APLICACIONES DE LAS TRANSFORMADAS DE LAPLACE A LA TEORÍA DEL RIESGO*

Maite Mármol[A], M.Mercè Claramunt[B] y Anna Castañer[C]
Profesoras del Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial. Universitat de Barcelona.

RESUMEN

En este trabajo se presenta una aproximación de las aplicaciones de las transformadas de Laplace para la resolución de problemas relacionados con la solvencia y la teoría del riesgo. Asumiendo el proceso clásico de las reservas recogemos la obtención de la probabilidad de supervivencia. Nos centramos en los siguientes apartados en la probabilidad de que las reservas alcancen un determinado nivel b , y finalmente trabajamos con el modelo modificado con una barrera de dividendos constantes, planteando el cálculo de la esperanza del valor actual de los dividendos.

PALABRAS CLAVE: transformadas de Laplace, probabilidad de supervivencia, barrera constante, esperanza del valor actual de los dividendos.

[A] Avda. Diagonal, 690. 08034 Barcelona. Tel: 93.403.57.44 Fax: 93.4037272. mmarmol@ub.edu.
[B] Avda. Diagonal, 696. 08034 Barcelona. Tel: 93.403.57.44 Fax: 93.4037272. mmclaramunt@ub.edu.
[C] Avda. Diagonal, 690. 08034 Barcelona. Tel: 93.402.19.51 Fax: 93.4034892. acastaner@ub.edu.
*Trabajo financiado parcialmente por el Ministerio de Educación y Ciencia y FEDER 2006. MTM2006-09920.

1. INTRODUCCIÓN

En la literatura actuarial encontramos mucha bibliografía que plantea la resolución de problemas relacionados con la solvencia y la teoría del riesgo con el uso de transformadas de Laplace. En este trabajo presentamos una aproximación de las aplicaciones de las transformadas en el planteamiento de diferentes cuestiones.

El segundo apartado del trabajo es un breve recordatorio de los conceptos básicos de la Teoría del Riesgo. La bibliografía respecto a este tema es muy amplia, y algunos de los manuales básicos están referenciados a lo largo de esta introducción.

A continuación planteamos la aplicación de las Transformadas de Laplace para solucionar problemas planteados en la Teoría del Riesgo. En el tercero apartado, asumiendo el proceso clásico de las reservas, es decir, asumiendo que el número de siniestros sigue una distribución de Poisson (y por tanto que el tiempo transcurrido entre dos siniestros consecutivos sigue una distribución exponencial) recogemos la obtención de la probabilidad de supervivencia, $\delta(u)$ para unas reservas iniciales $R(0)=u$.

En el apartado 4 nos centramos en la probabilidad de que las reservas alcancen un determinado nivel b, sabiendo que el nivel inicial de las reservas es $R(0)=u$ El cálculo de esta probabilidad, representada por $\chi(u,b)$, está resuelto asumiendo que el tiempo de interocurrencia entre siniestros sigue una distribución exponencial. A su vez asumimos que la cuantía individual de un siniestro se puede distribuir según una exponencial o bien según una distribución Erlang.

Finalmente, trabajamos con el modelo modificado con una barrera de dividendos constantes, $b(t)=b$ de tal forma que siempre que las reservas alcancen la barrera, los ingresos por primas se pagan en forma de dividendos hasta la ocurrencia del siguiente siniestro. En este modelo planteamos el cálculo de la esperanza del valor actual de los dividendos, $W(u,b)$ pero interocurrencia exponencial, asumiendo que la cuantía individual de los siniestros se distribuye según una exponencial y una Erlang $(2,\beta)$.

2. INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DEL RIESGO

En Gerber (1979) se define la Teoría del Riesgo como el conjunto de ideas para diseñar, dirigir y regular una empresa de riesgos. Según Panjer (1986) el objeto de estudio de la Teoría del Riesgo son las fluctuaciones aleatorias en los resultados financieros del asegurador u otras empresas de riesgo. Esas fluctuaciones tienen diversos orígenes, centrándose la Teoría del Riesgo básicamente en la modelización de la cuantía total de los siniestros de una cartera de riesgos.

Por tanto, para estudiar la solvencia de las entidades aseguradoras, debemos aproximarnos al comportamiento estadístico de la siniestralidad. La modelización de la cuantía total de los siniestros se puede hacer desde el enfoque de la Teoría Individual o de la Teoría Colectiva. Trabajaremos con esta segunda opción que nos lleva a considerar la cartera de riesgos como una corriente de siniestros cuyo volumen depende del número de siniestros y de su cuantía. Por tanto, analizaremos la cartera como un todo, prescindiendo de los elementos individuales. En este caso S (coste total o siniestralidad total) es el resultado de sumar el importe de todos los siniestros ocurridos.

Recogemos a continuación la definición de las variables utilizadas en el proceso básico de las reservas (Gerber (1979), Beard et al. (1984), Bowers et al. (1987), Grandell (1991), Panjer and Willmot (1992), Vegas and Nieto de Alba (1993), Daykin et al. (1994)), en el que se considera como riesgo básico las fluctuaciones de la siniestralidad agregada, dejándose de lado la consideración de otra serie de factores como ingresos financieros, inflación, cambios en la cartera.....

2.1 La distribución de la siniestralidad agregada

En la teoría colectiva del riesgo, la siniestralidad agregada en un período para una cartera, se considera la suma de un número estocástico de siniestros *(N)* con cuantías z_i , $i=1,2,...,N$, con z_i idéntica e independientemente distribuidas, e independientes de N.

