# MODELO DISCRETO DE TRANSICIONES ENTRE ESTADOS DE DEPENDENCIA

A. Alegre, E. Pociello, M. A. Pons, F. J. Sarrasí, J. Varea.
*Universitat de Barcelona*
Teléfono / Fax : +34 93 402 19 53

**Resumen**

En este trabajo se analiza el modelo markoviano de transiciones anuales entre estados de dependencia asumiendo la hipótesis de estacionariedad. Se suponen conocidas las tasas de mortalidad de la población autónoma y las tasas de prevalencia de los tres estados de dependencia considerados. La indeterminación del modelo se resolverá incorporando restricciones en forma de hipótesis en las interrelaciones, a partir de las cuales se obtienen las matrices de transición por edades y se analiza el comportamiento de las mismas.

Se realizan aplicaciones numéricas utilizando distribuciones de mortalidad y de prevalencia que pueden ser adecuadas para la población española y que han surgido de un análisis preliminar. Por último, se efectúa un análisis de sensibilidad de los resultados respecto al cambio de hipótesis en las mencionadas interrelaciones.

**Abstract**

This paper introduces a LTC model developed in a time-discrete and Markov working frame by assuming the stacionarity hypothesis. Mortality rates as well the LTC prevalence rates for the three LTC considered states are supposed to be known. The result is an undetermined system of transition probabilities which is solved by adding a set of mathematical relations between the unknown probabilities. Once the transition probabilities values are deduced, we carried out a study comparing results obtained by varying the mortality distribution used by the model. Finally, the paper provides a sensibility analysis derived of varying the different hypothesis assumed in the model concerning to the relations between the transition probabilities.

**Palabras clave**: Dependencia, Modelo de Markov, tasas de prevalencia, probabilidades de transición.

**Keywords**: Long Term care, Markov models, prevalence rates and transition probabilities.

## 1. Introducción

El tratamiento actuarial del seguro de dependencia en España resulta realmente complejo, tanto por la variedad de estados que deben incluirse (diferentes niveles de severidad de dependencia, estado de persona autónoma, fallecimiento, etc.) que conducen a modelos matemáticamente complicados de tratar, como por la ausencia de experiencias estadísticas sobre dependencia suficientemente significativas, ya que en la actualidad el mercado de seguros de dependencia en España puede ser considerado todavía como un mercado emergente, aunque con un innegable potencial de desarrollo para los próximos años, dado el alto envejecimiento de la población española.

En España existen dos grandes tipologías de estudios. Por un lado, estudios exhaustivos con información de ámbito local, como son las encuestas de Vigo, Leganés y Móstoles. De las tres cabe destacar la Encuesta de salud OARS-Vigo, la cual, a pesar de no ser el estudio más detallado, sí es uno de los que presenta un mayor rigor metodológico, por enfoque de contenido y por disponibilidad de la información publicada. Por otro lado, existen diferentes estudios de ámbito nacional de los cuales, la Encuesta de Discapacidades, Deficiencias y Estado de Salud proporciona la base estadística más actual y de mayor amplitud para todo el territorio español.

El objetivo que se plantea en este trabajo es analizar y cuantificar las probabilidades de transición anuales entre los distintos estados utilizando el modelo markoviano de transiciones y bajo la hipótesis de estacionariedad. Para ello, se necesita la ley de supervivencia de la población general y las tasas de prevalencia. Por tasa de prevalencia de personas dependientes de una determinada edad, sexo y grado de severidad se entiende la proporción de personas dependientes respecto al total de la población de la misma edad y sexo.

La obtención de probabilidades de transición a partir de las tasas de prevalencia y de la ley general de supervivencia no es inmediata. En la literatura actuarial cabe destacar dos precedentes. En primer lugar, un trabajo de Pitacco, E. (1995) en el que se propone la obtención de las probabilidades de transición de un modelo con un solo estado de dependencia a partir del establecimiento de hipótesis, basadas en la aplicación de recargos actuariales, estadísticamente razonables, sobre las relaciones existentes entre las diferentes probabilidades. La segunda referencia a destacar es el trabajo publicado por Rickayzen, B.D. y Walsh, E.P. (2002) en el que se desarrolla un modelo de múltiples estados para describir la evolución dinámica en el tiempo de la población dependiente, considerando diferentes niveles de severidad. Para implementar este modelo utilizan información sobre las tasas de prevalencia de la población del Reino Unido, experiencia sobre las probabilidades de transición obtenidas de Estados Unidos y por último, las tendencias más recientes sobre la evolución demográfica de la población inglesa. El tratamiento de la dinámica de la población dependiente exige introducir una serie de relaciones funcionales entre las probabilidades de transición a considerar que además van variando en el tiempo. Dado que en España se carece de información referente a las probabilidades de transición y a su dinámica en el tiempo, se asumirá como hipótesis la estacionariedad propuesta por Pitacco, E.

En este trabajo se consideran tres estados de dependencia que se corresponden con los tres grados de dependencia definidos en la Encuesta sobre Discapacidades, Deficiencias y Estado de Salud (1999) llevada a cabo por el Instituto Nacional de Estadística Español, que son:

$d_1$ = 'Dependencia moderada'
$d_2$ = 'Dependencia severa'
$d_3$ = 'Dependencia total'

Si se tiene en cuenta que el riesgo de dependencia se encuentra en patologías de carácter crónico, la dependencia se puede considerar como un estado irreversible en el que la persona dependiente ni puede volver a ser autónoma ni puede pasar a un estado de menor dependencia. Esta consideración permite definir el conjunto $\wp$, de todas las posibles transiciones:

$$\wp = \{ a\to d_1, a\to d_2, a\to d_3, a\to m, d_1\to d_2, d_1\to d_3, d_1\to m, d_2\to d_3, d_2\to m, d_3\to m\}$$

siendo su esquema:

