Las paradojas de la probabilidad

Clase inaugural del Curso de Matemática Actuarial, dada en 20 de marzo de 1963 en la Facultad de Ciencias Económicas de Buenos Aires.

Por el Dr. PEDRO SMOLENSKY

1. Como es bien sabido, los Seguros de toda clase se basan sobre el concepto de la Probabilidad y esto vale particularmente para el Seguro de Vida. Por lo tanto, parece conveniente que un curso de Matemática Actuarial, es decir, de matemática del Seguro de Vida, sea iniciado con un análisis de este concepto, tan común como oscuro. El uso de esta última palabra tal vez sea apta para causar sorpresa. Efectivamente, todos estamos convencidos de que sabemos lo que queremos decir cuando nos servimos del término "probable" o "probabilidad", como lo estamos haciendo todos los días. Sin embargo, si se pregunta a un matemático: "¿Qué es la Probabilidad?", él no estará en condiciones de dar una contestación satisfactoria. Basta el hecho de que uno de los más grandes de nuestros tiempos que, además, ha dedicado muchos de sus estudios al problema de la probabilidad, Henri POINCARÉ, no hesitaba declarar que cualquier definición de la probabilidad es imposible y no conduce a otra cosa que a una "petitio principii" (1). He aquí una primera y muy seria paradoja de la probabilidad.

Esa es tanto más curiosa en cuanto el uso que la matemática hace del concepto coincide bastante bien con la intuición que de él tiene el hombre común. Para el matemático, la probabilidad es la relación entre los casos favorables y los posibles de un acontecimiento previsto. Es fácil darse cuenta de que esta no es una defi-

(1) Henri POINCARÉ: *Calcul des Probabilités.*

nición, porque supone que conocemos ya todos los casos posibles. Esto puede ser, pero sólo excepcionalmente. Por ejemplo, cuando echamos un dado, sabemos que debe caer sobre una de sus seis caras: entonces no hay duda; los casos posibles son seis y los favorables uno, de modo que la probabilidad resulta igual a 1/6. Pero si preguntamos cuál es la probabilidad de que nazca un hijo varón, ¿cuáles son los casos posibles y cuáles los probables? Los matemáticos nos responden: "El cociente que resulta entre el número de resultados favorables observados en promedio y el número de operaciones aisladas que componen la operación en serie." Esto quiere decir que nos basamos sobre observaciones del pasado que sólo permiten un juicio de inducción, sin carácter categórico, y, además, de valor aproximativo. No cabe duda que se trata de algo esencialmente distinto que en el primer ejemplo. Efectivamente, se distingue entre probabilidades "a priori" y "a posteriori", pero la matemática no se preocupa por nada de esta diferencia y hace uso de la seudodefinición indicada indistintamente. Y lo curioso es que actuando así ha obtenido en el curso de trescientos años resultados muy notables.

Sin embargo, hay casos donde se llega a respuestas contradictorias que no derivan necesariamente de una deficiente formulación del problema. He aquí dos ejemplos, presentados, el primero por WHITTAKER (2), el segundo por BERTRAND (3) y refutado por BOREL (4):

Si preguntamos: ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de dos números extraídos al azar sea par o impar?, contestaremos en seguida que ella es igual y, por tanto, de $^1/_2$. Sin embargo, podemos hacer el siguiente razonamiento: Tanto las sumas de los números pares como las de los impares son pares, mientras que sólo las sumas de un número par y uno impar son impares. Entonces la cantidad de las sumas pares debe ser el doble de las sumas impares, siendo la probabilidad de 1/3. ¿Dónde está el error?

En este ejemplo se trata de una deducción equivocada que no es difícil descubrir. Mucho más serio es el siguiente problema:

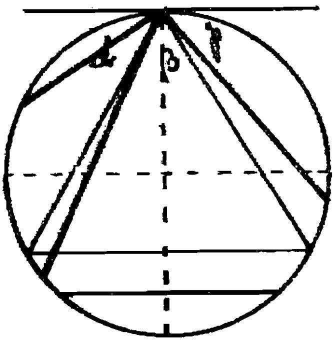
---

(2) Sir Edmund Taylor WHITAKER: "Mathematics and Logic", en *What is Science?*, by James R. Newman.

(3) Joseph BERTRAND: *Calcul des Probabilités.*

(4) Emile BOREL: *Le Hasard.*

Tracemos sobre una circunferencia dada una cuerda al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que su longitud sea menor que la del lado del triángulo equilátero inscrito en el círculo?