Por tanto

$$S=\sum_{i=1}^{N} z_i$$

En este caso la función distribución $F_S(s)$ puede calcularse como,

$$F_S(s)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot F_z^{k^*}(s)$$

donde

$$p_k = P[N=k]$$

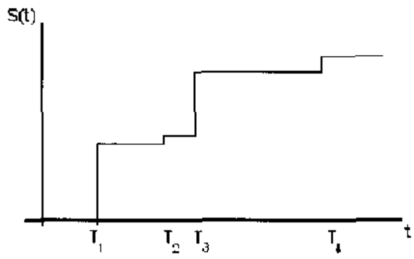
y $F_z^{k^*}$ es la función distribución de la *k-convolución* de la cuantía de los siniestros.

Más en general, y debido a la necesidad de analizar períodos de tiempo más largos, se define *S(t)* como el proceso estocástico de la siniestralidad agregada, siendo

$$S(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} z_i$$

donde *N(t)* es el proceso que indica el número de siniestros hasta el momento t, siendo $S(t)=0$ si $N(t)=0$.

S(t) puede ser representado gráficamente de la siguiente forma:



Cada ocurrencia de un siniestro en los momentos $T_i, i=1,2,3...$ queda representada por un salto vertical, siendo la altura del salto la cuantía individual de cada uno de los siniestros. El tiempo está representado en abcisas, y la altura $S(t)$ en cada momento indica la siniestralidad agregada en el intervalo $(0,t]$. El proceso es un Proceso Estocástico Compuesto, ya que tanto el momento de ocurrencia como el número de siniestros son fenómenos aleatorios, siendo la cuantía individual de cada siniestro una variable aleatoria.

En concreto, si $N(t)$ es un proceso de Poisson, $S(t)$ es un proceso de Poisson compuesto. Debido a la importancia de los procesos de Poisson en los modelos de la teoría del riesgo, para analizar propiedades y definiciones sobre su comportamiento que nos permiten situar y caracterizar los procesos de Poisson dentro de los procesos estocásticos ver Feller (1971), Beard et al. (1984), Bowers et al. (1987), Latorre (1992), Panjer and Willmot (1992) o Asmussen (2000).

2.2 Criterio de la probabilidad de ruina

Profundizamos a continuación en el proceso de las reservas, $R(t)$, básico para un análisis de la solvencia de las entidades aseguradoras, ya que la ruina se producirá en el momento en que las reservas libres tengan una realización negativa.

Se define el momento de ruina τ, como:

$$\tau = \min\{t : t \geq 0 \mid R(t) < 0\}, t \in R$$

siendo $R(t)$ el nivel de reservas en el momento t, y $R(\tau)$ el nivel de las reservas negativas en el momento de la ruina. Evidentemente para $\tau = \infty$, se cumple que $R(t) \geq 0$ para todo t.

Se denomina $\psi(u)$ a la probabilidad de ruina, y se define como;

$$\psi(u) = P[\tau < \infty],$$

siendo $\psi(u)$ la probabilidad de ruina en tiempo infinito y campo continuo, denominada probabilidad de ruina última.

La probabilidad de supervivencia $\delta(u)$ se define como la probabilidad complementaria,

$$\delta(u) = 1 - \psi(u).$$

El caso en el que nos centramos a continuación es el modelo básico asumiendo análisis continuo, (Gerber (1979), Latorre (1992), Panjer and Willmot (1992), Bowers et al. (1987)), donde en el cálculo de las reservas no se incluyen elementos como inflación, rendimientos de la inversión, gastos o reparto de dividendos, resultando la ecuación que determina el proceso de reservas;

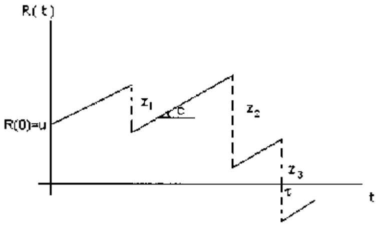
$$R(t) = u + c \cdot t - S(t), \tag{1}$$

siendo u el nivel inicial de las reservas, c la intensidad de prima en t, cumpliéndose que $c > E[N] \cdot E[z]$, es decir, que existe un recargo de seguridad ρ positivo que recarga la prima pura, de tal forma que:

$$\rho = \frac{c}{E[N] \cdot E[z]} - 1.$$

Los gastos vienen determinados por la siniestralidad agregada $S(t)$, es decir, la suma de los N siniestros de cuantía individual z_i en el período $(0,t]$.

Podemos representar gráficamente el proceso de las reservas como:



Este modelo conlleva que las primas se ingresan de forma continua, siendo el recargo de seguridad ρ proporcional a la prima pura, y la prima c constante, lo que implica asumir una cartera estable con unos ingresos por primas no aleatorios.

2.3 Modelo con barrera de dividendos constante

Como modelo alternativo, se encuentra en la literatura actuarial un enfoque que propone el reparto de parte de las reservas en forma de dividendos, es decir, se introducen políticas que diseñan el reparto de dividendos.

La base técnica para proponer el control de las reservas nace de la crítica de De Finneti (1957). En ella se afirma que bajo las hipótesis clásicas del proceso de riesgo, para unas reservas iniciales $R(0)=u$, si la intensidad de prima es superior al producto de la cuantía media de los siniestros, $c > E[N] \cdot E[z]$ (es decir, siempre que el recargo de seguridad es positivo, $\rho > 0$), analizando el caso de probabilidad de ruina última, las trayectorias que no se arruinan tienden a infinito cuando t tiende a infinito con probabilidad 1.

Por tanto las políticas de dividendos aparecen como una forma de control de un crecimiento ilimitado en $R(t)$.

Por otro lado, el reparto de dividendos tiene sentido en si mismo como un objetivo de la gestora de la cartera de riesgos, ya que esas cuantías pueden ser interpretadas como excesos de beneficios cuya finalidad podría ser la de cubrir otras carteras de riesgos con resultados deficitarios.

Como dividendos repartidos a los accionistas, el papel de éstos como incentivos para conseguir el capital inicial (nivel inicial de las reservas u) es indudable.

