MINISTERIO DE TRABAJO Y ASUNTOS SOCIALES
INSTITUTO NACIONAL DE SEGURIDAD E HIGIENE EN EL TRABAJO
Documentación

NTP 316: Fiabilidad de componentes: la distribución exponencial

Fiabilité des composnats: la distribution exponenetielle
Parts reliability: the expoential distribution

Redactor:

José Mª Tamborero del Pino
Ingeniero Industrial

CENTRO NACIONAL DE CONDICIONES DE TRABAJO

Objetivos

El objetivo de la presente NTP es el de dar a conocer un tipo de distribución estadística aplicable al estudio de la fiabilidad de componentes o dispositivos que en condiciones de montaje y uso adecuado se encuentran en funcionamiento, y no están afectados todavía por problemas de vejez o desgaste.

Introducción

La aplicación de las nuevas tecnologías a la industria en general mejora y hace posible la fabricación de nuevos productos, pero a su vez introduce nuevos elementos, primordialmente electrónicos, que aumentan la complejidad de los procesos industriales, añadiendo nuevos riesgos e influyendo en la fiabilidad-seguridad de toda la instalación. Este mayor número y formas de riesgos junto con la complejidad de los sistemas ha obligado a considerar en profundidad la fiabilidad y seguridad de las instalaciones actualmente en marcha.

El concepto de seguridad está íntimamente ligado con la fiabilidad ya que cuanto más fiable es un sistema, lo cual depende de sus componentes, más seguro es. La fiabilidad y seguridad se debe pués aplicar en todas las fases del proyecto, construcción, puesta en marcha y mantenimiento de la planta industrial. Por otro lado la prevención de pérdidas o seguridad industrial aplicada con rigor científico está basada en gran parte en la aplicación de los métodos probabilísticos a los problemas de fallos en los procesos industriales. Todo ello se ha llevado a cabo a través de una disciplina denominada INGENIERÍA DE FIABILIDAD, para la cual se dispone de las adecuadas técnicas de predicción, que han sido fundamentales para el aseguramiento de la calidad de productos y procesos. En éste ámbito se trata la disponibilidad, operatibilidad y mantenibilidad de los sistemas técnicos, incluyendo el análisis probabilístico de riesgos de la planta.

Los elementos y dispositivos con funciones clave de seguridad, además de ser idóneos ante unas exigencias del sistema, deben asegurar una correcta respuesta en el tiempo. Para ello es imprescindible establecer un programa de mantenimiento preventivo y predictivo que permita mantenerlos en buenas condiciones de uso, renovándolos antes de que su tasa de fallos sea inaceptable.

Todo ello requiere conocer a priori la fiabilidad de los elementos de seguridad que se instalan en las instalaciones, información que debe ser suministrada por los fabricantes, pero debidamente controlada y constrastada a través de nuestro programa de mantenimiento a fin y efecto de verificar que nos mantenemos dentro de las condiciones de respuesta del sistema separadas. Sólo entonces podremos afirmar que la probabilidad de fallo de un componente es conocida y está controlada.

En instalaciones en las que se pueden generar accidentes de graves consecuencias, se hace hoy imprescindible conocer la probabilidad de que éstos acontezcan durante la vida del sistema. Ello obliga a la aplicación de técnicas de cuantificación del riesgo, como los árboles de sucesos y los árboles de fallos, los cuales precisan en último termino del conocimiento probabilístico de fallos y errores de sucesos básicos, a fin de poder establecer la adecuación e idoneidad de las medidas preventivas. Es por ello, que los estudios de fiabilidad adquieren cada vez mayor relevancia en la actividad prevencionista de los técnicos de seguridad y en general de los responsables de procesos u operaciones que puedan desencadenar situaciones críticas.

La NTP está dividida en dos partes, la primera trata de los conceptos básicos de fiabilidad y fallos para desarrollar en la segunda la función exponencial de distribución de fallos.