Para contestar, puedo primero imaginarme que el triángulo tenga uno de sus vértices en una extremidad de la cuerda. Entonces, si tiramos la tangente por este punto, tenemos alrededor de él tres ángulos de 60° cada uno: α, β y γ. Si la cuerda yace en uno de los espacios correspondientes a los ángulos α ó γ esa, evidentemente, es menos larga que el lado del triángulo; si cae en el espacio de β, es más larga. Por ende, la probabilidad es igual a 2/3.

Pero podemos también imaginarnos el triángulo puesto de modo que uno de sus lados sea paralelo a la cuerda. Entonces ésta puede encontrarse o dentro de la calota formada por el lado o dentro de la zona entre el lado y el diámetro paralelo a él. Las respectivas probabilidades son iguales, y lo mismo vale para la parte superior del círculo. Estonces la probabilidad sería la mitad y no un tercio.

No es en absoluto fácil dar la explicación de esta contradicción, y yo personalmente me inclino a la opinión de Bernard, que esa no ha sido encontrada hasta ahora.

2. La teoría de la probabilidad fue obra de los más prominentes matemáticos. Para mencionar sólo unos pocos nombres de los numerosos contribuidores a su progreso, además de sus creadores, independientes el uno del otro, aunque contemporáneos y amigos, Pascal y Fermat, encontramos nombres tan gloriosos como los de Huyghens, Euler, Bernouilli, Moivre, Laplace, Hauss, Poisson, como asi-

mismo, ya cercanos a nuestros tiempos, los de TCHEBYCHEFF, POINCARÉ, BERTRAND, BOREL, CASTELNUOVO y otros más que no puedo enumerar. De todos modos, tales nombres dan prueba del alto interés que aun los más destacados matemáticos han demostrado para el cálculo de probabilidad.

De pocas ciencias conocemos exactamente la fecha de nacimiento; de la nuestra, sí. Fue una mañana del año 1654 que un oficial francés, después de una noche dedicada al juego, hizo irrupción en el estudio casi claustral del hombre tan austero que fue Blas PASCAL y lo asaltó con la pregunta cómo se debían repartir las postas entre los jugadores obligados a suspender su partido con una dada repartición de los naipes. Este no muy noble incidente —y se recuerda hasta el nombre de ese caballero que fue su autor y que no merece ser mencionado— fue el origen del cálculo de probabilidad, porque a PASCAL el problema parecía bastante atrayente para que se dedicase a su estudio, sin sospechar que estaba echando las bases para nada menos que una nueva rama de la matemática.

Pero al mismo tiempo que la teoría de la probabilidad siguió un camino de constante y vigoroso ascenso, el concepto mismo de la probabilidad ha resistido a todas las tentativas de precisarlo. Veamos entonces lo que pensamos cuando lo usamos.

Sabemos que únicamente los juicios idénticos expresan una verdad incontestable, como cuando digo que dos por dos da cuatro, ya que cuatro no es otra cosa que una manera diferente de denominar dos pares de objetos. En cambio, cualquier enunciación basada en la experiencia puede ser justa o falsa, o sea, es inevitablemente incierta. Por ejemplo, cuando digo: "Mañana va a llover", hago una afirmación audaz a la que no estoy autorizado, a pesar de todas la experiencia que yo pueda tener en meteorología. Si en cambio digo: "Mañana puede llover", pronuncio una necedad, una verdad de la Palisse, que no dice nada. Finalmente, puedo expresarme así: "Mañana es probable que llueva". En este caso tomo posición, expongo una opinión, para la cual evidentemente debo disponer de razones en que se basa. Lo probable está entonces entre lo nulo y lo ilícito, representando lo plausible, y, por lo tanto, la probabilidad es una característica de todas nuestras afirmaciones empíricas. La probabilidad matemática es la medida de su grado. Queda, sin embargo, entendido que con estas precisaciones no hemos dado ni un paso adelante hacia una definición de la probabilidad, tenemos que atacar el problema desde otro lado.

Supongo poder dar por conocidas las reglas elementales del cálculo de probabilidad, como, por ejemplo, la de la probabilidad compuesta. Según la misma, si la probabilidad de un evento es igual a p, la de que se repita es igual a p^2. Por ejemplo, si tenemos un cubilete con tantas bolillas blancas como negras, consideramos la probabilidad de extraer una blanca igual a la de extraer una negra, o sea de $1/2$. Pero si acabamos de extraer una blanca, la reponemos en el cubilete y repetimos la prueba, entonces estimamos la probabilidad de que vuelva una blanca igual a $1/2 \cdot 1/2 = 1/4$.