De esta justificación de la política de dividendos en la gestión de una cartera de seguros surge la necesidad de cuantificar la parte de las reservas que se destinan al pago de dividendos. La cuantificación de los dividendos aparece como una medida indispensable para la valoración de las políticas de reparto introducidas en el modelo.

Además, el reparto de dividendos afectará también a la probabilidad de ruina. Es evidente que la limitación en el nivel de acumulación de las reservas provoca que la probabilidad de ruina sea mayor. La causa es que siniestros que en el modelo clásico no provocan niveles de reservas negativas, s lo hacen en el modelo con reparto de dividendos, ya que pueden producir la ruina debido a que el nivel de las reservas se ve disminuido por las cuantías repartidas como dividendos.

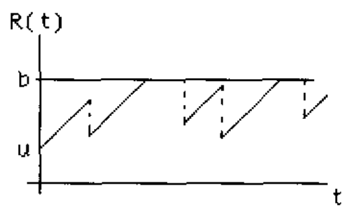
La política de dividendos que planteamos en este apartado es aquella que determina un nivel máximo de acumulación de reservas libres constante, de tal forma que, siempre que el proceso de reservas alcance el tope predeterminado, se empiezan a repartir dividendos hasta la ocurrencia del siguiente siniestro. Asumimos, por tanto, reparto continuo.

Matemáticamente modificaremos el modelo clásico de la teoría del riesgo con la inclusión de una barrera de dividendos que expresaremos como $b(t)=b$. Así, el proceso de las reservas del proceso clásico, $R(t)=u+c\cdot t-S(t)$, siendo $dR(t)=c\cdot dt-dS(t)$, si asumimos una barrera $b(t)=b$, es

$$dR(t)=\begin{cases} c\cdot dt-dS(t) & si \quad R(t)<b \\ -dS(t) & si \quad R(t)=b. \end{cases}$$

Como ya hemos comentado, la inclusión de barreras de dividendos afecta a la probabilidad de ruina. En el modelo modificado con una barrera constante, $b(t)=b$, la probabilidad de ruina es uno. Independientemente del nivel concreto en el que impongamos la barrera constante, todas las trayectorias de las reservas acabarán arruinándose.

Gráficamente,



En este contexto, se define la esperanza del valor actual de los dividendos como

$$W(u,b)=E\left[\int_0^T D(t)\cdot e^{-\delta\cdot t}\cdot dt\right]$$

siendo δ el tanto instantáneo de actualización.

3. CÁLCULO DE LA PROBABILIDAD DE SUPERVIVENCIA

Consideramos que el número de siniestros sigue un proceso de Poisson, y que por tanto los tiempos de interocurrencia entre siniestros consecutivos siguen una exponencial, $T_i \sim Exp(\lambda)$. Partimos de la siguiente expresión, (Mikosch (2004))

$$\delta'(u)=\frac{\lambda}{c}\delta(u)-\frac{\lambda}{c}\int_0^u\delta(u-z)f(z)dz$$

Si aplicamos transformadas de Laplace a esta expresión, considerando algunas propiedades de las mismas, obtenemos[1]

$$s\tilde{\delta}(s)-\delta(0)=\frac{\lambda}{c}\tilde{\delta}(s)-\frac{\lambda}{c}\tilde{\delta}(s)\tilde{f}(s) \tag{2}$$

siendo,

$$\tilde{\delta}(s)=\int_0^\infty e^{-su}\delta(u)ds$$

$$\tilde{f}(s)=\int_0^\infty e^{-sz}f(z)ds$$

y despejando $\tilde{\delta}(s)$ de la expresión (2),

$$\tilde{\delta}(s)=\frac{c\delta(0)}{cs-\lambda+\lambda\tilde{f}(s)}. \tag{3}$$

Una vez obtenida la expresión de la Transformada de Laplace de la probabilidad de supervivencia asumiendo interocurrencia exponencial, solucionamos a continuación el caso en que la cuantía individual de los siniestros sigue una exponencial.

---

[1] Propiedades básicas:

- Si $f(t)$ tiene transformada de Laplace $\tilde{f}(s)$, entonces la transformada de la derivada de la función, $L\{f'(t)\}$, será:

  $$L\{f'(t)\}=s\cdot\tilde{f}(s)-f(0).$$

- Sean $f(t)$ y $g(t)$ dos funciones continuas a trozos en $[0,\infty)$ y de orden exponencial α, y sus correspondientes transformadas de Laplace sean $\tilde{f}(s)$ y $\tilde{g}(s)$. La convolución de $f(t)$ y $g(t)$, denotada por $f*g$, se define por la función:

  $$(f*g)(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

  Entonces la transformada de la convolución será:

  $$L\{(f*g)(t)\}=\tilde{f}(s)\cdot\tilde{g}(s),$$

  para $s>\alpha$.

3.1 Cuantía de los siniestros Exponencial(γ)

Si la cuantía individual de un siniestro sigue una exponencial de parámetro γ, tal que $f(z)=\gamma e^{-\gamma z}$, sabemos que su transformada de Laplace es,

$$\tilde{f}(s)=\frac{\gamma}{s+\gamma}. \tag{4}$$

Podemos observar que es una transformada racional de la forma $\tilde{f}(s)=\dfrac{Q_{r-1}(s)}{P_r(s)}$, lo que nos permite aplicar el método de las fracciones parciales.