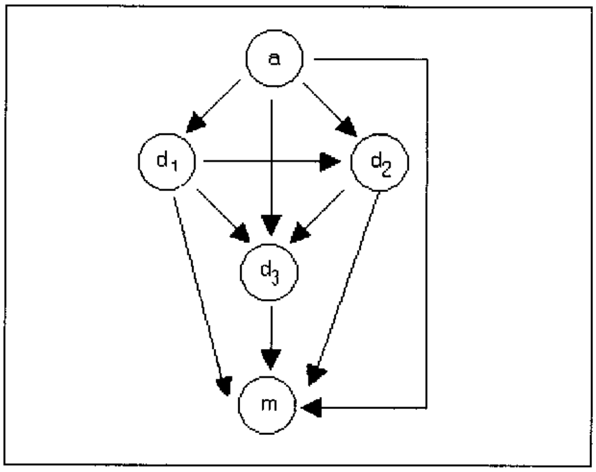


**Figura 1**. Esquema de transiciones del modelo de dependencia con tres estados.

y la matriz de transición anual, $M_x$, para una persona de edad x:

| | $a$ | $d_1$ | $d_2$ | $d_3$ | $m$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $p_x^{aa}$ | $p_x^{ad_1}$ | $p_x^{ad_2}$ | $p_x^{ad_3}$ | $p_x^{am}$ |
| $d_1$ | 0 | $p_x^{d_1d_1}$ | $p_x^{d_1d_2}$ | $p_x^{d_1d_3}$ | $p_x^{d_1m}$ |
| $d_2$ | 0 | 0 | $p_x^{d_2d_2}$ | $p_x^{d_2d_3}$ | $p_x^{d_2m}$ |
| $d_3$ | 0 | 0 | 0 | $p_x^{d_3d_3}$ | $p_x^{d_3m}$ |
| $m$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

**Tabla 1**. Matriz de transición $M_x$

En esta matriz se detallan todas las probabilidades de transición entre las edades x y x+1.

Para calcular las probabilidades de transición se utiliza el método actuarial propuesto por Pittacco, E. (1995) que permite obtener dichas probabilidades a partir de las tasas de prevalencia y de la ley de superviviencia de la población general $l_x$. Esto es, se suponen conocidas las tasas de mortalidad de la población general y las tasas de prevalencia de los tres estados de dependencia considerados. Respecto a la ley de supervivencia de la población general se utilizará la GRM-95 y las tasas de prevalencia vienen dadas por una primera aproximación basada en los datos de la Encuesta sobre Discapacidades, Deficiencias y Estado de Salud (1999).

El sistema de ecuaciones, resultado de la aplicación del modelo, es compatible indeterminado y la indeterminación del mismo se resuelve incorporando restricciones, en forma de hipótesis, en las interrelaciones. Por último, una vez cuantificadas las probabilidades de transición se efectúa un análisis de sensibilidad de los resultados respecto al cambio de hipótesis en las mencionadas interrelaciones.

## 2. Probabilidades de transición anuales en el modelo de dependencia con tres estados

En este apartado se plantea el modelo que permite cuantificar las probabilidades de la matriz de transición, $M_x$, a partir del número de supervivientes de edad $x$ de la población general, $l_x$, y de las tasas de prevalencia de los diferentes estados de dependencia:

$\lambda_x^1$: Tasa de prevalencia de grado 1 para un asegurado de edad $x$.

$\lambda_x^2$: Tasa de prevalencia de grado 2 para un asegurado de edad $x$.

$\lambda_x^3$: Tasa de prevalencia de grado 3 para un asegurado de edad $x$.

siendo,

$$
\begin{aligned}
l_x^{d_1} &= \lambda_x^1 \cdot l_x \\
l_x^{d_2} &= \lambda_x^2 \cdot l_x \\
l_x^{d_3} &= \lambda_x^3 \cdot l_x \\
l_x^{a} &= \left(1 - \lambda_x^1 - \lambda_x^2 - \lambda_x^3\right) \cdot l_x \\
l_x &= l_x^a + l_x^{d_1} + l_x^{d_2} + l_x^{d_3}
\end{aligned}
$$

donde,

$l_x^a$ : Número de supervivientes autónomos de edad $x$.
$l_x^{d_1}$ : Número de supervivientes con dependencia moderada de edad $x$.
$l_x^{d_2}$ : Número de supervivientes con dependencia severa de edad $x$.
$l_x^{d_3}$ : Número de supervivientes con dependencia total de edad $x$.

Las ecuaciones que permiten obtener el número de supervivientes de edad $x$+1 a partir de la edad del periodo anterior, $x$, para los tres estados de dependencia son:

$$l_{x+1}^{d_1} = l_x^{d_1} + l_x^a \cdot p_x^{ad_1} - l_x^{d_1} \cdot p_x^{d_1 d_2} - l_x^{d_1} \cdot p_x^{d_1 d_3} - l_x^{d_1} \cdot p_x^{d_1 m} \qquad (1)$$

$$l_{x+1}^{d_2} = l_x^{d_2} + l_x^a \cdot p_x^{ad_2} + l_x^{d_1} \cdot p_x^{d_1 d_2} - l_x^{d_2} \cdot p_x^{d_2 d_3} - l_x^{d_2} \cdot p_x^{d_2 m} \qquad (2)$$

$$l_{x+1}^{d_3} = l_x^{d_3} + l_x^a \cdot p_x^{ad_3} + l_x^{d_1} \cdot p_x^{d_1 d_3} + l_x^{d_2} \cdot p_x^{d_2 d_3} - l_x^{d_3} \cdot p_x^{d_3 m} \qquad (3)$$

