# Modelo de análisis de opciones aplicado a la valoración del seguro

EVA Mª DEL POZO GARCÍA. FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
Y EMPRESARIALES UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

**Resulta apreciable para la toma de decisiones el estudio y aplicación de la teoría financiera al campo del seguro. A este normalmente le han sido aplicados los modelos estadísticos y actuariales, pero gracias a la moderna teoría financiera se le pueden aplicar, entre otros, modelos financieros tales como el Insurance CAPM, el modelo de valoración de opciones y el modelo de descuentos de flujos de caja.**

**En este estudio se desarrolla el modelo de valoración de opciones aplicado a la valoración de una empresa aseguradora. En primer lugar se hace referencia a la teoría y características generales de las opciones y a las similitudes que tienen ciertos elementos del seguro con las mismas, para finalmente tratar el Modelo de Valoración de Opciones en tiempo discreto y en tiempo continuo, aplicado a la valoración del seguro, comentando las conclusiones resultantes de dicha aplicación.**

Es habitual aplicar la teoría de opciones a los activos clásicos como acciones, bonos y otros activos financieros, pero existen otros instrumentos financieros y de seguro que tienen las características de las opciones y que, por tanto, pueden ser valorados mediante los modelos de valoración de opciones. Así el valor de una empresa aseguradora tiene las características de una opción de compra Europea, un contrato de seguro puede ser interpretado como un activo financiero derivado donde los pagos dependen de los cambios en el valor de otros activos.

Las opciones ofrecen a sus propietarios el derecho a comprar o vender un activo a un precio fijo en un momento futuro. Una opción, es por tanto, un contrato por el cual su poseedor (el comprador) adquiere un derecho, no una obligación, sobre el vendedor de comprar (call options) o vender (put options) una determinada cantidad de activo a un precio establecido, en una fecha determinada.

Si la opción proporciona al comprador el derecho de comprar un activo, es una «opción de compra», si por el contrario le proporciona el derecho a vender el activo, es una «opción de venta».

El comprador de una opción adquiere un derecho que ejercerá o no según le convenga, y por ello paga una cantidad que se denomina *prima.* Sin embargo, el vendedor, está obligado a cumplir el contrato si el comprador así lo exige, para ello percibe la prima o precio de la opción.

Los principales elementos de dicho contrato son los siguientes:

- *Activo subyacente:* Es el activo sobre el que se generan los derechos a que hace referencia la opción. Estos pueden ser activos financieros, bienes o materias primas (commodities). En muchos casos, cuando el comprador de la opción decide ejercerla, no se realiza

una entrega física del activo, sino que se liquida por diferencias.
- *Precio de ejercicio (Strike Price):* Es el precio establecido en el contrato para compra o venta del activo subyacente en la fecha de vencimiento de la opción.
- *Vencimiento del contrato o fecha de expiración:* (expiration date). Es la fecha en la cual (opción Europea) o hasta la cual (opción americana) el comprador de la misma puede ejercer su derecho.

Como acabamos de ver existen dos tipos de opciones negociadas en mercados organizados: Opciones Europeas y Opciones Americanas. Las primeras sólo pueden ser ejercitadas en la fecha de vencimiento, mientras que las segundas se pueden ejercitar en cualquier momento intermedio entre la firma del contrato y la fecha de vencimiento. En este caso el modelo está enfocado a las opciones Europeas que solo pueden ejercitarse en la fecha de ejercicio y no antes de la misma.

Una call Europea se puede expresar como una función:

$$C(S, T) = C(S, T, K, \sigma, r)$$

donde:

S: es el precio del activo subyacente
T: vencimiento de la opción
K: es el precio de ejercicio
$\sigma$: es el parámetro de riesgo
r: es el tipo de interés libre riesgo

De tal forma que:

$$C(S, T,) = \text{Max } (S\text{-}K, 0) \qquad (1)$$

Evidentemente el propietario de la «call» (opción de compra) ejercerá su derecho de compra en la fecha de ejercicio, cuando el precio del activo subyacente se encuentre en el mercado por encima del precio de ejercicio y por tanto su beneficio será (S-K). Por el contrario, si el precio en el mercado del activo subyacente es menor que el precio de ejercicio en el momento de ejercer la opción, éste no la ejercerá y su beneficio será 0 y por supuesto perderá el valor que ha pagado por la prima

Una opción de venta (put option) da al propietario el derecho a vender el activo subyacente a un precio de ejercicio determinado y en la fecha de ejercicio.