Sustituyendo (4) en (3), obtenemos

$$\tilde{\delta}(s)=\frac{c\delta(0)(s+\gamma)}{cs^2+(c\gamma-\lambda)s}. \tag{5}$$

Aplicando el método de fracciones parciales, podemos escribir (5) como:

$$\tilde{\delta}(s)=\frac{c\delta(0)(s+\gamma)}{cs^2+(c\gamma-\lambda)s}=\frac{A_1}{(s-s_1)}+\frac{A_2}{(s-s_2)},$$

siendo s_1 y s_2 las raíces del denominador $cs^2+(c\gamma-\lambda)s$, es decir

$$s_1=0$$
$$s_2=-\frac{c\gamma-\lambda}{c}=\frac{-\rho\gamma}{1+\rho}.$$

A continuación invertimos (5), y teniendo en cuenta que si $g(x)=e^{ax}$, su transformada de Laplace es $\tilde{g}(s)=\dfrac{1}{s-a}$, y conociendo el valor de las raíces s_1 y s_2 obtenemos

$$\delta(u) = A_1 + A_2 e^{s_2 u}. \qquad (6)$$

Condiciones de contorno Para obtener el valor de la probabilidad de supervivencia $\delta(u)$, debemos obtener el valor de las constantes A_1 y A_2.

Sabemos que $\lim_{u\to\infty} \delta(u) = 1$, y teniendo en cuenta que $s_2 < 0$, a partir de (6)

$$\lim_{u\to\infty} \delta(u) = 1 = A_1.$$

Para conocer A_2 recordamos que $\delta(0) = \frac{\rho}{1+\rho}$ (Mikosch (2004)), por tanto haciendo $u = 0$ en (6)

$$\delta(0) = \frac{\rho}{1+\rho} = 1 + A_2,$$

de donde

$$A_2 = \frac{\rho}{1+\rho} - 1 = \frac{-1}{1+\rho}.$$

Por tanto, una vez conocido A_1 y A_2, sustituyendo en (6), obtenemos la expresión para la probabilidad de supervivencia,

$$\delta(u) = 1 - \frac{1}{1+\rho} e^{-\frac{\rho\gamma}{1+\rho}u}.$$

4. CÁLCULO DE $\chi(u,b)$

Se define $\chi(u,b)$ como la probabilidad de que el proceso de las reservas *R(t)* alcance el nivel $b \geq u$ antes de que se produzca la ruina. En este apartado se plantea su cálculo asumiendo que los tiempos de interocurrencia siguen una distribución exponencial.

Consideramos que los tiempos de interocurrencia entre siniestros siguen una exponencial, $T_i \sim Exp(\lambda)$. La ecuación que se plantea de partida siguiendo un argumento diferencial es (Dickson (1998))

$$\chi(u,b)=\int_0^{t_0} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} \chi(u+ct-z,b)f(z)dzdt+\int_{t_0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t}dt, \tag{7}$$

siendo $t_0 = \dfrac{b-u}{c}$.

Sustituyendo $s = u + ct$ en (7) y derivando respecto a u,

$$c\chi'(u,b)-\lambda\chi(u,b)=-\lambda \int_0^{u} \chi(u-z,b)f(z)dz \tag{8}$$

Aplicamos transformadas de Laplace a esta última expresión, y recordando las propiedades obtenemos

$$c\left[s\tilde{\chi}(s)-\chi(0)\right]-\lambda\tilde{\chi}(s)=-\lambda\tilde{\chi}(s)\tilde{f}(s)$$

siendo,

$$\tilde{\chi}(s)=\int_0^{\infty} e^{-su}\chi(u,b)ds$$

$$\tilde{f}(s)=\int_0^{\infty} e^{-sz}f(z)ds,$$

expresión de la que podemos despejar $\tilde{\chi}(s)$ obteniéndose,

$$\tilde{\chi}(s)=\frac{c\chi(0)}{cs-\lambda+\lambda\tilde{f}(s)}. \tag{9}$$

4.1 Cuantía de los siniestros Exponencial (γ)

Si asumimos que la cuantía individual de un siniestro se distribuye según una exponencial de parámetro γ, y recordando que su Transformada de Laplace es $\tilde{f}(s)=\frac{\gamma}{s+\gamma}$, al sustituirla en (9), se obtiene,

$$\tilde{\chi}(s)=\frac{c\chi(0)(s+\gamma)}{cs^2+(c\gamma-\lambda)s}. \tag{10}$$

Aplicamos a continuación fracciones parciales a la expresión (10), que nos permiten escribirla como:

$$\tilde{\chi}(s)=\frac{A_1}{(s-s_1)}+\frac{A_2}{(s-s_2)}, \tag{11}$$

siendo s_1 y s_2 las raíces del denominador

$$cs^2+(c\gamma-\lambda)s=0,$$

es decir,

$$s_1=0$$

$$s_2=-\frac{c\gamma-\lambda}{c}=\frac{-\rho\gamma}{1+\rho}.$$

A continuación invertimos (11), obteniéndose

$$\chi(u,b)=A_1(b)+A_2(b)\cdot e^{s_2u}. \tag{12}$$

Una vez obtenida la expresión (12), y ya conocidos los valores de las raíces, nos falta conocer los coeficientes $A_1(b)$ y $A_2(b)$ para poder obtener el valor de $\chi(u,b)$.

Condiciones de contorno La primera condición que conocemos es $\chi(b,b)=1$, por tanto a partir de (12),

$$\chi\left(b,b\right)=A_1+A_2\cdot e^{s_2 b}=1$$

Para conseguir la segunda condición sustituimos (12) en (8),

$$cA_2 s_2 e^{s_2 b}-\lambda\left(A_1+A_2\cdot e^{s_2 b}\right)=-\lambda\int_0^u\left(A_1+A_2\cdot e^{s_2\left(u-z\right)}\right)\gamma e^{-\gamma z}dz$$

y resolviendo las integrales,

$$\left[cA_2 s_2-\lambda A_2+\frac{\lambda\gamma A_2}{s_2+\gamma}\right]e^{s_2 u}=\left[\lambda A_1+\frac{\lambda\gamma A_2}{s_2+\gamma}\right]e^{-\gamma u}$$

donde el coeficiente de $e^{s_2 u}$ es igual a cero. Así, para que se cumpla la ecuación resultante, igualando el coeficiente de $e^{-\gamma u}$ a cero se obtiene,

$$\lambda A_1+\frac{\lambda\gamma A_2}{s_2+\gamma}=0\Rightarrow A_1=-\frac{\gamma}{s_2+\gamma}A_2.$$