Estas tres ecuaciones presentan nueve incógnitas las cuales hacen referencia a las diferentes probabilidades de transición que hay entre los estados. La indeterminación de este sistema de ecuaciones se resuelve mediante la incorporación de las siguientes hipótesis:

a) Respecto a las probabilidades de fallecimiento, se obtienen recargando la probabilidad de fallecimiento de la población general:

$$p_x^{d_1 m} = \left(1 + \delta_x^{d_1 m}\right) \cdot q_x$$

$$p_x^{d_2m} = \left(1 + \delta_x^{d_2m}\right) \cdot q_x$$

$$p_x^{d_3m} = \left(1 + \delta_x^{d_3m}\right) \cdot q_x$$

$$p_x^{am} = \left(1 - \delta_x^{am}\right) \cdot q_x$$

Donde,

$\delta_x^{d_1m}, \delta_x^{d_2m}, \delta_x^{d_3m}$, $\delta_x^{am}$ son los recargos por fallecimiento asociados a los estados $d_1$, $d_2$ , $d_3$ y $a$ respectivamente. Los recargos deben satisfacer la siguiente condición:

$$\delta_x^{d_1m} \leq \delta_x^{d_2m} \leq \delta_x^{d_3m}$$

siendo,

$$\delta_x^{d_1m} \geq 0$$
$$\delta_x^{d_2m} \geq 0$$
$$\delta_x^{d_3m} \geq 0$$
$$\delta_x^{am} \geq 0$$

Estos recargos son dependientes entre sí, debido a la relación de dependencia que existe entre las probabilidades de fallecimiento anuales:

$$q_x = \lambda_x^1 \cdot p_x^{d_1m} + \lambda_x^2 \cdot p_x^{d_2m} + \lambda_x^3 \cdot p_x^{d_3m} + \left(1 - \lambda_x^1 - \lambda_x^2 - \lambda_x^3\right) \cdot p_x^{am} \qquad x = 0, \ 1, \ \cdots, \ w$$

o bien,

$$1 = \lambda_x^1 \cdot (1 + \delta_x^{d_1m}) + \lambda_x^2 \cdot (1 + \delta_x^{d_2m}) + \lambda_x^3 \cdot (1 + \delta_x^{d_3m}) + \left(1 - \lambda_x^1 - \lambda_x^2 - \lambda_x^3\right) \cdot (1 - \delta_x^{am})$$

expresión que refleja la relación de dependencia entre los recargos $\delta_x^{am}$, $\delta_x^{d_1m}$, $\delta_x^{d_2m}$, $\delta_x^{d_3m}$.

b) Respecto a las probabilidades de transición entre los estados de dependencia se obtienen recargando la probabilidades de transición que tienen los autónomos para pasar a cualquiera de los tres estados de dependencia:

$$p_x^{d_1d_2} = \left(1+\delta_x^{d_1d_2}\right)\cdot p_x^{ad_2} \quad (4)$$

$$p_x^{d_1d_3} = \left(1+\delta_x^{d_1d_3}\right)\cdot p_x^{ad_3} \quad (5)$$

$$p_x^{d_2d_3} = \left(1+\delta_x^{d_2d_3}\right)\cdot p_x^{ad_3} \quad (6)$$

donde $\delta_x^{d_1d_2}, \delta_x^{d_2d_3}, \delta_x^{d_2d_3}$ son los recargos asociados a las distintas transiciones entre estados de dependencia. En este caso asumimos la hipótesis de independencia entre probabilidades y por tanto, de los recargos.

Sustituyendo las expresiones (4), (5) y (6) en el sistema de ecuaciones se obtienen las probabilidades de transición de una persona autónoma a los diferentes estados de dependencia $p_x^{ad_1}$, $p_x^{ad_2}$, $p_x^{ad_3}$ :

$$p_x^{ad_1} = \frac{l_{x+1}^{d_1} - l_x^{d_1} + l_x^{d_1}\cdot(1+\delta_x^{d_1d_2})\cdot p_x^{ad_2} + l_x^{d_1}\cdot(1+\delta_x^{d_1d_3})\cdot p_x^{ad_3} + l_x^{d_1}\cdot p_x^{d_1m}}{l_x^a} \quad (7)$$

$$p_x^{ad_2} = \frac{l_{x+1}^{d_2} - l_x^{d_2} - l_x^{d_1}\cdot(1+\delta_x^{d_1d_2})\cdot p_x^{ad_2} + l_x^{d_2}\cdot(1+\delta_x^{d_2d_3})\cdot p_x^{ad_3} + l_x^{d_2}\cdot p_x^{d_2m}}{l_x^a} \quad (8)$$

$$p_x^{ad_3} = \frac{l_{x+1}^{d_3} - l_x^{d_3} - l_x^{d_1}\cdot(1+\delta_x^{d_1d_3})\cdot p_x^{ad_3} - l_x^{d_2}\cdot(1+\delta_x^{d_2d_3})\cdot p_x^{ad_3} + l_x^{d_3}\cdot p_x^{d_3m}}{l_x^a} \quad (9)$$

De la ecuación (9) se obtiene $p_x^{ad_3}$ :

$$p_x^{ad_3} = \frac{l_{x+1}^{d_3} - l_x^{d_3} + l_x^{d_3} \cdot p_x^{d_3 m}}{l_x^a + l_x^{d_1} \cdot (1+\delta_x^{d_1 d_3}) + l_x^{d_2} \cdot (1+\delta_x^{d_2 d_3})} \quad (10)$$

la cual permitirá obtener $p_x^{ad_2}$ sutituyéndola en la ecuación (8). Por último conocidas $p_x^{ad_2}$ y $p_x^{ad_3}$ se obtiene $p_x^{ad_1}$ de la ecuación (7). Para poder completar la matriz de transición falta conocer las probabilidades de permanencia que vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$p_x^{aa} = \frac{l_{x+1}^a}{l_x^a} \qquad p_x^{d_1 d_1} = \frac{l_{x+1}^{d_1} - l_x^a \cdot p_x^{ad_1}}{l_x^{d_1}}$$

$$p_x^{d_2 d_2} = \frac{l_{x+1}^{d_2} - l_x^a \cdot p_x^{ad_2} - l_x^{d_1} \cdot p_x^{d_1 d_2}}{l_x^{d_2}}$$

$$p_x^{d_3 d_3} = \frac{l_{x+1}^{d_3} - l_x^a \cdot p_x^{ad_3} - l_x^{d_2} \cdot p_x^{d_2 d_3} - l_x^{d_1} \cdot p_x^{d_1 d_3}}{l_x^{d_3}}$$

## 3. Cuantificación de las matrices de transición

La ley de supervivencia de la población general utilizada es la GRM-95 y las tasas de prevalencia han sido extraídas mediante una primera aproximación de la Encuesta sobre Discapacidades, Deficiencias y Estado de Salud (1999) llevada a cabo por el Instituto Nacional de Estadística (INE), siguiendo la metodología llevada a cabo en el artículo de Alegre, A. y otros (2004). Dicha encuesta recoge un estudio sobre la incidencia de la dependencia en la población española sobre una muestra de 79.000 viviendas lo que supone unas 220.000 personas.