Una put Europea es una función:

$$P(S, T) = P(S, T, K, s, r)$$

tal que:

$$P(S, T) = \text{Max } (K\text{-}S, 0) \qquad (2)$$

Al igual que en el caso anterior, si llegado el momento del vencimiento el precio del activo subyacente se encuentra en el mercado por encima del precio de ejercicio, el tenedor de la opción de venta no la ejercerá, mientras que si ocurre lo contrario, el propietario ejercerá la opción y su beneficio será (K-S).

En ambos casos el tenedor de la opción no se encuentra obligado a comprar o vender, mientras que el vendedor de la misma si que tiene la obligación, por ello las opciones tienen un valor y deberían venderse al precio adecuado. Existe una extensa literatura sobre la valoración de opciones empleando fórmulas de valoración. El modelo más importante fue el desarrollado por Black y Scholes en 1973.

La idea fundamental del modelo es que un inversor puede continuamente mantener una perfecta cobertura (es decir una cartera libre de riesgo) mediante el uso de opciones, manteniendo activos y prestando y pidiendo prestado sin riesgo, es decir que su cartera puede repartirse al tipo de interés libre de riesgo en un mercado de capitales que funcione correctamente. A través de esta propuesta, el valor de una opción puede obtenerse si los precios de los activos usados para formar una cobertura libre de riesgo son conocidos. La obtención requiere que la distribución del precio del activo subyacente sea log-normal.

Existe una importante relación entre las calls y las puts sobre un mismo activo que es el Teorema de la Paridad Put-Call.

$$C(S, T) = S - [K\, e^{-rT} - P(S, T)] \qquad (3)$$

Este teorema expresa que el valor de una call es igual al valor del activo subyacente menos el valor actual del precio de ejercicio más el valor de la put.

## APLICACIONES DE LAS OPCIONES AL SEGURO

### 1.- Aplicación a una empresa aseguradora

Como es sabido el valor del capital de una empresa aseguradora, Ve, como el de cualquier otra, es igual al valor de sus activos, A, menos el valor de sus obligaciones, L. Si suponemos que al final del período la compañía se liquida, los accionistas recibirían la diferencia entre los activos y obligaciones, si los activos son mayores que las obligaciones, o nada si los activos fueran menores que las obligaciones. Esta relación puede ser expresada mediante la siguiente ecuación:

$$V_e = \max [A\text{-}L, 0] \qquad (4)$$

Este valor al final del período es lo mismo que la liquidación de una opción de compra Europea, donde el valor de los activos es el valor del subyacente, A, y el valor de las obligaciones es el precio de ejercicio, L. Por tanto los acreedores recibirán el valor de sus siniestros, L, si el valor de los activos supera al de las obligaciones, o el valor de los activos, A, si los activos de la compañía son menores que las obligaciones al final del período. El valor al final del período de los siniestros pendientes, $V_L$, puede escribirse de la siguiente forma:

$$V_L = \min [L, A] \qquad (5)$$

Los acreedores tienen suscrita la venta de una opción de venta, cuyo valor máximo es el valor de sus siniestros, L, si el valor de los activos, A, es mayor o igual o L, a cuyo valor mínimo es 0 si los activos carecen de valor al final del período.

### 2.- Aplicación a un contrato de seguros

Un contrato de seguros es otro ejemplo de activo financiero que tiene las características de una opción. Supongamos que una compañía de seguros suscribe en un único período pólizas con una prima P con una franquicia de cuantía B, y tiene una siniestralidad desconocida pero que se estima en una cuantía L. Ignorando el valor del dinero en el tiempo para simplificar, el valor de la póliza al final del período asegurado (Vp) se podría escribir:

$$V_p = \min [P, P - (L - B)] \text{ ó } \min [P, P - L + B)] \qquad (6)$$

El asegurador obtendría la prima neta si no existe siniestralidad o si la siniestralidad no excede a la franquicia. Si la siniestralidad fuera mayor que la franquicia, el ingreso del asegurador se reduciría por la diferencia entre la siniestralidad y la franquicia. La ecuación 6 es muy similar a la liquidación de una opción de compra Europea (el asegurador es vendedor de la call). El asegurador, en efecto, ha vendido una opción de compra Europea con precio de ejercicio la franquicia. En este caso, el asegurado es comprador o propietario de una opción de compra europea. El valor del siniestro asegurado, Vh, se puede escribir:

$$V_h = \max [L - B - P, - P] \qquad (7)$$

Esto puede ser utilizado para determinar el rendimiento de equilibrio en la valoración del seguro empleando la estructura de la valoración de opciones.

