JULIAN CARLOS OLIVER RABOSO
Actuario de Seguros La Equitativa

Conmutación de Tablas Actuariales sobre varias cabezas

LA práctica actuarial de cálculo de operaciones que requieren tablas de mortalidad o invalidez está basada tradicionalmente en la obtención de símbolos de conmutación de la probabilidad qx de salida del colectivo en función del tipo de interés técnico.

El cálculo de los símbolos de conmutación para una cabeza de edad x viene dado por las expresiones siguientes:

$$D_x=l_x.(1+i)^{-x};\ C_x=d_x.(1+i)^{-(x+1/2)}$$

Los símbolos de conmutación sobre dos cabezas de igual edad se obtienen a partir de los símbolos anteriores sobre una cabeza efectuando las siguientes operaciones:

$$D_{x:x}=l_x.D_x;\ C_{x:x}=D_{x:x}.(1+i)^{-1/2}-D_{x+1:x+1}.(1+i)^{1/2}\quad (R)$$

La obtención de los símbolos sobre tres cabezas de igual edad requiere a su vez el conocimiento de los símbolos calculados sobre dos cabezas:

$$D_{x:x:x}=l_x.D_{x:x};\ C_{x:x:x}=D_{x:x:x}.(1+i)^{-1/2}-D_{x+1:x+1:x+1}.(1+i)^{1/2}$$

La obtención de los símbolos conmutados sobre m cabezas de igual edad requiere, según el planteamiento recurrente anterior, m conmutaciones sucesivas que representan una dificultad operativa y un consumo elevado de tiempo de cálculo.

El objeto del breve desarrollo inductivo que viene a continuación es mostrar una simplificación operativa que aporta a su vez una interpretación más evidente de los símbolos de conmutación sobre varias cabezas.

Sea el caso general dado por las expresiones siguientes:

$$D_{x:\dots m\dots:x}=l_x.D_{x:\dots m-1\dots:x}$$

$$C_{x:\dots m\dots:x}=D_{x:\dots m\dots:x}.(1+i)^{-1/2}-D_{x+1:\dots m\dots:x+1}.(1+i)^{1/2}$$

Simplificando la primera expresión obtenemos:

$$D_{x:\dots m\dots:x}=l_x.D_{x:\dots m-1\dots:x}=l^m_x.(1+i)^{-x}$$

que aplicada a la segunda permite obtener:

$$C_{x:\dots m\dots:x}=l^m_x.(1+i)^{-x}.(1+i)^{-1/2}-l^m_{x+1}.(1+i)_{-x-1}.(1+i)^{1/2}$$

expresión de la cual extraemos factor común resultando:

$$C_{x:\dots m\dots:x}=(l^m_x-l^m_{x+1}).(1+i)^{-x-1/2}$$

Siendo las operaciones **(R)** expresiones recurrentes, los símbolos D y C han sido obtenidos por inducción y sólo queda probar su validez para **m = 1.**

$$D_x=l^1_x.(1+i)^{-x};\ C_x=(l^1_x-l^1_{x+1}).(1+i)^{-(x+1/2)}=d_x.(1+i)^{-(x+1/2)}$$

Las expresiones

$$D_{x:\dots m\dots:x}=l^m_x.(1+i)^{-x};\ C_{x:\dots m\dots:x}=(l^m_x-l^m_{x+1}).(1+i)^{-x-1/2}$$

permiten efectuar una conmutación directa de las tablas de mortalidad evitando m–1 conmutaciones previas y reduciendo el tiempo de cálculo.

A su vez, estas expresiones evidencian un significado fundamental de los propios símbolos:

para el caso de vida:

$${}_nE_x=\frac{D_{x+n:\dots m\dots:x+n}}{D_{x:\dots m\dots:x}}=\frac{l^m_{x+n}}{l^m_x}.(1+i)^{-n}$$

$${}_nE_x={}_np^m_x.(1+i)^{-n}$$

siendo el primer factor la probabilidad de que m cabezas de igual edad **x** vivan al término de **n** años.

El capital diferido es pues pagadero al término del contrato si las m cabezas viven en ese momento y su prima única es el capital probable descontado financieramente, siendo la probabilidad de ocurrencia del evento:

$$\frac{l^m_{x+n}}{l^m_x}=({}_np_x)^m$$

que es la probabilidad de que vivan exactamente **m** cabezas.

para el caso de muerte:

$$A_{\overset{1}{\overline{x:\dots m\dots:x:1}}}=\frac{C_{x:\dots m\dots:x}}{D_{x:\dots m\dots:x}}=\frac{(l^m_x-l^m_{x+1})}{l^m_x}.(1+i)^{-1/2}$$

El seguro temporal es pagadero si fallece al menos una de las **m** cabezas durante la vigencia del contrato. Suponiendo, como es habitual, la ocurrencia de los siniestros uniformemente distribuidos a lo largo de la duración, la prima única es el capital probable descontado financieramente, siendo la probabilidad de ocurrencia del evento:

$$\frac{(l^m_x-l^m_{x+1})}{l^m_x}=1-({}_1p_x)^m$$

que es la probabilidad de que no todas las **m** cabezas vivan un año más o, lo que es igual, la probabilidad de que fallezca al menos una cabeza. ■