Así, ya tenemos dos ecuaciones,

$$\begin{cases} A_1=1-A_2\cdot e^{s_2 b} \\ A_1=-\dfrac{\gamma}{s_2+\gamma}A_2 \end{cases}$$

y resolviendo el sistema obtenemos los coeficientes A_1 y A_2,

$$\begin{cases} A_1=\dfrac{-\gamma}{\left(s_2+\gamma\right)e^{s_2 b}-\gamma} \\ A_2=\dfrac{\left(s_2+\gamma\right)\gamma}{\left(s_2+\gamma\right)e^{s_2 b}-\gamma}. \end{cases} \qquad (13)$$

Sustituimos a continuación los valores obtenidos en (13) en (12) obteniéndose,

$$\chi(u,b) = \frac{-\gamma}{(s_2+\gamma)e^{s_2 b}-\gamma}+\frac{(s_2+\gamma)\gamma}{(s_2+\gamma)e^{s_2 b}-\gamma}\cdot e^{s_2 u} =$$

$$= \left\{s_2 = \frac{-\rho\gamma}{1+\rho}\right\} = \frac{1-\frac{1}{1+\rho}e^{\frac{-\rho\gamma}{1+\rho}u}}{1-\frac{1}{1+\rho}e^{\frac{-\rho\gamma}{1-\rho}b}},$$

por tanto llegamos a,

$$\chi(u,b) = \frac{1-\frac{1}{1+\rho}e^{\frac{-\rho\gamma}{1+\rho}u}}{1-\frac{1}{1+\rho}e^{\frac{-\rho\gamma}{1-\rho}b}}$$

expresión obtenida de forma alternativa en Dickson and Grey (1984).

4.2 Cuantía de los siniestros Erlang$(2,\beta)$

Si asumimos que la cuantía individual de los siniestros se distribuye según una *Erlang*$(2,\beta)$, siendo su Transformada de Laplace

$\tilde{f}(s) = \frac{\beta^2}{(s+\beta)^2}$, sustituyendo en (9)

$$\tilde{\chi}(s) = \frac{c\chi(0)}{cs-\lambda+\lambda\frac{\beta^2}{(s+\beta)^2}} \tag{14}$$

$$= \frac{c\chi(0)(s+\beta)^2}{cs(s+\beta)^2-\lambda(s+\beta)^2+\lambda\beta^2}.$$

Aplicamos a continuación fracciones parciales a la expresión (14), que nos permiten escribirla como:

$$\tilde{\chi}(s) = \frac{c\chi(0)(s+\beta)^2}{cs^3 + (2\beta c - \lambda)s^2 + (c\beta^2 + 2\lambda\beta)s} \tag{15}$$

$$= \frac{A_1}{(s-s_1)} + \frac{A_2}{(s-s_2)} + \frac{A_3}{(s-s_3)},$$

siendo s_1, s_2 y s_3 las raíces del denominador que podemos escribir como

$$s\left[cs^2 + (2\beta c - \lambda)s + (c\beta^2 + 2\lambda\beta)\right] = 0$$

de donde

$$s_1 = 0$$

$$cs^2 + \left(2\beta c - \lambda\right)s + \left(c\beta^2 - 2\lambda\beta\right) = 0.$$

A continuación invertimos (15), obteniéndose

$$\chi\left(u,b\right) = A_1\left(b\right) + A_2\left(b\right)\cdot e^{s_2 u} + A_3\left(b\right)\cdot e^{s_3 u}. \tag{16}$$

Condiciones de contorno La primera condición que conocemos es $\chi(b,b) = 1$, por tanto

$$\chi\left(b,b\right) = A_1 + A_2 \cdot e^{s_2 b} + A_3 \cdot e^{s_3 b} = 1.$$

Para conseguir la segunda y tercera condición sustituimos (16) en (8) obteniéndose

$$c\sum_{i=1}^{3} A_i s_i e^{s_i u} - \lambda\left(\sum_{i=1}^{3} A_i e^{s_i u}\right) = -\lambda\int_0^u \left(\sum_{i=1}^{3} A_i e^{s_i (u-z)}\right)\beta^2 z e^{-\beta z} dz\ ,$$

de donde resolviendo las integrales,

$$\sum_{i=1}^{3} A_i e^{s_i u}\left(\frac{cs^3+(2\beta c-\lambda)s^2+(c\beta^2-2\lambda\beta)s}{(s_i+\beta)^2}\right)=$$
$$=\lambda\beta^2\sum_{i=1}^{3}\frac{A_i u}{(s_i+\beta)}e^{-s_i\beta}+\lambda\beta^2\sum_{i=1}^{3}\frac{A_i}{(s_i+\beta)^2}e^{-s_i\beta},$$

donde el coeficiente de $\sum_{i=1}^{3} A_i e^{s_i u}$ es igual a cero. Igualando el coeficiente de $e^{-s_i\beta}$ a cero se obtiene,

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{A_i}{(s_i+\beta)^2}=0.$$

Por tanto las tres ecuaciones necesarias para el cálculo de los coeficientes A_i, $i=1,2,3$ son:

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\frac{A_i u}{(s_i+\beta)}=0\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{3}\frac{A_i}{(s_i+\beta)^2}=0\\ A_1+A_2e^{s_2 b}+A_3e^{s_3 b}=1.\end{cases}$$

5. CÁLCULO DE $W(u,b)$

Definimos $W(u,b)$ como la esperanza del valor actual de los dividendos repartidos hasta el momento en que se produce la ruina, siendo u el nivel inicial de las reservas, y b el nivel de la barrera, para $0\le u\le b$.