Conceptos básicos

Fiabilidad e infiabilidad

Para crear un modelo matemático para la probabilidad de fallo, consideramos el funcionamiento de un determinado elemento en el medio para él especificado. Definimos la variable aleatoria como el tiempo durante el que el elemento funciona satisfactoriamente antes de que se produzca un fallo. La probabilidad de que el elemento proporcione unos resultados satisfactorios en el momento t se puede definir como **fiabilidad**. La designamos R (t) y si el tiempo de fallo es T entonces podremos escribir:

$$R(t) = Pr(T > t) \quad (1)$$

De una forma práctica si designamos:

$N_s(t)$ = Nº de elementos en funcionamiento en el instante t

$N(0)$ = Nº de elementos en funcionamiento al principio

$N_f(t)$ = Nº de elementos averiados hasta el momento t

se cumplirá:

$$N(0) = N_f(t) + N_s(t)$$

$$R(t) = \frac{N_s(t)}{N(0)} = 1 - \frac{N_f(t)}{N(0)} \quad (2)$$

La fiabilidad R (t) está relacionada con la función inversa llamada **infiabilidad** Q (t) que es su probabilidad contraria o sea la probabilidad de que ocurra un fallo antes del instante t.

Por lo tanto la infiabilidad valdrá:

$$Q(t) = \frac{N_f(t)}{N(0)} \qquad (3)$$

cumpliéndose que:

$$Q(t) = 1 - R(t) \quad (4)$$

Tasa de fallos

Supongamos que un material funciona en el instante t, la probabilidad condicional, de que se produzca una avería entre el momento t y el t + dt puede escribirse como λ (t) dt; la función λ (t) es por definición tasa de fallos o averías y se expresa en $(\text{tiempo})^{-1}$. Matemáticamente tiene la expresión siguiente:

$$\Pr(t \le T \le t + \Delta t \mid T > t) = \frac{Q(t+\Delta t) - Q(t)}{R(t)} = \frac{R(t) - R(t+\Delta t)}{R(t)} = \lambda(t)\,\Delta t$$

De donde después de realizar operaciones nos da el valor de la fiabilidad:

$$R(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(t)\,dt\right) \qquad (5)$$

Función densidad de probabilidad de fallos

La función densidad de probabilidad de fallos es la probabilidad de que un dispositivo cualquiera tenga un fallo entre los instantes t y t + dt. Se la denomina f (t) y matemáticamente tiene la expresión:

$$f(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{dR(t)}{dt} \qquad (6)$$

Relación entre f(t), λ(t) y R(t)

Se cumple que la probabilidad de producirse una avería en un elemento entre t y t + d t o sea f (t) dt es igual a la probabilidad de que funcione hasta t (fiabilidad) por la probabilidad de que falle entre t y t + d t. Puesto de forma matemática se cumplirá:

$$f(t)\,dt = R(t) \cdot \lambda(t)\,dt$$

En la figura 1 se puede ver la representación gráfica de los parámetros expuestos para un caso general.