La encuesta cubre buena parte de las necesidades de información sobre los fenómenos de la discapacidad, de la dependencia, del envejecimiento de la población y del estado de salud de la población residente en España. La metodología utilizada sigue las recomendaciones de la Organización Mundial de la Salud, y en particular la Clasificación Internacional de Deficiencias, Discapacidades y Minusvalías, vigente en el año de realización de la citada encuesta.

En la valoración de la incidencia de la dependencia el INE toma en consideración las siguientes actividades de la vida diaria: cambiar y mantener las posiciones del cuerpo; levantarse y acostarse; desplazarse dentro del hogar; deambular sin medio de transporte; asearse solo: lavarse y cuidarse su aspecto; controlar las necesidades y utilizar solo el servicio; vestirse, desvestirse y arreglarse; comer y beber; comprar; cuidarse de las comidas, limpieza y cuidado de la ropa, limpieza y mantenimiento de la casa; cuidarse del bienestar del resto de la familia.

En la encuesta se consideran tres grados de dependencia: moderada, severa y total, que se corresponden con los tres estados de dependencia considerados en el presente trabajo, y recoge para cada edad la tasa de prevalencia de cada uno de los tres grados de dependencia contemplados. Para obtener una primera aproximación de las tasas de prevalencia, para cada edad y para cada estado de dependencia, se ha ajustado paramétricamente las tasas de prevalencia anuales de la población masculina obtenidas de la encuesta a través del método de los mínimos cuadrados tomando como función de ajuste una Gompertz-Makeham del tipo GM(0,3):

$$\lambda_x^{d_s} = e^{a_0 + a_1 \cdot y + a_2 \cdot y^2} \quad \text{donde} \quad s = 1,\ 2,\ 3 \quad e \quad y = (x - \alpha)/\beta$$

siendo los valores de los parámetros $\alpha$ y $\beta$ respectivamente:

$$\alpha = 52{,}5$$
$$\beta = 46{,}5$$

Los resultados del ajuste paramétrico vienen dados en la siguiente tabla:

| | s=1 | s=2 | s=3 |
|---|---|---|---|
| $a_0$ | -4.033230691 | -4.451945122 | -5.312564466 |
| $a_1$ | 3.690451386 | 5.514517028 | 6.373947115 |
| $a_2$ | -2.057027026 | -3.094155265 | -1.481258615 |

**Tabla 2**. Resultados del ajuste paramétrico

Una vez conocidas las tasas de prevalencia y la ley de supervivencia de la población general se obtienen las leyes de supervivencia de la población autónoma, de la población dependiente moderada, de la población dependiente severa y de la población dependiente total, para un intervalo de edades comprendidas entre 15 años y 98 años.

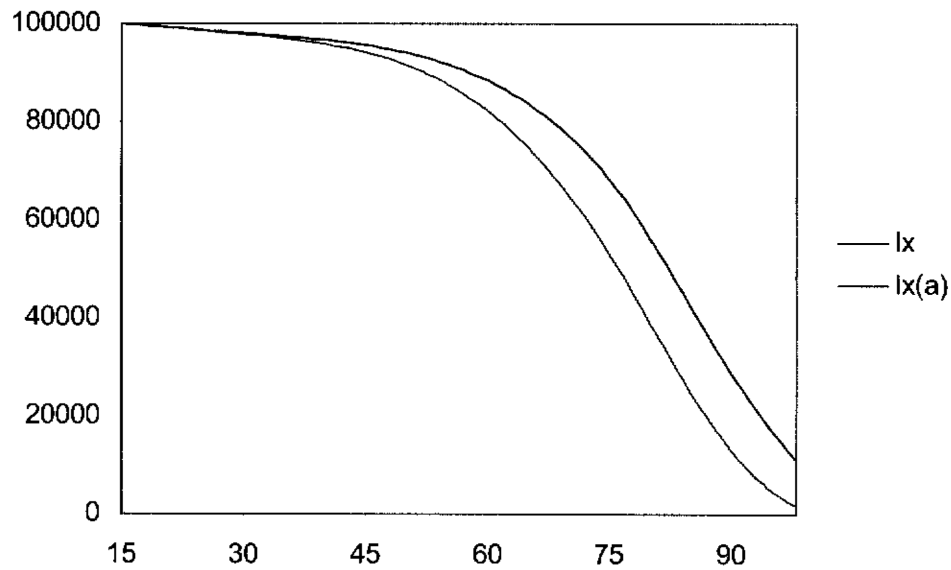


**Gráfico 1.** Evolución de la ley de supervivencia de la población general y de la población autónoma

La función $l_x$ (GRM-95) da el número de supervivientes a la edad x, de un grupo cerrado inicial de 100.000 personas de edad 15 años, del que se sale únicamente por una causa que es el fallecimiento y la función $l_x^a$ muestra la evolución de la ley de supervivencia de la población autónoma asociada a la edad x. Su evolución es muy parecida a la de la población general ya que se trata también de un grupo cerrado pero con cuatro causas de salida que son el fallecimiento y los tres estados de dependencia considerados.