Pero, ¿por qué cambiamos nuestro juicio y quién o qué nos autoriza a hacerlo? Se trata de una suposición; sin embargo, a largo plazo, es decir, con la repetición de muchas pruebas, esa se confirma y salen bolillas blancas y negras más o menos con la misma frecuencia. ¿Deberíamos entonces atribuir a las bolillas una especie de memoria y de conciencia para la justicia social, que exige igual derecho para todas, sin consideración del color? Si no estamos dispuestos a aceptar esta explicación, ¿qué otra nos queda?

Pasemos del cubilete al casino de Mar del Plata. Entro en la sala de la ruleta y sin perder tiempo pongo cien pesos sobre el colorado. Recién en este momento me doy cuenta de ser el único en hacerlo, y cuando pido una explicación a uno de mis vecinos, él me contesta que el colorado acaba de salir nueve veces seguidas, de modo que todos esperan ver salir ahora el negro. Es decir, que mientras para mí la probabilidad de acertar con el colorado era igual a $1/2$, para los que se encontraban ya en la sala no llegaba siquiera a un milésimo. Vemos así que el mismo acontecimiento puede tener distintas probabilidades.

La diferencia depende evidentemente de los conocimientos que posean los jugadores: para mí, ignorante de los antecedentes, la probabilidad no podía ser otra que $1/2$; para los demás, informados, debía ser de $1/1024$. Esto significa que la probabilidad en este caso no se refiere a un acontecimiento, sino, a nuestro juicio, relativo a él, que puede resultar acertado o no. KEYNES (5) fue el primero en sostener que desde el punto de vista lógico sería más correcto

(5) John Maynard KEYNES: *A. Treatise on Probability.*

hablar de probabilidad del juicio o de la proposición con que se afirma que un acontecimiento se producirá o se ha producido. Esto es, indudablemente, justo en muchos casos; pero queda abierta la cuestión si eso vale para todos; si la *p.* es siempre algo subjetivo o puede ser también objetivo.

Sin embargo, aun si la tesis de KEYNES tuviera validez general, no hubiéramos resuelto el enigma, sino sólo lo habríamos transferido del campo metafísico al psicológico; él seguiría en pie, si no en lo que llamamos la realidad, en nuestra mente. La pregunta no sería más: "¿Por qué tiene el acontecimiento tal probabilidad?", sino: "¿Por qué le atribuyo tal probabilidad?"

3. En el pasado se usaba decir que la probabilidad depende del azar. Con esto sólo se trataba de explicar una incógnita por otra, pues el sentido de la palabra "azar" no era de ninguna manera más claro que el de la probabilidad. Un agudo análisis (6) del concepto ha conducido a su autor a la conclusión de que el azar no es otra cosa que la elección arbitraria que hacemos frente a un número de igualmente posibles respuestas a una pregunta. Por ejemplo, si medimos una longitud varias veces, obteniendo siempre resultados ligeramente distintos, terminamos con elegir uno de ellos como el definitivo. Esto lo hacemos al "azar", pero se advierte que tal modo de proceder no tiene nada que hacer con la probabilidad y de ninguna puede servir para explicarla. Esa precede al azar porque está vinculada a la multiplicidad de los resultados, pero no a la elección final que hacemos.

Si consideramos la realidad —prescindiendo de todos los problemas de carácter filosófico que circundan este concepto— como deterministas, es decir, si postulamos que nada puede suceder sin una causa suficiente o que cualquier evento es el ineludible efecto de otros que lo precedían como sus causas, de modo que todo lo que acontece forma una cadena ininterrumpida de hechos vinculados entre sí, resulta claro que no queda ningún lugar disponible para el azar. Pues si todo lo que sucede tiene que suceder, habría que ser posible prever cualquier cosa que va a producirse, con la condición de que conozcamos las causas que deben originarla. Si en la práctica esto es el

(6) Pius SERVIEN: "Azar y matemática", en: *Las grandes corrientes del pensamiento matemático,* por F. Le Lionnais.

caso solamente por excepción, tal cosa es debida a nuestro insuficiente conocimiento de las causas. La probabilidad sería entonces efectivamente una condición mental en función de nuestros conocimientos más o menos extendidos.