## APLICACIÓN DE LOS MODELOS DE VALORACIÓN DE OPCIONES A LA VALORACIÓN DEL SEGURO

La teoría de valoración de opciones ha sido aplicada por diversos autores para la valoración del seguro, entre los que se encuentran Smith (1977), Schwartz (1979) Doherty y Garven (1986), Cummins (1990), (1991); incluso fue aplicado por Cummins (1988) a los fondos de garantía del seguro. Doherty y Garven emplean para la valoración tiempo discreto, mientras que Cummins emplea tiempo continuo y la fórmula de valoración de Black-Scholes. Ambos mantienen la aleatoriedad tanto de los activos, A, como de las obligaciones, cuyo valor constituye el precio de ejercicio, L.

### 1.- Modelo en tiempo discreto

Comenzaremos con el modelo desarrollado por Doherty y Garven. Su formulación supone un único período asegurado con un capital inicial, $S_0$, y primas netas de gastos, $P_0$. El objetivo del modelo es encontrar la prima que proporcione al asegurador una adecuada tasa de rendimiento del capital. Esto se obtiene descontando el valor de mercado esperado al final del período e igualándolo con la cuantía al comienzo del período.

La Duma del capital inicial y las primas representa el flujo de caja inicial del asegurador o la cartera inicial de activos $Y_0$.

$$Y_0 = S_0 + P_0 \qquad (8)$$

El asegurador tiene disponible inicialmente esta cartera de activos para invertir al tipo r. El capital se puede invertir durante un período completo mientras que las primas solo se pueden invertir durante una parte del período ya que existe un lapso de tiempo desde que se reciben las primas hasta el pago de los siniestros. El tiempo que media entre el momento que se reciben las primas y el pago de los siniestros se llama coeficiente generador de fondos y lo denotaremos por k. Al final del período el asegurador dispone de una cartera formada por la cartera inicial, $Y_0$, más los ingresos generados de la inversión de dicha cartera al tipo r que se puede expresar de la siguiente forma:

$$Y_1 = S_0 + P_0 + (S_0 + kP_0)r \qquad (9)$$

Al final del período el asegurador dispone de un capital o activos con valor $Y_1$ con los que deberá pagar los siniestros acaecidos. Los pagos que debe realizar el asegurador incluyen además de la siniestralidad, los impuestos que deberán pagarse.

Esta cuantía $Y_1$ debería ser suficiente para pagar la cuantía de la siniestralidad, L. Si al final del período el valor de los activos del asegurador es mayor o igual a L, los asegurados reciben la cuantía L. Si los activos del asegurador son mayor o igual a L, los asegurados reciben la cuantía L. Si los activos del asegurador no cubren la siniestralidad, los asegurados reciben la cuantía $Y_1$. Al final del período los siniestros asegurados son $H_1$ y se representan de la siguiente forma:

$$H_1 = \max \{\min[L, Y_1], 0\} \qquad (10)$$

Esto es equivalente a la liquidación al vencimiento para el comprador de una opción de compra Europea con precio de ejercicio L.

Otra consideración similar a una opción de compra es el pago de los impuestos. Si el asegurador tiene unos ingresos computables positivos, el gobierno recibe impuestos sobre los beneficios del asegurador. Mientras que si no hay beneficio los ingresos procedentes de impuestos para el gobierno serían 0. El valor de los impuestos al final del período $T_1$, se puede escribir de la siguiente forma:

$$T_1 = \max \{i[w(Y_1 - Y_0)P_0 - L], 0\} \qquad (11)$$

Donde:

i : Tipo impositivo

w : Parte de los ingresos invertidos sujetos a gravamen

El término $Y_1 - Y_0$ representa los ingresos del asegurador provenientes de las inversiones.

La parte de la cartera de activos que queda después de pagar los siniestros e impuestos revierte a los accionistas. Por lo tanto el valor del capital al final del período, Ve, es:

$$V_e = Y_1 - H_1 - T_1 \qquad (12)$$

Sin embargo, los valores al final del período de la ecuación, no son conocidos en términos de certeza al inicio del mismo. El valor actual del valor esperado del capital deberá ser estimado para comenzar con el proceso de obtención del valor de la prima que tenga una rentabilidad adecuada sobre el capital.

El valor actual de los siniestros asegurados y de los impuestos a pagar se puede escribir como sigue:

$$H_0 = V(Y_1) - C[Y_0; E(L)] \quad (13)$$

$$T_0 = iC\,[w(Y_1 - Y_0) + P_0; E(L)] \quad (14)$$

donde:

$V(Y_1)$: Valor de mercado de la cartera de activos del asegurador.