Las leyes de supervivencia $l_x^{d_1}, l_x^{d_2}$ y $l_x^{d_3}$ dan el número de supervivientes para cada edad de la población dependiente moderada, severa y total respectivamente. Su comportamiento es distinto al de la ley de supervivencia general, ya que no se trata de grupos cerrados o de orden simple, sino que son grupos abiertos con varias causas de entrada y de salida, excepto el de dependencia total del cual sólo se puede salir por muerte. Su evolución viene dada en el siguiente gráfico:

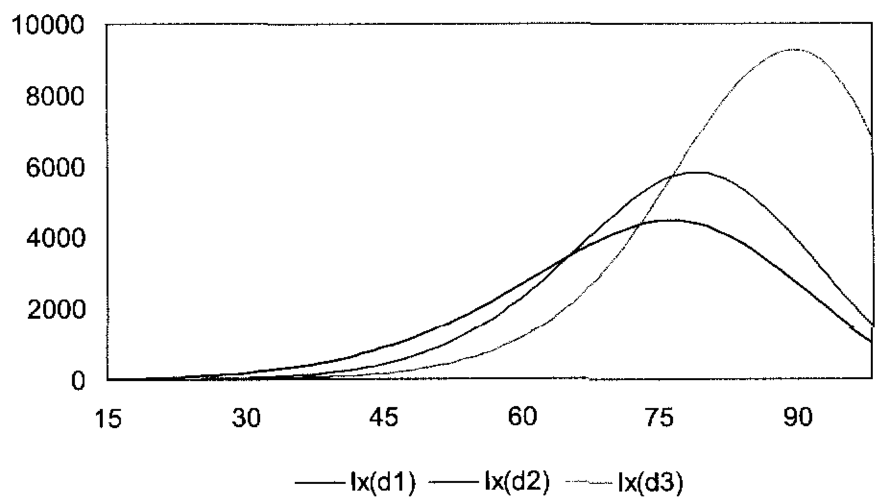


**Gráfico 2**. Evolución de las leyes de supervivencia de la población dependiente

Puede observarse como las tres leyes de supervivencia de la población dependiente son crecientes hasta una determinada edad, que es distinta según el grado de dependencia, y luego decrecen. Cabe destacar que para edades menores a 65 años $l_x^{d_1} > l_x^{d_2} > l_x^{d_3}$, sin embargo, la tendencia se invierte para edades superiores a los 75 años $l_x^{d_1} < l_x^{d_2} < l_x^{d_3}$. Una vez obtenidas las leyes de supervivencia de la población autónoma y dependiente se está en condiciones de poder determinar la matriz de transición asociada a cada edad. En el caso particular que $\delta_x^{d_1 m} = \delta_x^{d_2 m} = \delta_x^{d_3 m} = \delta_x^{d_1 d_2} = \delta_x^{d_2 d_3} = \delta_x^{d_1 d_3} = 0$ la matriz de transición para x=50, $M_{50}$ es:

| | $a$ | $d_1$ | $d_2$ | $d_3$ | $m$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | 0,992805726 | 0,0013034 | 0,00115058 | 0,0005226 | 0,004217631 |
| $d_1$ | 0 | 0,99410917 | 0,001150583 | 0,000522615 | 0,00421763 |
| $d_2$ | 0 | 0 | 0,995259754 | 0,00052261 | 0,00421763 |
| $d_3$ | 0 | 0 | 0 | 0,99578237 | 0,00421763 |
| $m$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

**Tabla 3**. Matriz de transición $M_{50}$

A continuación se representa gráficamente la evolución de las distintas probabilidades que forman parte de la matriz de transición en función de la edad para el caso particular considerado.

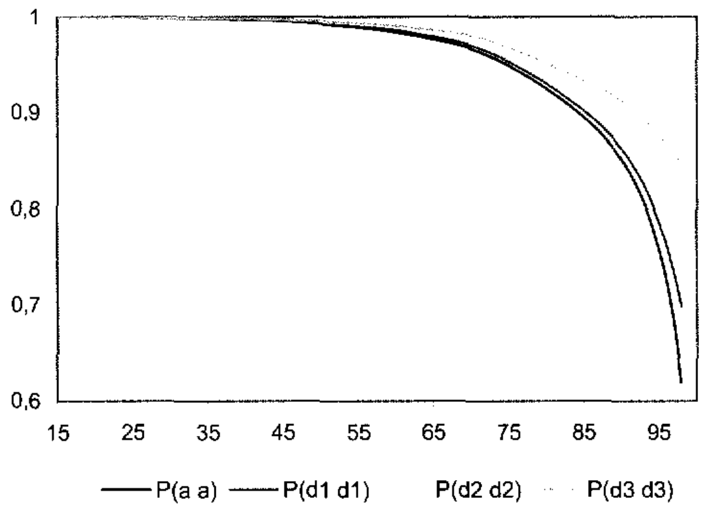


**Gráfico 3.** Evolución de las probabilidades de permanencia

En el gráfico 3 se observa que las probabilidades de permanencia en cada estado son decrecientes con la edad, satisfaciéndose que $p_x^{d_3d_3} > p_x^{d_2d_2} > p_x^{d_1d_1} > p_x^{aa}$.

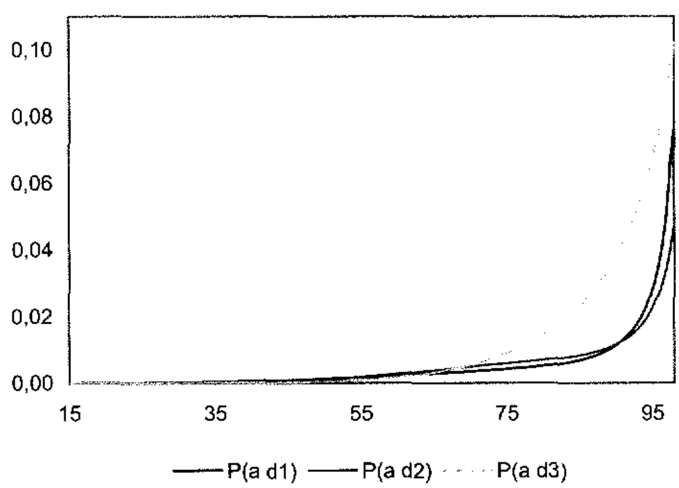


**Gráfico 4.** Evolución de las probabilidades de transición de autónomo a los distintos grados de dependencia

En el gráfico 4 se muestra como las probabilidades de transición de autónomo a cualquier grado de dependencia son crecientes con la edad.