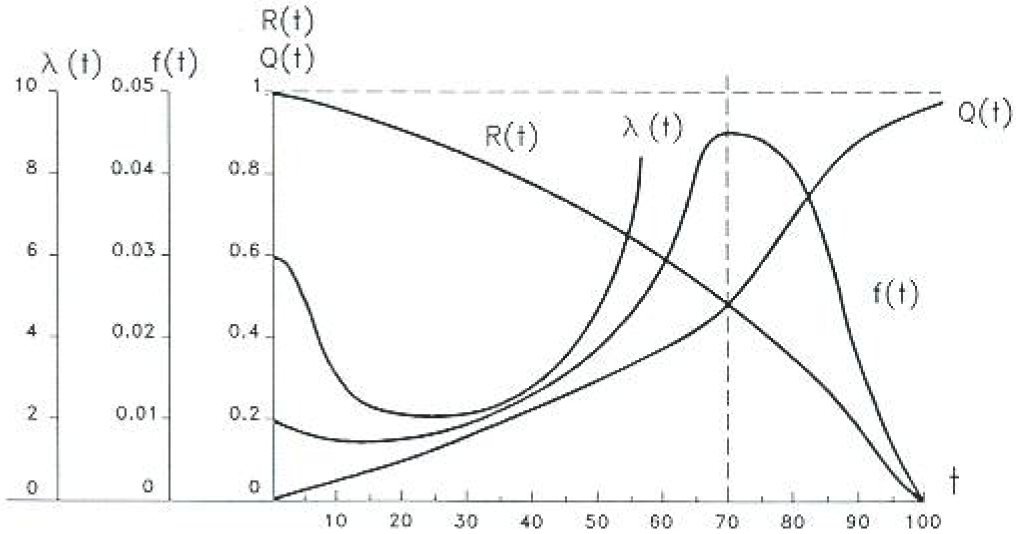

Fig. 1: Representación gráfica general de los parámetros de fiabilidad

La curva de la bañera

Dado que la tasa de fallos varía respecto al tiempo, su representación típica tiene forma de bañera, debido a que la vida de los dispositivos tiene un comportamiento que viene reflejado por tres etapas diferenciadas:

- Fallos iniciales (Tasa decrece)
- Fallos normales (Tasa constante)
- Fallos de desgaste (Tasa aumenta)

En la figura 2 se puede ver la representación de la curva típica de la evolución de la tasa de fallos.

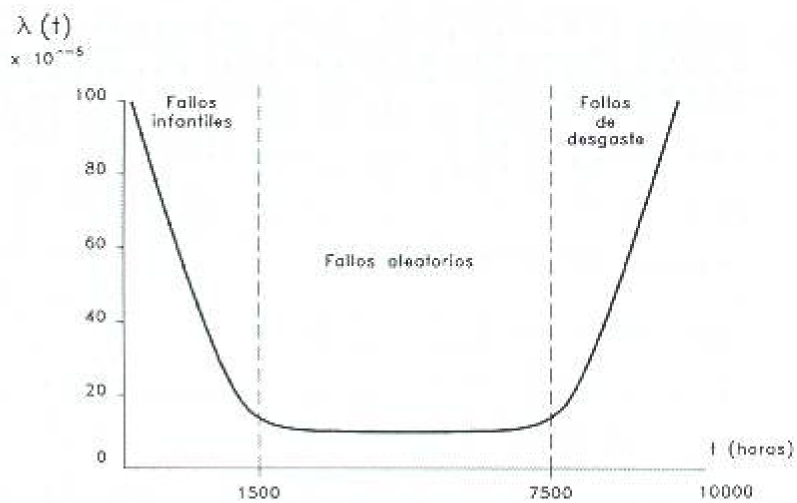

Fig. 2: Curva típica de evolución de la tasa de fallos

La primera etapa de fallos iniciales o infantiles corresponde generalmente a la existencia de dispositivos defectuosos o instalados indebidamente con una tasa de fallos superior a la normal. Esta tasa de fallos elevada va disminuyendo con el tiempo hasta alcanzar un valor casi constante.

La segunda etapa de fallos normales, también llamada de fallos aleatorios, es debida principalmente a operaciones con solicitaciones superiores a las proyectadas y se presentan de forma aleatoria e inesperada. El comportamiento de la tasa es constante durante esta etapa y los fallos son debidos a las propias condiciones normales de trabajo de los dispositivos o a solicitaciones ocasionales superiores a las normales.

La tercera etapa de fallos de desgaste, es debida a la superación de la vida prevista del componente cuando empiezan a aparecer fallos de degradación como consecuencia del desgaste. Se caracteriza por un aumento rápido de la tasa de fallos.

Para retardar la aparición de la tercera etapa, puede acudirse a la sustitución inmediata de los componentes del dispositivo o equipo cuando éstos fallen, o a sustituirlos antes de que finalice su vida útil mediante planes de mantenimiento preventivo, para posponer casi indefinidamente la incidencia del desgaste.