Utilizando un planteamiento diferencial, asumiendo interocurrencia exponencial se puede escribir,

$$
\begin{aligned}
W(u,b) &= (1-\lambda\cdot dt)\cdot W(u+c\cdot dt,b)\cdot e^{-\delta\cdot dt} + \\
&+ \lambda\cdot dt\cdot \int_0^u W(u+c\cdot dt - z,b)\cdot dF(z) + O(dt^2)
\end{aligned}
\tag{17}
$$

donde δ es la tasa de actualización. Para conseguir una ecuación integro-diferencial a partir de (17) hacemos una aproximación lineal del factor de actualización en el punto cero, reorganizamos, dividimos entre dt, y haciendo $dt \to 0$, se obtiene

$$
\frac{\partial W(u,b)}{\partial u} = \frac{\lambda+\delta}{c}\cdot W(u,b) - \frac{\lambda}{c}\cdot \int_0^u W(u-z,b)\cdot f(z)\,dz \tag{18}
$$

ecuación integro-diferencial para la esperanza del valor actual de los dividendos repartidos en un modelo modificado con barrera constante (Büllhmann 1970).

Aplicamos a continuación Transformadas de Laplace a la ecuación (18). A partir de las propiedades de las Transformadas de Laplace, se obtiene:

$$
s\tilde{W}(s) - W(0,b) = \frac{\lambda+\delta}{c}\tilde{W}(s) - \frac{\lambda}{c}\tilde{W}(s)\tilde{f}(s) \tag{19}
$$

siendo,

$$
\tilde{W}(s) = \int_0^\infty e^{-su} W(u,b)ds
$$

$$
\tilde{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sz} f(z)ds.
$$

Agrupando $\tilde{W}(s)$ en (19) se obtiene,

$$
\tilde{W}(s)\left[cs - (\lambda+\delta) + \lambda\tilde{f}(s)\right] = cW(0,b)
$$

de donde, despejando

$$\tilde{W}(s) = \frac{cW(0,b)}{\left[cs - (\lambda + \delta) + \lambda \tilde{f}(s)\right]}. \qquad (20)$$

Una vez obtenida la expresión de la Transformada de Laplace de la esperanza del valor actual de los dividendos repartidos asumiendo una interocurrencia exponencial, desarrollamos en los siguientes apartados el valor de esta expresión asumiendo diferentes cuantías individuales de los siniestros.

5.1 Cuantía de los siniestros exponencial (γ)

Asumimos a continuación que la cuantía individual de los siniestros sigue una distribución exponencial de media $E[z] = \frac{1}{\gamma}$, con función de densidad $f(z) = \gamma e^{-\gamma z}$.

La Transformada de Laplace de $f(z)$ es de la forma $\tilde{f}(s) = \frac{\gamma}{s+\gamma}$. Es una transformada racional de la forma $\tilde{f}(s) = \frac{Q_{r-1}(s)}{P_r(s)}$, que sustituimos en (20), obteniéndose,

$$\tilde{W}(s) = \frac{cW(0,b)(s+\gamma)}{cs^2 - s(\lambda + \delta - c\gamma) - \delta\gamma}.$$

Aplicando fracciones parciales, podemos escribir esta última expresión como:

$$\tilde{W}(s) = \frac{cW(0,b)(s+\gamma)}{cs^2 - s(\lambda + \delta - c\gamma) - \delta\gamma} = \frac{A_1}{(s-s_1)} + \frac{A_2}{(s-s_2)} \qquad (21)$$

siendo s_1 y s_2 las raíces del denominador

$$cs^2 - s(\lambda + \delta - c\gamma) - \delta\gamma = 0\,. \tag{22}$$

A continuación invertimos (21), y se obtiene

$$W(u,b) = A_1(b)\cdot e^{s_1 u} + A_2(b)\cdot e^{s_2 u}. \tag{23}$$

Condiciones de contorno Una vez obtenida la expresión (23), donde ya conocemos el valor de las raíces s_1 y s_2, nos falta conocer los coeficientes $A_1(b)$ y $A_2(b)$. Para ello necesitamos dos ecuaciones que nos permitan obtenerlos.

La primera de ellas la obtenemos sustituyendo en la expresión (18) la estructura de solución (23).

Derivando (23) tenemos,

$$\frac{\partial W(u,b)}{\partial u} = A_1(b)s_1e^{s_1 u} + A_2(b)s_2e^{s_2 u} \tag{24}$$

y sustituyendo (23) y (24) en (18),

$$\begin{aligned} cA_1s_1e^{s_1u} + cA_2s_2e^{s_2u} &= (\lambda+\delta)A_1e^{s_1u} + (\lambda+\delta)A_2e^{s_2u} - \\ &\qquad \lambda\gamma A_1e^{s_1u}\int_0^u e^{-(s_1+\gamma)z}dz - \lambda\gamma A_2e^{s_2u}\int_0^u e^{-(s_2+\gamma)z}dz \end{aligned}$$

de donde, resolviendo la integral, y agrupando coeficientes

$$\begin{aligned} A_1\left[cs_1 - (\lambda+\delta) + \frac{\lambda\gamma}{s_1+\gamma}\right]e^{s_1u} + A_2\left[cs_2 - (\lambda+\delta) + \frac{\lambda\gamma}{s_2+\gamma}\right]e^{s_2u} &= \\ = \left[\frac{\lambda\gamma A_1}{s_1+\gamma} + \frac{\lambda\gamma A_2}{s_2+\gamma}\right]e^{-\gamma u} \end{aligned}$$