C[A; B]: Valor actual de una opción de compra europea con precio de ejercicio B suscrita sobre un activo con un valor A.

E(L): Siniestralidad esperada y gastos inherentes a la misma durante el período.

$$V_e = V(Y_1) - H_0 - T_0 =$$
$$= C\Big[Y_0; E(L) - iC\,[w(Y_1 - Y_0) + P_0; E(L)]\Big] =$$
$$= C_1 - C_2 \cdot i \quad (15)$$

- **Ejemplo de valor en tiempo discreto:**

Supongamos a un asegurador en la siguiente situación, las cuantías están denotadas en millones de euros:

| | |
|---|---|
| Capital inicial | 150 millones euros |
| Primas suscritas | 300 |
| Gastos | 80 |
| Siniestralidad esperada | 200 |
| Desviación típica del rendimiento de las inversiones | 0.5 |
| Desviación típica de la siniestralidad | 0.0 |
| Tipo de interés libre de riesgo | 4.0% |
| Coeficiente generador de fondos | 1.0 |

Empleando la notación anterior para la valoración de opciones, $S_0 = 150$ millones de euros $P_0 = 220$ (300 de las primas, menos 80 de gastos), E(L) 200, y por tanto no existe incertidumbre en la siniestralidad ya que se considera la esperanza matemática de la misma, y k tiene valor 1, puesto que el período considerado es de un año, es decir el tiempo que transcurre desde que el asegurador recibe las primas hasta el pago de los siniestros con los activos de que dispone.

Suponiendo que inicialmente no hay impuestos, el valor de esta empresa aseguradora está basado en la ecuación anterior y en el modelo de valoración de opciones de Black-Scholes:

$$C[Y_0, E(L)] = C[150 + 300 - 80; 200] =$$
$$= C[370; 200]$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{370}{200}\right) + (0{,}040{,}5(0{,}5)^2)1}{0{,}5(1)^{1/2}} = 1{,}56$$

$$d_2 = 1{,}56 - 0{,}5(1)^{1/2} = 1{,}06$$

$$C = 370N(1{,}56) - 200e^{-0{,}04(1)}\,N(1{,}06) =$$
$$= 370(0{,}9407) - 200(0{,}9608)(0{,}8555) =$$
$$= 183{,}65$$

Por tanto, el valor de este asegurador basado en la metodología de la valoración de opciones es de 183,65 millones de euros omitiendo los impuestos.

Este valor es mayor que si consideramos el que se obtendría añadiendo al capital inicial de 150 millones, las primas suscritas, 300 millones, y restándole los gastos, 80, y la siniestralidad, 200, ya que de este modo nos quedarían 20 millones de beneficio, con lo cual el capital después de pagar gastos y siniestros serían 170 millones. La razón de que el valor obtenido a través del modelo de valoración de opciones sea mayor que el otro es que este modelo considera la probabilidad de insolvencia.

Si en el cálculo se incluyen los impuestos, suponiendo que todo el ingreso por inversiones es computable a efectos de impuestos, el asegurador tiene un tipo impositivo del 35%, al final del período, la cartera de activos calculada en base a la ecuación (9) queda:

$$Y_1 = 150 + 220 + (150 + 1{,}0(220))((0{,}04) = \\ = 384{,}8$$

$$T_0 = 0{,}35C\ [(384{,}8 - 370) + 220;\ 200] = \\ = 0{,}35C\ [234{,}8;200]$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{234{,}8}{200}\right) + (0{,}04 + 0{,}5(0{,}5)^2 1}{0{,}5(1)^{1/2}} = \\ = 0{,}6508$$

$$d_2 = 0{,}6508 - 0{,}5(1)^{1/2} = 0{,}1508$$

$$C = 234{,}8N(0{,}6508) - 200e^{-0{,}04(1)}\,\mathrm{N}(0{,}1508) = \\ = 234{,}8(0{,}7424) - 200(0{,}9608)(0{,}5599) = \\ = 66{,}7228$$

$$T_0 = 0{,}35C = 23{,}35$$

Este valor de los impuestos es ser superior; dado que el asegurador ha invertido sus ingresos al tipo libre de riesgo habrá obtenido 0,8 millones de ingresos por inversiones más el beneficio del negocio asegurador de 20 millones, en total 20,8 millones. Sin embargo los impuestos son asimétricos, ya que es un 35% sobre cualquier plusvalía o ganancia, pero no habrá impuestos si hay pérdidas. En realidad el tratamiento de los impuestos es mucho más complicado que lo que propone este modelo.