La distribución exponencial

Para el caso de que λ (t) sea constante nos encontramos ante una distribución de fallos de tipo exponencial y la fiabilidad tendrá la expresión siguiente obtenida a partir de la igualdad (6) para λ = cte:

$$R(t) = \exp(-\lambda t) \text{ para } t \geq 0 \quad (7)$$

La expresión de la infiabilidad será para éste caso:

$$Q(t) = \int_0^t \lambda \exp(-\lambda \phi) d\phi = 1 \exp(-\lambda t) \quad (8)$$

$$\text{para } t \geq 0$$

Matemáticamente podremos escribir la función exponencial de densidad de probabilidad de fallo:

$$f(t) = \lambda \exp(-\lambda t) \text{ cuando } t \geq 0 \quad (9)$$

$$f(t) = 0 \text{ cuando } t > 0$$

En las expresiones anteriores la constante λ (tasa de fallos) tiene las dimensiones de $(\text{tiempo})^{-1}$, exp es la base de los logaritmos neperianos o naturales (2,71828...) t es el tiempo de funcionamiento para el que se desea conocer la fiabilidad.

La tasa de fallos se expresa, según se ha visto, en unidades inversas a las que expresan el tiempo t, generalmente en horas. La fiabilidad R (t) representa en éste caso la probabilidad de que el dispositivo, caracterizado por una tasa de fallos constante, no se averíe durante el tiempo de funcionamiento t.

Esta fórmula de fiabilidad se aplica correctamente a todos los dispositivos que han sufrido un rodaje apropiado que permita excluir los fallos infantiles, y que no estén afectados aún por el desgaste.

Tiempo medio hasta un fallo (MTTF)

La calidad de funcionamiento de un cierto elemento vendrá dada, generalmente, por el tiempo que se espera que dicho elemento funcione de manera satisfactoria. Estadísticamente se puede obtener una expectativa de éste tiempo hasta que se produzca un fallo, que se llama **tiempo medio hasta un fallo (MTTF)**. Alternativamente en sistemas que son reparados continuamente después que se produzcan fallos y continúan funcionando la expectativa se llama **tiempo medio entre fallos (MTBF)**. En cualquiera de los casos el «tiempo» puede ser tiempo real o tiempo de operación.

Dado que la densidad de fallos es f (t), el tiempo T que se espera que transcurra hasta un fallo viene dado por:

$$E(T) = MTTF = \int_0^\infty t\, f(t)\, dt = \int_0^\infty \lambda t \exp(-\lambda t)\, dt =$$

$$= -t \exp(-\lambda t) \Big|_{t=0}^{t=\infty} + \int_0^\infty \exp(-\lambda t)\, dt = 0 + \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \exp(-\lambda t)$$

$$= \frac{1}{\lambda} \exp(-\lambda t) \Big|_{t=0}^{t=\infty} \quad MTTF = \frac{1}{\lambda} \qquad (10)$$

Vemos que el MTTF y la tasa de fallos son recíprocos.

Tiempo medio entre fallos (MTBF)

Se demuestra que para la distribución exponencial el MTBF es igual a la inversa de la tasa de fallos y por lo tanto igual al MTTF o sea:

$$MTBF = m = 1 / \lambda = MTTF \quad (11)$$

Al igual que λ, el parámetro m describe completamente la fiabilidad de un dispositivo sujeto a fallos de tipo aleatorio, esto es, la fiabilidad exponencial. La función de fiabilidad, llamada también "probabilidad de supervivencia" se puede escribir por tanto de la forma:

$$R(t) = \exp(- t / m) \quad (12)$$

Si llevamos a un gráfico esta función, con los valores de R (t) en ordenadas y los valores correspondientes de t en abcisas, se obtiene la " curva de supervivencia ", representada en la figura 3.