En esta última expresión podemos observar que los coeficientes de $e^{s_1 u}$ y $e^{s_2 u}$ coinciden con la ecuación (22), que evidentemente para los valores s_1 y s_2 son cero. Por tanto

$$\frac{\lambda\gamma A_1}{s_1+\gamma}+\frac{\lambda\gamma A_2}{s_2+\gamma}=0$$

es decir,

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{s_1+\gamma}{s_2+\gamma}. \tag{25}$$

Para obtener una segunda ecuación sustituimos (23) en la ecuación que determina el valor de $W(b,b)$[2],

[2] Podemos escribir $W(b,b)$ utilizando el argumento de renovación, como

$$W(b,b)=\int_0^\infty \lambda\cdot e^{-\lambda\cdot t}\cdot\left[c\cdot\int_0^t e^{-\delta\cdot r}\cdot dr+\int_0^b W\left(b-z,b\right)\cdot e^{-\delta\cdot t}\cdot dF\left(z\right)\right]dt\,. \tag{26}$$

Si resolvemos la integral que corresponde al primer sumando de la expresión (26)

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \lambda\cdot e^{-\lambda\cdot t}\cdot c\int_0^t e^{-\delta\cdot r}\cdot dr &= \lambda\cdot c\int_0^\infty e^{-\lambda\cdot t}\left[-\frac{1}{\delta}\cdot\left(e^{-\delta\cdot t}-1\right)\right]\cdot dt= \\ &=-\frac{\lambda\cdot c}{\delta}\cdot\int_0^\infty\left(e^{-(\lambda+\delta)\cdot t}-e^{-\lambda\cdot t}\right)\cdot dt= \\ &=\frac{c}{\lambda+\delta}\end{aligned} \tag{27}$$

Al resolver el segundo sumando de (26)

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \lambda\cdot e^{-\lambda\cdot t}\cdot\int_0^b W\left(b-z,b\right)\cdot e^{-\delta\cdot t}\cdot dF\left(z\right)\cdot dt= \\ &\quad=\lambda\cdot\int_0^b W\left(b-z,b\right)\cdot dF\left(z\right)\cdot\int_0^\infty e^{-(\lambda+\delta)\cdot t}\cdot dt= \\ &\quad=\frac{\lambda}{\lambda+\delta}\cdot\int_0^b W\left(b-z,b\right)\cdot dF\left(z\right)\end{aligned} \tag{28}$$

Al sustituir (27) y (28) en (26)

$$W(b,b)=\frac{c}{\lambda+\delta}+\frac{\lambda}{\lambda+\delta}\cdot\int_0^b W\left(b-z,b\right)\cdot dF\left(z\right) \tag{29}$$

$$W(b,b)=\frac{c}{\lambda+\delta}+\frac{\lambda}{\lambda+\delta}\int_0^b W(b-z,b)\,dF(z) \tag{30}$$

Resolvemos la integral, agrupamos coeficientes, y tenemos en cuenta que el coeficiente de $e^{-\gamma u}$ es cero por (25).

Por tanto, las dos ecuaciones necesarias para el cálculo de los coeficientes A_1 y A_2:

$$\begin{cases} \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{s_1+\gamma}{s_2+\gamma} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{2}\left((\lambda+\delta)A_i-\frac{\lambda\gamma A_i}{s_i+\gamma}\right)e^{s_i b}=c \end{cases} \tag{31}$$

Solucionando el sistema (31), obtenemos A_1 y A_2, que sustituyendo en (23) nos permite obtener,

$$W(u,b)=\frac{-c\dfrac{(s_1+\gamma)}{(s_2+\gamma)}e^{s_1 u}+ce^{s_2 u}}{-\left((\lambda+\delta)-\dfrac{\lambda\gamma}{(s_1+\gamma)}\right)\dfrac{(s_1+\gamma)}{(s_2+\gamma)}e^{s_1 b}+\left((\lambda+\delta)-\dfrac{\lambda\gamma}{(s_2+\gamma)}\right)e^{s_2 b}},$$

expresión obtenida mediante el uso de Transformadas de Laplace, equivalente a la hallada por Büllhman (1970).

5.2 Cuantía de los siniestros Erlang$(2,\beta)$

Si asumimos que la cuantía de los siniestros sigue una distribución Erlang$(2,\beta)$, con función densidad $f(z)=\beta^2 ze^{-\beta z}$, sabemos que la Transformada de Laplace de $f(z)$ es

$$\tilde{f}(s) = \frac{\beta^2}{(s+\beta)^2}.$$

Es una transformada racional de la forma $\tilde{f}(s) = \frac{Q_{r-1}(s)}{P_r(s)}$, siendo el grado del polinomio del denominador r=2. Sustituyendo en (20) se obtiene

$$\tilde{W}(s) = \frac{cW(0,b)(s+\beta)^2}{cs^3 + (2\beta c - (\lambda+\delta))s^2 + (c\beta^2 - 2\beta(\lambda+\delta))s - \delta\beta^2}.$$

Aplicamos a continuación fracciones parciales, que nos permiten escribir esta última expresión como:

$$\begin{aligned}\tilde{W}(s) &= \frac{cW(0,b)(s+\beta)^2}{cs^3 + (2\beta c - (\lambda+\delta))s^2 + (c\beta^2 - 2\beta(\lambda+\delta))s - \delta\beta^2} = \\ &= \frac{A_1}{(s-s_1)} + \frac{A_2}{(s-s_2)} + \frac{A_3}{(s-s_3)}\end{aligned} \tag{32}$$

siendo s_1, s_2 y s_3 las raíces del denominador

$$cs^3 + (2\beta c - (\lambda+\delta))s^2 + (c\beta^2 - 2\beta(\lambda+\delta))s - \delta\beta^2 = 0. \tag{33}$$

A continuación invertimos (32), obteniéndose

$$W(u,b) = A_1(b)e^{s_1u} + A_2(b)e^{s_2u} + A_3(b)e^{s_3u} = \sum_{i=1}^{3} A_i(b)e^{s_iu} \tag{34}$$

Condiciones de contorno De forma equivalente al desarrollo recogido en el caso en que asumíamos una cuantía individual de los siniestros, para obtener el valor de W(u,b) cuando la cuantía individual de los siniestros sigue una distribución Erlang $(2,\beta)$ necesitamos tres ecuaciones que nos permitan obtener los coeficientes $A_1(b)$, $A_2(b)$ y $A_3(b)$.