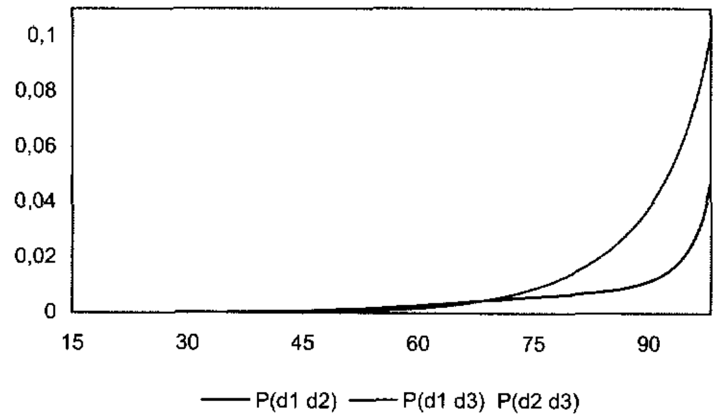


**Gráfico 5.** Evolución de las probabilidades de transición entre estados de dependencia

En el gráfico 5 se observa como las probabilidades de transición entre estados de dependencia también son crecientes con la edad, pero al asumir que $\delta_x^{d_1d_2} = \delta_x^{d_2d_3} = \delta_x^{d_1d_3} = 0$ entonces $p_x^{d_1d_2} = p_x^{ad_2}$ y $p_x^{d_1d_3} = p_x^{d_2d_3} = p_x^{ad_3}$

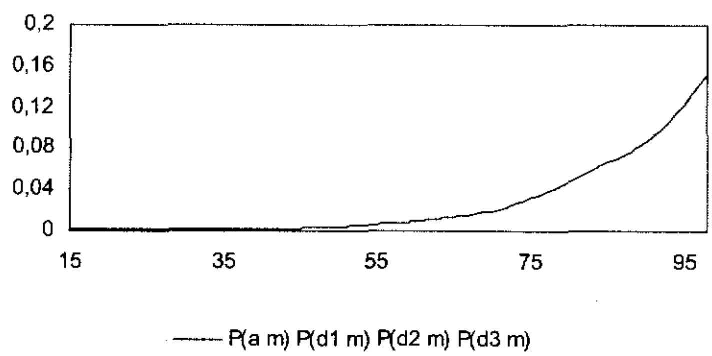


**Gráfico 6.** Evolución de las probabilidades de fallecimiento de los diferentes estados

Por último, en el gráfico 6, al haber asumido la hipótesis que $\delta_x^{d_1m} = \delta_x^{d_2m} = \delta_x^{d_3m} = 0$ resulta que $p_x^{d_1m} = p_x^{d_2m} = p_x^{d_3m} = p_x^{am} = q_x$ .

## 4. Análisis de sensibilidad de las probabilidades de transición

En este epígrafe se analiza la sensibilidad de la matriz de transición al variar, o bien, los recargos por fallecimiento de los dependientes, o bien, los recargos de transición entre los estado de dependencia.

### 4.1. Variación de los recargos por fallecimiento de los dependientes $\delta_x^{d_1m}, \delta_x^{d_2m}, \delta_x^{d_3m}$

En el supuesto que aumenten los tres recargos simultáneamente $\Delta\delta_x^{d_1m}$, $\Delta\delta_x^{d_2m}$, $\Delta\delta_x^{d_3m}$ entonces aumentan, por hipótesis, las probabilidades $p_x^{d_1m}, p_x^{d_2m}, p_x^{d_3m}$ y por tanto disminuye $p_x^{am}$ . Como las leyes de supervivencia de los dependientes vienen dadas, al aumentar $p_x^{d_1m}, p_x^{d_2m}, p_x^{d_3m}$ entonces disminuyen las probabilidades de permanencia $p_x^{d_1d_1}$, $p_x^{d_2d_2}$, $p_x^{d_3d_3}$ y para compensar este efecto deben aumentar las probabilidades de los autónomos que pasan a dependientes $p_x^{ad_1}$, $p_x^{ad_2}$, $p_x^{ad_3}$ y los tránsitos entre dependientes $p_x^{d_1d_2}$, $p_x^{d_1d_3}$, $p_x^{d_2d_3}$ . Las variaciones que experimentan los elementos de la matriz de transición se resumen en la siguiente matriz de variaciones:

| | $a$ | $d_1$ | $d_2$ | $d_3$ | $m$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $= p_x^{aa}$ | $\Delta\ p_x^{ad_1}$ | $\Delta\ p_x^{ad_2}$ | $\Delta\ p_x^{ad_3}$ | $\nabla\ p_x^{am}$ |
| $d_1$ | 0 | $\nabla\ p_x^{d_1d_1}$ | $\Delta\ p_x^{d_1d_2}$ | $\Delta\ p_x^{d_1d_3}$ | $\Delta\ p_x^{d_1m}$ |
| $d_2$ | 0 | 0 | $\nabla\ p_x^{d_2d_2}$ | $\Delta\ p_x^{d_2d_3}$ | $\Delta\ p_x^{d_2m}$ |
| $d_3$ | 0 | 0 | 0 | $\nabla\ p_x^{d_3d_3}$ | $\Delta\ p_x^{d_3m}$ |
| $m$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

**Tabla 4**. Matriz de variaciones

Si se aumenta únicamente el recargo de fallecimiento de los dependientes moderados $\Delta\delta_x^{d_1 m}$ entonces aumenta $p_x^{d_1 m}$ y disminuye $p_x^{am}$, quedando el resto de variaciones reflejado en la matriz de variaciones siguiente:

| | $a$ | $d_1$ | $d_2$ | $d_3$ | $m$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $=p_x^{aa}$ | $\Delta\ p_x^{ad_1}$ | $=p_x^{ad_2}$ | $=p_x^{ad_3}$ | $\nabla\ p_x^{am}$ |
| $d_1$ | 0 | $\nabla\ p_x^{d_1 d_1}$ | $=p_x^{d_1 d_2}$ | $=p_x^{d_1 d_3}$ | $\Delta\ p_x^{d_1 m}$ |
| $d_2$ | 0 | 0 | $=p_x^{d_2 d_2}$ | $=p_x^{d_2 d_3}$ | $=p_x^{d_2 m}$ |
| $d_3$ | 0 | 0 | 0 | $=p_x^{d_3 d_3}$ | $=p_x^{d_3 m}$ |
| $m$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