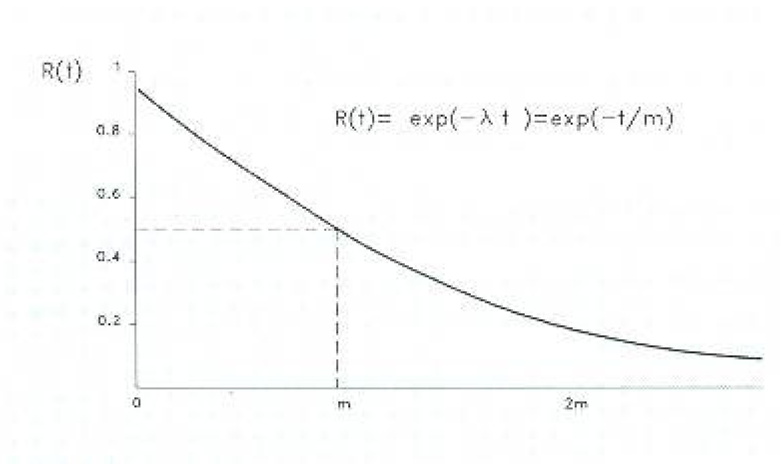

Fig. 3: Curva de supervivencia

La fórmula anterior proporciona la probabilidad de supervivencia del dispositivo para cualquier intervalo de tiempo comprendido dentro del ámbito de la vida útil del mismo, o sea desde el momento 0 al momento t. Se supone que el dispositivo ha superado las misiones precedentes y que no se encuentra al final de su vida útil durante el curso de la misión considerada.

La primera hipótesis se representa gráficamente por la condición:

$$R\ (t) = 1 \text{ para } t = 0$$

La segunda está ya contenida en la condición fundamental λ = cte

Una interpretación bastante extendida del MTBF es su asimilación al tiempo asignado a la misión T_m. A partir del hecho de que se cumplirá:

$$R\ (t) = \exp\ (-\lambda\ t) = \exp - (t\ /\ MTBF)\ (13)$$

Al identificar el tiempo medio entre fallos con la duración de la misión se deduce que la fiabilidad de la misión es:

$$R\ (t) = \exp\ (-\ 1) = 0{,}368\ (36{,}8\ \%)$$

El dispositivo tiene una probabilidad de sobrevivir del 36,8 %. En la práctica esto significa que, poniendo en funcionamiento 100 dispositivos del mismo tipo, cuando hayan pasado un número de horas t = m = MTBF funcionarán aproximadamente 37, habiendo fallado los 63 restantes.

Para el caso de t = m / 10, la curva señala una fiabilidad R = 0,905 (90,5 %), y para el caso de t = m / 100, la fiabilidad es R = 0,99 (99 %).

Ejemplo práctico

Durante el programa de mantenimiento anual que realiza una empresa se han recogido los datos de fallos de un conjunto de 50 válvulas mecánicas habiendo fallado 2 de ellas. Para reprogramar el programa de mantenimiento preventivo que se lleva actualmente en la empresa se desea saber:

a. Tasa de fallos anual para dichas válvulas.

b. Qué probabilidad tiene una válvula de fallar antes de alcanzar un tiempo de funcionamiento de 4 meses.

c. Cuál será la probabilidad de que la una válvula esté en funcionamiento al cabo de 6 meses.

d. Cuál será la probabilidad de que el tiempo de vida esté comprendido entre 4 y 6 meses.

e. Determinar un intervalo de vida con un nivel de confianza (centrado) del 90 %.