La primera ecuación la obtenemos recordando la siguiente condición de contorno

$$\left.\frac{\partial W(u,b)}{\partial u}\right|_{u=b} = 1, \tag{35}$$

y sustituyendo (34) en (35) obtenemos la primera ecuación,

$$\sum_{i=1}^{3} A_i(b) s_i e^{s_i u} = 1.$$

Para obtener la siguiente ecuación, partiendo de (18), que podemos escribir como:

$$(\lambda+\delta)W - cW' = \lambda\int_0^u W(u-z,b)\,dF(z)$$

sustituimos la estructura de solución (34), primero en el lado izquierdo de la igualdad:

$$(\lambda+\delta)W - cW' = \sum_{i=1}^{3} A_i e^{s_i u}\left((\lambda+\delta)-cs_i\right), \tag{36}$$

y en el lado derecho de la igualdad:

$$\begin{aligned}\lambda\int_0^u W(u-z,b)\,dF(z) = \lambda\beta^2\sum_{i=1}^{3} A_i e^{s_i u}\frac{1}{(-\beta-s_i)^2} - \\ \lambda\beta^2\sum_{i=1}^{3} A_i e^{-\beta u}\frac{((\beta+s_i)u+1)}{(-\beta-s_i)^2}.\end{aligned} \tag{37}$$

Igualando (36) y (37), y agrupando coeficientes,

$$\left((\lambda+\delta) - cs_i - \frac{\lambda\beta^2}{(-\beta-s_i)^2} \right) \sum_{i=1}^{3} A_i e^{s_i u} = \\ = -\lambda\beta^2 \sum_{i=1}^{3} A_i e^{-\beta u} \frac{((\beta+s_i)u+1)}{(-\beta-s_i)^2}. \tag{38}$$

Si desarrollamos el coeficiente de $\sum_{i=1}^{3} A_i e^{s_i u}$, podemos observar que coincide con la ecuación característica, y por tanto es igual a cero. Por tanto, podemos escribir (38) como

$$-\lambda\beta^2 \sum_{i=1}^{3} A_i e^{-\beta u} \frac{((\beta+s_i)u+1)}{(-\beta-s_i)^2} = -\lambda\beta^2 \sum_{i=1}^{3} A_i e^{-\beta u} \frac{u}{(-\beta-s_i)} - \\ \lambda\beta^2 \sum_{i=1}^{3} A_i e^{-\beta u} \frac{1}{(-\beta-s_i)^2},$$

y haciendo que los coeficientes sean iguales a cero, obtenemos dos ecuaciones más.

Por tanto, agrupando las ecuaciones obtenidas:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{3} A_i s_i e^{s_i b} = 1 \\ \sum_{i=1}^{3} \dfrac{A_i}{(\beta+s_i)} = 0 \\ \sum_{i=1}^{3} \dfrac{A_i}{(\beta+s_i)^2} = 0 \end{cases}.$$

BIBLIOGRAFÍA

Asmussen, S. (2000). *Ruin probabilities*. Advanced series on Statistical science and applied probability, World Scientific.

Beard, R. E.; T. Pentikäinen y E. Pesonen (1984). *Risk Theory*. Chapman and Hall, London.

Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones, D.A., Nesbitt, C.J.(1987). *Actuarial Mathematics*. Society of Actuaries, Schaumburg.

Büllhmann, H. (1970). *Mathematical Methods in Risk Theory*. Springer-Verlag, New York.

Daykin, T., Pentikäinen, T. and M. Pesonen (1994). *Practical Risk Theory for Actuaries*. Chapman and Hall, London.

Dickson, D.C.M. (1998). On a class of renewal risk process. *North American Actuarial Journal*, 2, 3, 60-73.

Dickson, D.C.M. and J.R. Gray (1984). Exact solutions for ruin probability in the presence of an absorbing upper barrier. *Scandinavian Actuarial Journal*, 174-186.

Finetti, B. De (1957). Su un `impostazione alternativa della teoria collectiva del rischio. Trans. XV. Int. Congr. Act. 2. 433-443.

Feller, W. (1971). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Vol. II. 2a ed. John Wiley & Sons, New York.

Gerber, H.U. (1979). *An Introduction to Mathematical Risk Theory*. S.S. Huebner Foundation, University of Pennsylvania, Philadelphia.

Grandell, J. (1991). *Aspects of Risk Theory*. Springer-Verlag, New York.

Latorre, L. (1992). *Teoría del riesgo y sus aplicaciones a la empresa aseguradora*. Ed. Mapfre, Madrid.

Mikosch, T. (2004). *Non-Life Insurance Mathematics. An Introduction with Stochastic Processes*. Springer-Verlag, Berlin.

Panjer, H. (1986). Direct Calculation of Ruin Probabilities. *Journal of Risk and Insurance*, 53, 521-529.

Panjer, H. and G.E. Willmot (1992). *Insurance Risk Models*. Society of Actuaries.

Schiff, J.L. (1999). *The Laplace Transform. Theory and Applications*. Springer-Verlag, New York.

Vegas Asensio, J. y Nieto de Alba, V. (1993). *Matemática Actuarial* . Fundación Mapfre Estudios.

Widder, D.V. (1946). *The Laplace transform.* Ed. Princeton mathematical series ; 6, Princeton University.