**Tabla 5**. Matriz de variaciones

Si se aumenta únicamente el recargo de fallecimiento de los dependientes severos $\Delta\delta_x^{d_2 m}$ entonces aumenta $p_x^{d_2 m}$ y disminuye de nuevo $p_x^{am}$, quedando el resto de variaciones reflejado en la matriz de variaciones:

| | $a$ | $d_1$ | $d_2$ | $d_3$ | $m$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $=p_x^{aa}$ | $\Delta\ p_x^{ad_1}$ | $\Delta\ p_x^{ad_2}$ | $=p_x^{ad_3}$ | $\nabla\ p_x^{am}$ |
| $d_1$ | 0 | $\nabla\ p_x^{d_1 d_1}$ | $\Delta\ p_x^{d_1 d_2}$ | $=p_x^{d_1 d_3}$ | $=p_x^{d_1 m}$ |
| $d_2$ | 0 | 0 | $\nabla\ p_x^{d_2 d_2}$ | $=p_x^{d_2 d_3}$ | $\nabla\ p_x^{d_2 m}$ |
| $d_3$ | 0 | 0 | 0 | $=p_x^{d_3 d_3}$ | $=p_x^{d_3 m}$ |
| $m$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

**Tabla 6**. Matriz de variaciones

Por último, si se aumenta únicamente el recargo de fallecimiento de los dependientes totales $\Delta\delta_x^{d_3m}$ entonces aumenta $p_x^{d_3m}$ y disminuye de nuevo $p_x^{am}$, quedando el resto de variaciones reflejado en la siguiente matriz:

| | $a$ | $d_1$ | $d_2$ | $d_3$ | $m$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | 0 | $\Delta\ p_x^{ad_1}$ | $\Delta\ p_x^{ad_2}$ | $\Delta\ p_x^{ad_3}$ | $\nabla\ p_x^{am}$ |
| $d_1$ | 0 | $\nabla\ p_x^{d_1d_1}$ | $\Delta\ p_x^{d_1d_2}$ | $\Delta\ p_x^{d_1d_3}$ | $=p_x^{d_1m}$ |
| $d_2$ | 0 | 0 | $\nabla\ p_x^{d_2d_2}$ | $\Delta\ p_x^{d_2d_3}$ | $=p_x^{d_2m}$ |
| $d_3$ | 0 | 0 | 0 | $\nabla\ p_x^{d_3d_3}$ | $\Delta\ p_x^{d_3m}$ |
| $m$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

**Tabla 7**. Matriz de variaciones

## 4.2. Variación de los recargos de transición entre dependientes $\delta_x^{d_1d_2}, \delta_x^{d_1d_3}, \delta_x^{d_2d_3}$

En el supuesto que aumenten los tres recargos simultáneamente $\Delta\delta_x^{d_1d_2}$, $\Delta\delta_x^{d_2d_3}$, $\Delta\delta_x^{d_1d_3}$ entonces aumentan, por hipótesis, las probabilidades $p_x^{d_1d_2}, p_x^{d_1d_3}, p_x^{d_2d_3}$ y permanecen invariantes las probabilidades de fallecimiento $p_x^{d_1m}, p_x^{d_2m}, p_x^{d_3m}$, $p_x^{am}$. Como las leyes de supervivencia de los dependientes vienen dadas entonces al no variar $p_x^{d_3m}$ tampoco lo hace $p_x^{d_3d_3}$. El resto de variaciones se muestran en la siguiente matriz de variaciones. Cabe destacar que la probabilidad $p_x^{ad_2}$ disminuye para las edades más jóvenes y luego aumenta.

| | $a$ | $d_1$ | $d_2$ | $d_3$ | $m$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $= p_x^{aa}$ | $\Delta\ p_x^{ad_1}$ | $\nabla\ \Delta\ p_x^{ad_2}$ | $\nabla\ p_x^{ad_3}$ | $= p_x^{am}$ |
| $d_1$ | 0 | $\nabla\ p_x^{d_1d_1}$ | $\Delta\ p_x^{d_1d_2}$ | $\Delta\ p_x^{d_1d_3}$ | $= p_x^{d_1m}$ |
| $d_2$ | 0 | 0 | $\nabla\ p_x^{d_2d_2}$ | $\Delta\ p_x^{d_2d_3}$ | $= p_x^{d_2m}$ |
| $d_3$ | 0 | 0 | 0 | $= p_x^{d_3d_3}$ | $= p_x^{d_3m}$ |
| $m$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

**Tabla 8**. Matriz de variaciones

Si se aumenta únicamente el recargo de tránsito de dependiente moderado a dependiente severo $\Delta\ \delta_x^{d_1d_2}$ entonces aumenta $p_x^{d_1d_2}$ y no varían las probabilidades $p_x^{d_1d_3}$ y $p_x^{d_2d_3}$. Cabe destacar que $p_x^{ad_3}$ disminuye siempre, quedando el resto de variaciones reflejado en la siguiente matriz de variaciones:

| | $a$ | $d_1$ | $d_2$ | $d_3$ | $m$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $= p_x^{aa}$ | $\Delta\ p_x^{ad_1}$ | $\nabla\ p_x^{ad_2}$ | $= p_x^{ad_3}$ | $= p_x^{am}$ |
| $d_1$ | 0 | $\nabla\ p_x^{d_1d_1}$ | $\Delta\ p_x^{d_1d_2}$ | $= p_x^{d_1d_3}$ | $= p_x^{d_1m}$ |
| $d_2$ | 0 | 0 | $= p_x^{d_2d_2}$ | $= p_x^{d_2d_3}$ | $= p_x^{d_2m}$ |
| $d_3$ | 0 | 0 | 0 | $= p_x^{d_3d_3}$ | $= p_x^{d_3m}$ |
| $m$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