Resolución

a. La tasa de fallos será la relación entre el número de válvulas falladas y el número total de válvulas en funcionamiento:

$$\lambda = \frac{2}{50} = 4.10^{-2}$$

b. La probabilidad de que una válvula falle antes de un número determinado de meses viene expresado por la infiabilidad Q (t):
Q(t)= 1 - exp (- λ t)
$\lambda = 4.\ 10^{-2}$
t tiempo expresado en años
Luego, para t = 1/3, se tendrá:
Q (t) = 1 - exp (- 4.10^{-2} . 1/3) = 1 - 1 / 1,013288 = 1 - 0,986886 = 0,013114%.
La probabilidad de que el dispositivo falle antes de cuatro meses será del 1,3114 %.

c. La probabilidad de que no se haya producido el fallo antes de los 6 meses será la fiabilidad para ese tiempo, que resultará:
R (t) = exp (-λ t) = exp (- $4.\ 10^{-2}$. 1/2) = exp (- 0,002) = 0,998
Esto quiere decir que existe una probabilidad del 99,80 % de que una válvula no se averíe antes de los seis meses.

d. La probabilidad de que el tiempo de vida esté comprendido entre 4 y 6 meses será la diferencia entre la probabilidad de que falle antes de los 6 meses y la de que falle antes de los 4 meses; matemáticamente será la diferencia entre las infiabilidades de ambos periodos de tiempo sea:
Pr = Q (1/2) - Q (1/3) =
=[1 - exp (- 1/2)] - [1 - exp (- 1/3)] =
=exp (- 1/3) - exp (-1/2) = 0,1124 (11,24 %)
Representamos gráficamente lo anterior en la figura 4 y la figura 5.

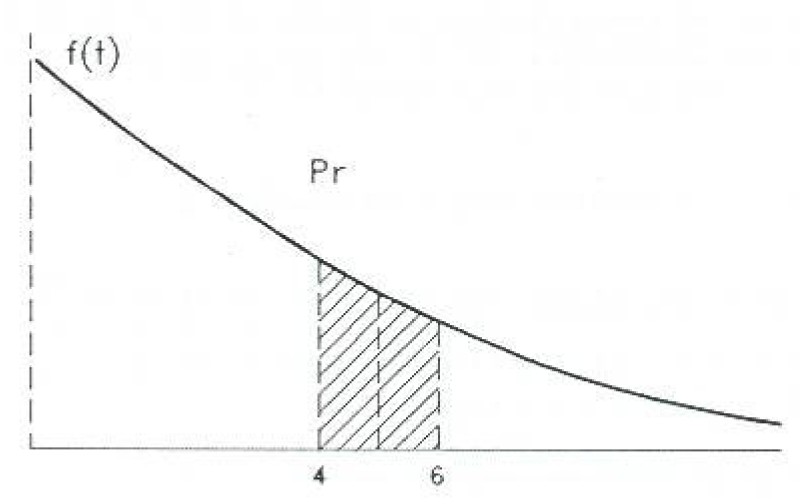

Fig. 4: Probabilidad de funcionamiento

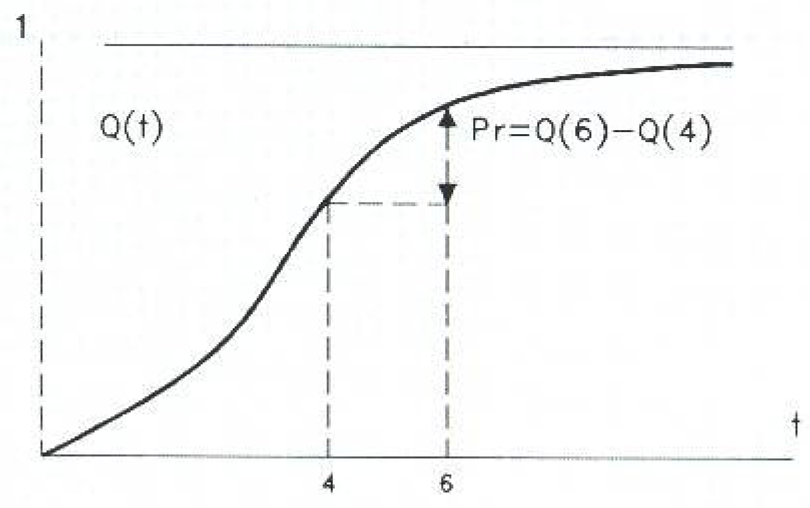

Fig. 5: Diferencia de infiabilidades

e. Para determinar un intervalo de vida con una confianza del 90 %, partimos de la figura 6 y la figura 7.