Considerando los impuestos en la determinación del valor de la compañía obtenidos en este ejemplo de la ecuación anterior tenemos:

$$V_e = 183{,}65 - 23{,}35 = 160{,}30$$

Ya que $V_e$ es superior al capital inicial de 150 millones de euros, el asegurador tiene más valor que el inicial utilizando este modelo de valoración. En este ejemplo, la siniestralidad esperada se supone cierta, o al menos se considera en términos de esperanza matemática.

Si se introduce en el modelo la siniestralidad variable, entonces los precios de ejercicio de las opciones para la compañía y los impuestos son variables aleatorias. Se puede tener en cuenta esta variación, pero esto complicaría los cálculos.

Doherty y Garven posteriormente utilizan esta metodología, incluyendo la variación en la siniestralidad con el fin de obtener un valor apropiado de las primas. El valor de las primas debería ser tal que el valor de mercado del capital sea igual a la cuantía del capital inicial $S_0$ y la rentabilidad justa para los accionistas. Los valores $Y_0$ e $Y_1$ son funciones de la prima «justa» P* como son las opciones de compra de la ecuación (15):

$$V_e = C\ [Y_1(P^*);\ E(L)] - tC[i(Y_1(P^*) - Y_0(P^*)) + \\ + P;\ E(L)]C_1{}^* - tC_2{}^* = S_0 \qquad (16)$$

El margen «justo» de beneficio del asegurador viene dado por la ecuación:

$$UPM = [P^* - E(L)]/P^* \qquad (17)$$

## 2.- Modelo en tiempo continuo

A continuación se aborda el modelo para tiempo continuo (Cummins (1988)).

En el planteamiento para tiempo continuo, los activos y obligaciones son definidos mediante un proceso de difusión:

$$dL = \pi\, L\, dt + \sigma L\, L\, dzL \qquad (18.a)$$

$$dA = \mu\, L\, dt + \sigma_A\, A\, dz_A \qquad (18.b)$$

donde dzA y dzL es un movimiento browniano estandar para los activos y obligaciones respectivamente.

El movimiento browniano es un tipo de proceso estocástico que ha tenido una aplicación en finanzas (el proceso de Weiner es también utilizado para este tipo de procesos). Llamando z(t) con $t \geq 0$ como el valor del proceso estocástico en el momento t. El proceso z(t) es un movimiento browniano que satisface diversas condiciones matemáticas. Las dos más importantes son las siguientes:

(1).- Todo incremento del proceso, $z(t + \tau) - z(t)$, está normalmente distribuido con media $\mu\tau$ y varianza $\sigma^2\tau$; por tanto, la media como la varianza dependen de la amplitud del intervalo $\tau$.

(2).- Los incrementos $\Delta z$ correspondientes a intervalos de tiempo no solapados son estadísticamente independientes. El movimiento Browniano estandar es un proceso browniano con $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$.

Si el proceso S(t) sigue un movimiento browniano con parámetros $\mu$ y $\sigma^2$, entonces cualquier variación en el proceso $S(t) - S(t_0)$ está normalmente distribuida con media $\mu(t - t_0)$ y varianza $\sigma^2 (t - t_0)$. Por ejemplo, suponemos que S es un activo cuyo precio al inicio del período $S(t_0) = 1$, tal que $\mu = 0{,}06$ y $\sigma = 0{,}02$. Si $t - t_0 = 0{,}5$ (1/2 de año donde $\mu$ se define como tasa de variación anual esperada), entonces, $S(t) - S(t_0)$ es normal con valor esperado 0,03 ($0{,}5\mu$) y varianza 0,0002 ($0{,}5\sigma^2$), y desviación típica 0,014121. Así, el valor esperado en t, $E[S(t)] = S(t_0) + \mu t = 1{,}03$, pero el valor real podría ser mayor o menor dependiendo del valor aleatorio de una distribución normal. Más formalmente se puede escribir: $dS = \mu\ dt + \sigma\ dz$, donde z es un movimiento browniano. Si z no existiera, S se incrementaría determinísticamente siguiendo una línea recta con pendiente $\mu$. La presencia del término estocástico (s dz) significa que S fluctuará con una línea de tendencia aleatoria.