Es obvio que sobre este camino debemos tropezar también con la cuestión fundamental de la metafísica relativa al libre albedrío, que forma una de las famosas antinomias de KANT. Efectivamente, si no hay azar en el sentido que acostumbramos atribuir a este concepto, no queda posibilidad para la intervención de la voluntad humana. Sin embargo, si aceptamos la teoría de que el azar sólo es debido a nuestra ignorancia, la podemos aplicar también a la voluntad, Supuesto que quiero encender un cigarrillo y que en seguida decido desistir de esta intención, aparentemente doy una prueba de mi libre albedrío. Pero, ¿a qué es debida esta prueba? Sólo al hecho de que desconozco las causas que han provocado mi decisión de no fumar. Soy libre porque no sé de no serlo. Somos parecidos a prisioneros vigilados en cada paso que hacen, pero con tanta discreción que nunca se dan cuenta de ser observados.

4. Con la concepción sobre la naturaleza de la probabilidad que la pone en estrecha relación a nuestro conocimiento, deberíamos inclinarnos a creer que su campo está limitado a aquellas ciencias que se encuentran todavía en su fase inicial cuando la masa de las observaciones no es aún suficiente para formular leyes naturales, a la vez que no dudamos de poder llegar a la fase posterior, en la que estaremos en condiciones de sustituir las regularidades estadísticas por leyes naturales y pronunciar certezas en lugar de probabilidades. La diferencia sería, por ejemplo, la que existe hoy entre la fisiología y la química.

Tal fue, hasta tiempos bastante recientes, la opinión general que dominaba en el mundo de los sabios. Sin embargo, resultó equivocada. La evolución de la ciencia, o mejor de su rol, fue exactamente en la dirección opuesta, caracterizada por el surgir de la tendencia de reemplazar el concepto de la certeza siempre más por el de la probabilidad, en el sentido de que las regularidades observadas en los fenómenos y expresadas en ecuaciones diferenciales representan no leyes naturales, de vigencia absoluta e independiente de nosotros, sino probabilidades de un grado más o menos elevado.

A esto se ha llegado con la transición de la vieja física microscópica a la moderna microscópica. Aquélla se ocupaba de objetos cuyas dimensiones eran de la misma clase como las de nuestro cuerpo, y de movimientos mensurables con los primitivos instrumentos de que se disponía, quedando la investigación limitada a la superficie de sus objetos. La nueva física trata de penetrar en ellos, indagando los movimientos de sus átomos que corresponden a dimensiones entre un centésimo y un millonésimo de un millonésimo de las anteriores. A tales movimientos de sus átomos se atribuyen los cambios que observamos de fuera. Esto significa la renuncia a la observación directa de los fenómenos, inaccesibles para nosotros, y su sustitución por los productos de nuestra razonada imaginación.

Este nuevo mundo, compuesto por una cantidad fantástica de elementos imperceptibles, pone al físico continuamente frente a fenómenos que evidencian una regularidad, sin permitir alguna previsión por insuficiencia de información. Se habla entonces de "parámetros ocultos", cuyo conocimiento nos capacitaría a predecir los futuros fenómenos.

Particularmente con aparición de la teoría de los cuántos al principio de este siglo, por obra de EINSTEIN y sobre todo de PLANCK, la tendencia señalada se impuso con fuerza irresistible. Para los cuantistas de hoy la tarea de la ciencia no es la de ocuparse de las relaciones entre los objetos, sino de las entre el objeto y el sujeto, que consideran como única realidad perceptible. Es fácil darse cuenta cómo este modo de ver se concilia con el concepto de la probabilidad expresado por KEYNES.

POINCARÉ quedó muy impresionado por este giro que estaba tomando la evolución de la ciencia. En 1911 él escribió: "Las nuevas investigaciones (cuántos) parecen poner en tela de juicio no solamente los principios fundamentales de la mecánica, sino algo que hasta ahora nos parecía inseparable del concepto mismo de ley natural. ¿Podemos todavía expresar estas leyes en forma de ecuaciones diferenciales?" El gran matemático alemán David HILBERT se pronunció no mucho más tarde en el sentido de que la física había llegado a ser demasiado difícil para los físicos.

En el medio siglo transcurrido desde entonces la ciencia ha dado la respuesta a la pregunta de POINCARÉ con la teoría ondulatoria, que opera, sí, con ecuaciones diferenciales, pero sólo para determinar funciones que son probabilidades. No nos dan, por ejemplo, la posición de un átomo en un dado momento, sino únicamente la probabilidad de encontrarse entre x y $x + dx$.