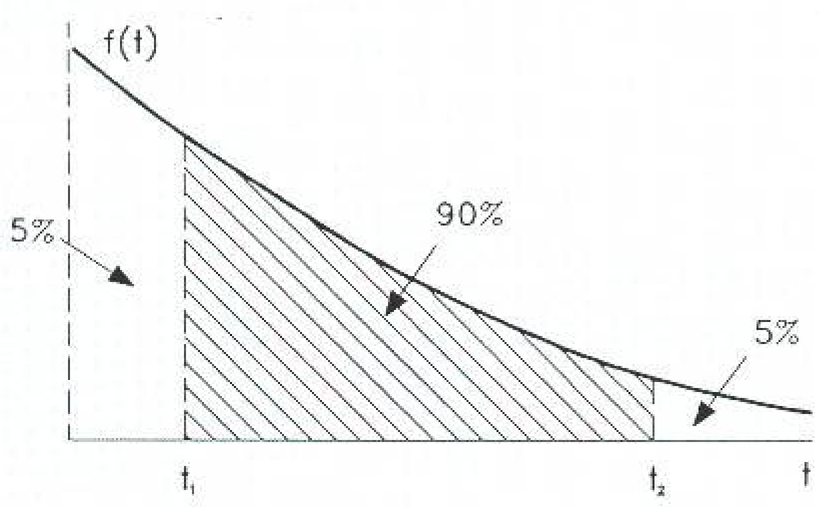

Fig. 6: Probabilidad de funcionamiento del 90% entre t1 y t2

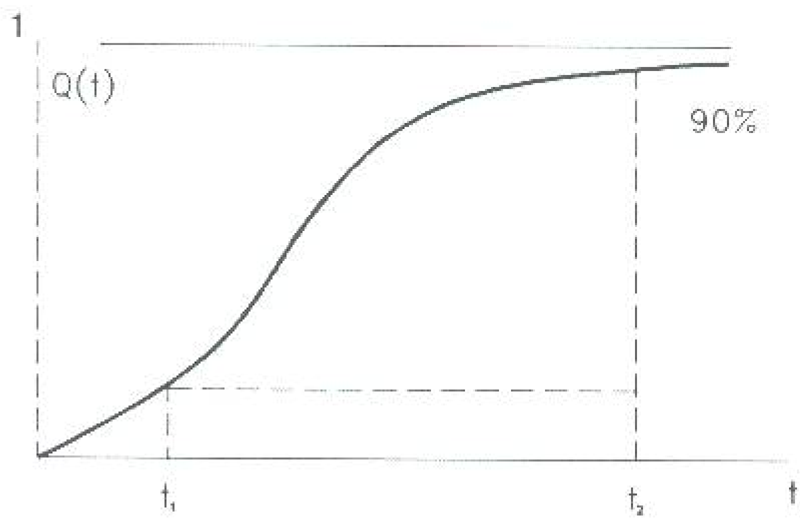

Fig. 7: Diferencia de infiabilidades

Luego, debe verificarse que los valores de la infiabilidad para los momentos t, y t 2 serán respectivamente :
$Q(t_1) = 0{,}05$
$Q(t_2) = 0{,}95$
Sustituyendo las expresiones anteriores por sus respectivos valores tendremos:
$1 - \exp(-t_1) = 0{,}05$
$1 - \exp(-t_2) = 0{,}95$
Despejando:
$\exp(-t_1) = 0{,}95$
$\exp(-t_2) = 0{,}05$
Invirtiendo:
$\exp(t_1) = 1{,}06$ de donde $t_1 = 0{,}05826$ años
$\exp(t_2) = 20$ de donde $t_2 = 2{,}9957$ años
Luego, para un nivel de confianza del 90 %, la vida de la válvula estará comprendida entre 0,05826 y 2,9957 años.