Se ve claramente la diferencia entre el proceso S(t) y el proceso de activos y obligaciones definido en las ecuaciones (18.a) y (18.b). La mayoría de las aplicaciones financieras utilizan una generalización del movimiento browniano conocido como movimiento geométrico browniano, donde la tasa de variación de dS/S en vez dS, es decir $dS = S\ \mu\ dt + S\ \sigma\ dz$. Esta es la forma del proceso (18.a) y (18.b). El movimiento geométrico browniano se puede expresar como $S(t) = e^{z(t)}$, donde z(t) es un proceso de movimiento browniano. Reescribiendo, tenemos que $z(t) = Ln\ [S(t)]$; así, los incrementos en el logaritmo de S(t) son normalmente distribuídos, lo que implica que los incrementos en S(t) siguen una distribución logarítmico-normal. La distribución lognormal es mejor para la valoración de activos que la normal. La propiedad lognormal implica que al final del período los valores de los activos y obligaciones tienen las siguientes distribuciones de probabilidad:

$$g(L) = \frac{1}{L\sigma_L \sqrt{t}\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{Ln\ (L/L_0)\cdot(\pi - \frac{\sigma_L^2}{2})\ t}{\sigma_L \sqrt{t}}\right)^2} =$$

$$= \Lambda\left[L; Ln(L_0) + (\pi - \frac{\sigma_L^2}{2})t, \sigma_L \sqrt{t}\right] \quad (19)$$

$$f(A) = \frac{1}{A\sigma_A \sqrt{t}\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{Ln\ (A/A_0)\cdot(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2})\ t}{\sigma_L \sqrt{t}}\right)^2} =$$

$$= \Lambda\left[A; Ln(A_0) + (\pi - \frac{\sigma_A^2}{2})t, \sigma_A \sqrt{t}\right] \quad (20)$$

donde: $\Lambda[x;\alpha,\beta\ ]$ es la distribución lognormal de la variable aleatoria x, con parámetros $\alpha$ y $\beta$.

Un importante resultado utilizando modelos en tiempo continuo es el modelo de opciones para el seguro con activos y responsabilidades estocásticos, una derivación de este modelo aparece en Cummins 1988, cuyos resultados se resumen a continuación:

Se supone que un asegurador tiene un capital inicial ($t = 0$) $E_0$. Suscribirá pólizas de seguros con siniestralidad valorada en $L_0$ en $t_0$ para una prima recibida P. Las pólizas expiran y los siniestros son pagados al final del período. Entre el momento 0 y el 1 (expiración de las pólizas), los procesos de activos y responsabilidades siguen un movimiento geométrico browniano (ecuaciones (18.a) y (18.b)). Específicamente, los siniestros crecen a una tasa (constante) y son impactados por un aleatorio choque temporal mientras que los activos crecen a una tasa constante más un choque temporal aleatorio. Para simplificar la anotación, las obligaciones aseguradas se suponen que no tienen riesgo sistemático.

Al final del período, cuando se tienen que pagar las obligaciones, el asegurador tiene una opción como ya hemos visto anteriormente:

Puede pagar las obligaciones o puede no pagarlas liquidando la compañía y entregando los activos a los asegurados. Pagará las obligaciones si la cuantía que le queda después de pagarlas es positiva y no las pagará si con los activos de la compañía no cubre las obligaciones. Por tanto, el valor de la siniestralidad para la compañía en el momento 1, es Max (A − L, 0).

Esto es, por lo tanto, igual que la liquidación de una opción de compra. Así la siniestralidad de la compañía puede ser considerada como una opción de compra sobre los activos de la firma A con precio de ejercicio, L.

La demanda de los asegurados en el momento 1 es:

$$\mathrm{Min}\,[L, A] = L - \mathrm{Max}\,[L - A, 0]$$

La siniestralidad asegurada es igual al valor de las obligaciones menos el valor de la opción put sobre los activos de la empresa con precio de ejercicio L. La opción put es frecuentemente llamada put de insolvencia ya que se ejercita solo si la firma es insolvente.

Antes de la fecha de expiración se pueden valorar mediante la fórmula de valoración de Black-Scholes, modificada para introducir las obligaciones estocásticas (precio de ejercicio aleatorio), así como activos estocásticos. Además, el valor de los activos es la suma de las primas más el capital (P + E). En un mercado competitivo, los asegurados pagarán el precio «justo» del seguro, por tanto la prima «justa» se obtiene resolviendo la expresión para P.

$$C[P + E, t, L] = E \qquad (21)$$

Una expresión equivalente desde la perspectiva de asegurado es.

$$P = e^{-(r - \pi)\,t}\,L - \mathrm{Put}[P + E, t, L] \qquad (22)$$

En estas ecuaciones, E, P y L son valoradas t períodos antes de la expiración de las opciones.

