión de la curva de densidad de fallecimientos a partir de los 65 años.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Benjamin, B. y Pollard, J.H. (1970). *The analysis of mortality and other actuarial statistics*. Ed. Butterworth-Heinemann, Oxford (Reino Unido).
- Butt, Z. y Haberman, S. (2004). Application of Frailty-Based Mortality Models Using Generalized Linear Models. *Astin Bulletin*, 34, 1, 175-197.
- Congdon, P. (1994). Analyzing mortality in London: life tables with frailty. *Journal of the Royal Statistical Society, Series D*, 43, 277-308.
- Debón, A., Montes, F. y Sala, R. (2005). A comparison of parametric models for mortality graduation. Application to mortality data for the Valencia Region. *Sort*, 29, 2, 269-288.

- Escuder, J., Escuder, R., Pavía, J.M. y Guillén, M. (2008). Determinación de los tantos brutos de mortalidad. *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*, 14, 109-134.
- Forfar, D.O., McCutcheon, J.J. y Wilkie, A.D. (1988): On graduation by mathematical formula. *Journal of the Institute of Actuaries*, vol. 115, 1-149.
- Haberman, S. y Renshaw, A.E. (1996). Generalized linear models and actuarial science. *Journal of the Royal Statistical Society, Series D*, vol. 45, 407-436.
- Heligman, L. y Pollard, J. (1980). The age pattern of mortality. *Journal of the Institute of Actuaries*, 107, 49-80.
- Hoem, J.M. (1990). Identifiability in hazard models with unobserved heterogeneity: The compatibility of two apparently contradicting results. *Theoretical Population Biology*, 37, 124-128.
- Horiuchi, S., y Wilmoth, J.R. (1998). Deceleration in the age pattern of mortality at older ages. *Demography* 35 (4), 391-412.
- Hougaard, P. (1984). Life table methods for heterogeneous populations: Distributions describing heterogeneity. *Biometrika*, 71, 75-83.
- Keyfitz, N. y Littman, G. (1979). Mortality in heterogeneous population. *Population Studies*, 33, 333-342.
- Lancaster, T. (1990). *The Econometric analysis of transition data*. Cambridge University Press, Cambridge (Reino Unido).
- Manton, K.G. y Stallard, E. (1984). *Recent trends in mortality analysis*. Academic Press, Londres (Reino Unido).
- Olivieri, A. (2006). Heterogeneity in survival models. Applications to pensions and life annuities. *Belgian Actuarial Bulletin*, 6, 1, 23-39.
- Perks, W.F. (1932). On some experiments in the graduation of mortality statistics. *Journal of the Institute of Actuaries*, 63, 12-40.
- Pitacco E. (2004 a). From Halley to "frailty": a review of survival models for actuarial calculations. *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, 67, 1-2, 17-47.
- Pitacco, E. (2004 b). Survival models in a dynamic context: a survey. *Insurance: Mathematics & Economics*, 35, 2, 279-298.
- Redington, F.M. (1969). An exploration into patterns of mortality. *Journal of the Institute of Actuaries*, 95, 243-298.
- Renshaw, A.E. (1991). Actuarial graduation practice and generalized linear and non-linear models. *Journal of the Institute of Actuaries*, vol. 118, 295-312.
- Renshaw, A.E. (1995). Graduation and generalized lineal models: An overview. *Actuarial Research Paper 73*, Department of Actuarial Science and Statistics, City University, London.
- Turner, H. L. y Firth, D. (2007). Generalized Nonlinear Models in R. *Statistical Computing & Graphics*, 18(1), 11-16.

Graduación de la mortalidad en Andalucía con modelos de mortalidad...

Vaupel, J.W., Manton, K.G. y Stallard, E. (1979). The impact of heterogeneity in individual frailty on the dynamics of mortality. *Demography*, 16, 439-454.

Vaupel, J.W. y Yashin, A. I. (1985). The deviant dynamics of death in heterogeneous populations. En *Sociological Methodology*, N.B. Tuma (ed.). 179-211. San Francisco, (Estados Unidos).

Yashin, A. I., J. W. Vaupel e I. A. Iachine (1994). A Duality in Aging: The Equivalence of Mortality Models Based on Radically Different Concepts. *Mechanisms of Ageing and Development*, 74, 1-14.