**Tabla 9.** Matriz de variaciones

Si se aumenta únicamente el recargo de tránsito de dependiente moderado a dependiente total $\Delta\ \delta_x^{d_1d_3}$ entonces aumenta $p_x^{d_1d_3}$ y disminuyen las probabilidades $p_x^{d_1d_2}$ y $p_x^{d_2d_3}$, quedando el resto de variaciones reflejado en la siguiente matriz:

| | $a$ | $d_1$ | $d_2$ | $d_3$ | $m$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $=p_x^{aa}$ | $\Delta\ p_x^{ad_1}$ | $\nabla\ p_x^{ad_2}$ | $\nabla\ p_x^{ad_3}$ | $=p_x^{am}$ |
| $d_1$ | 0 | $\nabla\ p_x^{d_1d_1}$ | $\nabla\ p_x^{d_1d_2}$ | $\Delta\ p_x^{d_1d_3}$ | $=p_x^{d_1m}$ |
| $d_2$ | 0 | 0 | $\Delta\ p_x^{d_2d_2}$ | $\nabla\ p_x^{d_2d_3}$ | $=p_x^{d_2m}$ |
| $d_3$ | 0 | 0 | 0 | $=p_x^{d_3d_3}$ | $=p_x^{d_3m}$ |
| $m$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

**Tabla 10.** Matriz de variaciones

Por último, si se aumenta únicamente el recargo de tránsito de dependiente severo a dependiente total $\Delta\ \delta_x^{d_2d_3}$ entonces aumenta $p_x^{d_2d_3}$ y disminuye la probabilidad $p_x^{d_1d_3}$ y aumenta la probabilidad $p_x^{d_1d_2}$, quedando el resto de variaciones reflejado en la siguiente matriz:

| | $a$ | $d_1$ | $d_2$ | $d_3$ | $m$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $=p_x^{aa}$ | $=p_x^{ad_1}$ | $\Delta\ p_x^{ad_2}$ | $\nabla\ p_x^{ad_3}$ | $=p_x^{am}$ |
| $d_1$ | 0 | $=p_x^{d_1d_1}$ | $\Delta\ p_x^{d_1d_2}$ | $\nabla\ p_x^{d_1d_3}$ | $=p_x^{d_1m}$ |
| $d_2$ | 0 | 0 | $\nabla\ p_x^{d_2d_2}$ | $\Delta\ p_x^{d_2d_3}$ | $=p_x^{d_2m}$ |
| $d_3$ | 0 | 0 | 0 | $=p_x^{d_3d_3}$ | $=p_x^{d_3m}$ |
| $m$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

**Tabla 11.** Matriz de variaciones

## 5. Conclusiones

En este trabajo se ha propuesto un modelo basado en un proceso de Markov estacionario el cual ha permitido cuantificar las probabilidades de transición anuales entre los distintos estados, a partir de la ley de supervivencia de la población general y de las tasas de prevalencia de la población dependiente.

El modelo incorpora como hipótesis adicionales para su determinación, el conocimiento de los recargos de fallecimiento de cada uno de los estados $\delta_x^{am}, \delta_x^{d_1m}, \delta_x^{d_2m}, \delta_x^{d_3m}$ y los recargos asociados a las distintas transiciones entre estados de dependencia $\delta_x^{d_1d_2}, \delta_x^{d_2d_3}, \delta_x^{d_2d_3}$.

A partir de la ley de supervivencia de la población general GRM-95 y de las tasas de prevalencia obtenidas mediante una primera aproximación de la Encuesta sobre Discapacidades, Deficiencias y Estado de Salud (1999) llevada a cabo por el Instituto Nacional de Estadística (INE) y para el caso concreto $\delta_x^{d_1m} = \delta_x^{d_2m} = \delta_x^{d_3m} = \delta_x^{d_1d_2} = \delta_x^{d_2d_3} = \delta_x^{d_1d_3} = 0$ se han obtenido las leyes de supervivencia del colectivo de autónomos, del colectivo de dependientes de grado 1, de grado 2 y de grado 3, y las probabilidades de transición correspondientes. Por último, se ha realizado un análisis de sensibilidad de dichas probabilidades con el objeto de obtener las relaciones existentes entre las diferentes probabilidades de transición.

## 6. Bibliografía

**Alegre, A. (1990).** Valoración actuarial de prestaciones relacionadas con la invalidez. Publicacions Universidad de Barcelona. Barcelona.

**Alegre, A.; Ayuso, M.; Guillén, M.; Monteverde, M. y Pociello, E. (2004).** Avance de la medición de la tasa de prevalencia de la dependencia en España y criterios de valoración de la severidad. Revista Actuarios nº 22 Mayo/Junio 2004, pp. 27-29.

**Amsler, M.H. (1968).** Les chaînes de Markov des assurances vie, invalidité et maladie. Transactions of the 18th International Congress of Actuaries, Mónaco, vol. 5, pp. 731-746.
**Haberman, S. y Pitacco, E. (1999).** Actuarial models for disability insurance. Chapman and Hall. Londres.
**Hoem, J.M. (1969).** Markov chain models in life insurance. Blätter der deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematiker IX, no. 2, pp. 91-107.
**INE., (2000).** Encuesta sobre Discapacidades, Deficiencias y Estado de Salud de 1999. Madrid.
**INE., (2001).** Proyecciones de población. Madrid.
**Pitacco, E, (1995).** Modelli attuariali per le assicurazioni sulla salute. CERAP.
**Rickayzen, B.D. y Walsh, E.P. (2002).** A multi-state model of disability for the United Kingdom: Implications for future need for Long-Term Care for the elderly. British Actuarial Journal, n. 8, II, pp. 1-53. London.
**Rivera, J. (2001).** El seguro de dependencia. Actuarios. Madrid.
**Rodríguez, G. (2000).** La protección social de la dependencia. Ministerio de Trabajo y Asuntos Sociales. Servicios Sociales. Madrid.
**Wolthuis, H (1994).** Life insurance Mathematics (The Markovian model). CAIRE Education series n. 2. University of Amsterdam. Bruselas.