En (22) vemos que los siniestros son descontados para calcular el valor actual al tipo (r − π). Por supuesto se espera que la inflación de la economía sea igual a la del seguro (r − π) que es la tasa real. Sin embargo π puede ser mayor que r, y por tanto el valor actual sin riesgo de las obligaciones mayor que L. La fórmula para la opción de compra en (21) es:

$$C(P + E,t,L) = (P + E) \int_{-\infty}^{d_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}\, dx -$$

$$- L e^{-r \cdot t} \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}\, dx \qquad (23)$$

donde:

$d_1 = \ln((P + E)/(Le^{-r^* t}))/\sigma\sqrt{t} + 0{,}5\sigma\sqrt{t}$

$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$

$r^* = r - \pi$

$\pi$ = Tanto instantáneo de inflamación de los siniestros asegurados

$\sigma^2 = \sigma_A^2 + \sigma_L^2 - 2\sigma_A\sigma_L\rho_{AL}$

$\rho_{AL}$ = Coeficiente de correlación entre dzA y $dz_L$.

Usando la ecuación (23), la ecuación (21) se puede resolver numéricamente para obtener la prima justa.

## CONCLUSIONES

En la aplicación del modelo de opciones a la valoración del seguro se pueden destacar varios puntos de interés:

(1).- El tipo de descuento es el tipo libre de riesgo (r), menos la tasa de inflación. Esta tasa puede ser negativa llevando a aumentar las primas si la inflación del seguro es más alta que la inflación general.

(2).- La variable de la opción es realmente el ratio activos/obligaciones, $A/L = (P + V_e)/L$. Por tanto, la opción es denominada en obligaciones y se puede usar para escribir la ecuación (23) en términos absolutos en lugar del ratio A/L.

(3).- Usando cálculos en tiempo continuo, se obtiene un resultado lognormal que refleja activos y obligaciones estocásticas. Mientras que la fórmula lognormal desarrollada por Doherty y Garven usando un modelo en tiempo discreto es sólo aproximada ya que las sumas de variables lognormales no es lognormal.

(4).- La correlación positiva entre activos y obligaciones reduce el parámetro de riesgo e incrementa la prima. Cada correlación positiva significa que el asegurador tiene disponible una cobertura natural y, por tanto, se reduce el riesgo.

Aunque la fórmula de valoración de las opciones europeas proporciona una importante valoración para el seguro, no es realmente apropiada para la mayoría de los problemas del seguro en el mundo real. Muy pocos problemas del negocio asegurador satisfacen las hipótesis tan rígidas de este modelo. Por ejemplo: el no pagar antes de la fecha de vencimiento fijada en la que todos los siniestros son pagados. Todos sabemos que los siniestros, en la medida de lo posible, se van pagando según van ocurriendo sin necesidad de esperar al final del período, y que existen otros siniestros que quedan pendientes de pago durante varios períodos, debido, por ejemplo, a decisiones judiciales. Desafortunadamente, algunos autores han intentado forzar que los problemas del seguro entren dentro de la estructura de una opción europea, sin embargo, lo más apropiado, pero más difícil, es adaptar el modelo al problema en vez de forzar el problema al modelo. Adaptar el modelo, normalmente implica la utilización de matemáticas más complejas, sin embargo, con esfuerzo hasta los contratos de seguro más complicados tienen característica de opción. Un ejemplo de una situación donde el modelo de opción europea es probablemente apropiado sin muchas modificaciones, es el cálculo del fondo de garantía (Cummins 1988). El fondo de garantía se compromete a pagar a los asegurados si la compañía quiebra. Cummins calcula el fondo de garantía apropiado utilizando un proceso de difusión para los activos y obligaciones similar al modelo de valoración de opciones de Black-Scholes. La opción, en este caso, es sobre la totalidad de la compañía y puede ser considerado como un derecho en un plazo fijo. Por ejemplo, si suponemos que la garantía es para un período, entonces el valor de la garantía al final del período cuando la compañía es auditada es Max (L-A, 0), es decir, el fondo de garantía cubre solo el exceso entre los activos y las obligaciones en la fecha de auditoría. Por lo tanto, el valor de la garantía puede ser considerado como una opción de venta.