Vida útil

Se llama "vida útil" el periodo de vida de un dispositivo durante el cual es válida la fórmula indicada de la fiabilidad. Su duración varía de un dispositivo a otro. Es importante que el tiempo t que utilicemos en la fórmula no supere la vida útil del aparato.

Por ejemplo, si la vida útil de un componente es de 1000 horas, su fiabilidad puede preverse en base a la fórmula indicada para un intervalo de tiempo cualquiera comprendido en las primeras 1000 horas de vida del componente. A partir de ese momento la fórmula exponencial no es aplicable porque, terminada la vida útil, la tasa de fallos del dispositivo no es constante y empieza a crecer significativamente.

Durante la vida útil la fiabilidad es aproximadamente la misma para periodos de tiempo de funcionamiento iguales. Así la fiabilidad es la misma para las primeras 10 horas que para las 10 últimas, o sea la fiabilidad es la misma para el periodo comprendido entre la hora 0 y la hora 10 que entre la hora 990 y la 1000. Lo anterior lo podemos comprobar mejor mediante un ejemplo:

- Sea un dispositivo que, después del periodo de rodaje, dispone de 1000 horas de vida útil con una tasa de fallos constante de $\lambda = 0{,}0001$ fallos/ hora. Veremos que su fiabilidad no varía en el curso de toda su vida útil.
  El dispositivo tendrá una fiabilidad para 10 horas de:
  $R(10) = \exp(-0{,}0001 \cdot 10) = 0{,}999$ (99,9 %)
  La probabilidad de que el dispositivo no sufra ningún fallo durante todo el periodo de su vida útil es:
  $R(1000) = \exp(-0{,}0001 \cdot 1000) = \exp(-0{,}1) = 0{,}9048$ (90,48%)

En otras palabras, el dispositivo considerado tiene aproximadamente un 90 % de probabilidades de sobrevivir durante todo el periodo de su vida útil desde el momento de su puesta en servicio. Pero, una vez ha sobrevivido 990 horas, la probabilidad de que sobreviva durante el resto de las 10 horas hasta completar su vida útil será del 99,9 %. Si éste dispositivo debiese funcionar por encima de las 1000 horas, comenzarían a manifestarse fenómenos de desgaste y para cada periodo de tiempo sucesivo de 10 horas disminuiría la fiabilidad correspondiente, mientras que la tasa de fallos aumentaría rápidamente.

En conclusión: La fiabilidad de un dispositivo cualquiera es constante para periodos de tiempo de utilización iguales si:

- Se eliminan los fallos infantiles con un rodaje apropiado.
- El dispositivo ha sobrevivido al funcionamiento durante los periodos anteriores al considerado.
- No se supera el límite de vida útil, más allá del cual la fiabilidad disminuye con mayor o menor rapidez.

Bibliografía

(1) J. MOTHES- J. TORRENS-IBERN
Estadística aplicada a la ingeniería
Ediciones Ariel. Esplugues de Llobregat 1970

(2) A.E. GREEN
Safety Systems Reliability
John Wiley & Sons, Chichester, 1983

(3) NORBERT L. ENRICK y otros
Control de calidad y beneficio empresarial
Ediciones DÍAZ DE SANTOS, S.A.,Madrid, 1989

(4) BERTRAND L. HANSEN, PRABHAKAR M. GHARE
Control de calidad. Teoría y aplicaciones
Ediciones DÍAZ DE SANTOS, S.A., Madrid 1990

(5) A.D.S. CARTER
Mechanical reliability. Second Edition
Macmillan Education Lyd, London 1986

(6) ANTONIO CREUS SOLE
Fiabilidad y seguridad
Ed. Marcombo S.A., Barcelona 1992