El valor de la opción de compra se obtiene mediante el modelo de valoración de opciones de Black-Scholes. Doherty y Garven utilizan dos modelos diferentes de valoración de opciones para valorar las opciones en la ecuación (16). A estos dos modelos se llega mediante diferentes supuestos sobre las preferencias del riesgo del inversor y las distribuciones del precio de los activos. Uno de los modelos está basado en la aversión constante y absoluta al riesgo (CARA, constant absolute risk aversion) y una distribución normal de los precios de los activos y el otro supone aversión constante y relativa del riesgo (CRRA, constant relative risk aversion) y una distribución lognormal de los precios de los activos similar al modelo de Black-Scholes. Como estos modelos no proporcionan una forma única de solución, P* se obtiene mediante prueba y error de las versiones parametrizadas de estos modelos. Los parámetros que es necesario estimar para estos modelos son el capital inicial, la desviación típica de los costes de los siniestros y los rendimientos de las inversiones. Los resultados generales de esta investigación indican que los márgenes de beneficio apropiados para el negocio asegurador son mayores utilizando el modelo de valoración de opciones que utilizando el CAPM.

Este modelo de valoración de opciones para la valoración del seguro es más complicado que el CAPM o que el modelo de descuento de flujos de caja, pero evita muchos de los problemas, tales como la estimación de los betas y el riesgo de mercado de las primas que tiene los modelos basados en el CAPM. Además el modelo de opciones es diferente en cuanto que utiliza el riesgo total de la cartera de inversiones del asegurador y las operaciones del negocio asegurador , en vez del riesgo sistemático.

Un problema para aplicar el modelo de valoración de Black-Scholes al seguro es la tendencia de aplicación de este modelo a las opciones in-the-money, es decir aquellas en las que el precio del subyacente se encuentra por encima del precio de ejercicio. Estas opciones son exactamente el tipo de opción que se usa en las aplicaciones al seguro del modelo de valoración de opciones, ya que el valor final esperado para los activos del asegurador generalmente es mucho mayor que la siniestralidad esperada. Por tanto aunque el modelo de valoración de opciones tiene importantes ventajas sobre otros modelos de valoración hay que tener en consideración las tendencias de este modelo.

El capital final del asegurador podría ser considerado como una opción de compra suscrita sobre la cartera de activos del asegurador. El valor de esta opción se obtiene restando al valor de los flujos de caja finales, los valores de los siniestros y los impuestos, ambos, como hemos visto anteriormente tienen las características de una opción. Pero el valor del capital de la opción depende también de las primas pagadas. El valor del capital final es igual al valor de mercado del capital inicial, podemos resolverlo endógenamente para las primas, P. Esta solución asegura que a los accionistas se les ofrece una tasa de rendimiento competitiva sobre su capital invertido en la compañía.

La principal ventaja del uso de la teoría de valoración de opciones para la valoración de seguro es que se pueden evitar los principales problemas de estimación que se encuentran en el CAPM y APM. A diferencia de los modelos anteriores, el planteamiento de las opciones no requiere la estimación del riesgo de las primas directamente; éste está implícito en el valor del activo subyacente sobre el que se ha suscrito la opción. Sin embargo, esta ventaja tiene un coste. Los supuestos de la distribución normal o log-normal. Estas distribuciones pueden proporcionar planteamientos o aproximaciones razonables donde la variable subyacente es una cartera diversificada de activos financieros o pólizas.

## BIBLIOGRAFÍA


Cummnis, J. David. 1988. «Risk-based Premiums for Insurance Guaranty Funds». *Journal of Finance.* Vol. XLIII, nº 4 Págs.: 823-839.

Cummnis, J. David. 1990. «Property-Liability Insurance Pricing Models: An Empirical Evaluation». *Journal of Risk and Insurance.* Vol. LVII, nº 3 Págs.: 391-430.

Cummnis, J. David. 1990. «Multi-period Discounted Cash Flow Ratemaking Models In Property-Liability Insurance». *Journal of Risk and Insurance.* Vol. LVII, Págs.: 79-109.

Cummnis, J. David. 1990. «Asset Pricing Models and Insurance Ratemaking». *Astin Bulletin.* Nº 20 Págs.: 125-166.

Cummnis, J. David. 1991. «Statistical and financial Models of Insurance Pricing and the insurance firm». *Journal of Risk and Insurance.* Págs.: 260-302.

D'arcy, Stephen and Doherty, Neil, 1988. «The Financial Theory of pricing Property-Liability Insurance Contracts». *Philadelphia: S.S. Huebner Foundation.*

D'arcy, Stephen and Dyer, Michael, 1997. «Ratemaking: A Financial Economics Approach». *Casualty Actuarial Society.* Págs.: 301-390.

Dohety, Neil and Garven, James. 1986. «Price Regulation in Property-Liability Insurance: A Contingent-Claims Approach». *Journal of Finance.* Vol. XLI. Nº 5. Págs.: 1031-1050.