Para ilustrar un poco mejor estas ideas, visto que no puedo hacerlo por las dificultades inherentes a la materia, con la teoría de los cuántos, quiero servirme de la teoría cinética de los gases, como la he aprendido directamente de la boca de uno de sus creadores, Luidwig BOLTZMANN (7). Según esa, en un recipiente lleno de un gas con una dada temperatura y presión, hay millones de millones de moléculas, que se mueven continuamente y chocan entre sí y contra la pared del recipiente, con lo que producen la presión del gas, la cual, como la experiencia enseña, queda invariada si las condiciones físicas no son modificadas. Las moléculas tienen velocidades diferentes y solamente las con una velocidad superior a un cierto límite, las activas, provocan una reacción. Entonces entra en juego la probabilidad respecto a estas moléculas, de cuya interacción resulta el efecto global perceptible, la presión. La ciencia no se interesa en saber cuáles son las moléculas que chocan contra la pared, sino sólo cuántas en un cierto tiempo y con qué velocidad y presión. Si logra contestar a estas preguntas, se conforma con el resultado, proclamándolo ley natural.

Ahora bien; cada proceso físico es el resultado de innumerables movimientos efectuados por todos los átomos del respectivo cuerpo. Para determinar dicho resultado sería, por lo tanto, necesario conocer los movimientos de todos los átomos con sus respectivos parámetros. Pero si tenemos presente que un gramo de materia contiene más o menos 10^{25} átomos, nos damos cuenta de que ni siquiera el empleo de las máquinas electrónicas sería suficiente para dicha tarea. Es esta la razón por la que nos conformamos con los resultados estadísticos, que no nos brindan más que una probabilidad, en lugar de certezas al 100 por 100.

¿En qué modo disminuye esto el valor de las leyes naturales clásicas?

Tratándose de un número inmenso de elementos, por supuesto, sería posible que la regularidad descubierta rija para la gran mayoría de los mismos, pero no para todos. Esto no cambiaría nada en cuanto al valor práctico de la ley y de sus aplicaciones, pero significaría

(7) L. BOLTSMANN: *Vorlesungen über Gastheorie.*

que nos encontramos siempre frente a algo que únicamente es una regularidad estadística como la con las bolillas que salen del cubilete. La diferencia se reduce de cualitativa en cuantitativa: hablamos de ley natural cuando la cantidad de fenómenos que la confirman es tan abrumadora que casi no hay lugar para casos no conformes, como, por ejemplo, cuando dejamos caer una piedra. No dudamos mínimamente que irá directa y aceleradamente hacia el suelo. No obstante, podríamos muy bien imaginarnos la existencia de algún cuerpo sólido más liviano que el aire que, suelto de la mano, subiría en lugar de bajar. O podríamos concebir una hipótesis más audaz todavía, que postule la polaridad de la gravitación, en analogía al magnetismo, a raíz de la cual, mientras que la aplastante mayoría de los cuerpos es atraída por la tierra, existirían asimismo algunos que son repelidos. Hasta sería fácil dar la razón por la que no hemos nunca tropezado con tales cuerpos, y sería precisamente el hecho de que por su misma naturaleza han sido lanzados al espacio.

A quien consideraciones de esta clase parecen fantásticas y poco serias, se debe contestar que si se admite el concepto de la eternidad del tiempo y el de la infinidad del espacio, sigue como inevitable corolario que todas las combinaciones imaginables no sólo son posibles, sino seguras, y hasta deben repetirse infinitas veces. Quiero citar a este propósito el famoso ejemplo dado por Borel de los monos dactilógrafos que, tecleando a ciegas, llegan a reproducir todos los volúmenes de la Biblioteca Nacional. La respectiva probabilidad será pequeña fuera de toda imaginación, pero no igual a cero.

Son tales reflexiones que han llevado a Borel a formular su "única ley del azar", que dice: "Un acontecimiento de probabilidad suficientemente pequeña no se puede producir nunca." Ahora bien; una probabilidad es desechable en la vida común cuando es menor a 10^{-6}, que es, más o menos, la probabilidad de ser aplastado por un automóvil en las calles de París. Sin embargo, sabemos que Pierre Curie murió de este modo.

Con esta ley la probabilidad se ha reducido a los mínimos términos, sin aclarar su significado. Tal falta, sin embargo, no ha sido óbice para que el Cálculo de Probabilidad llegase a ocupar un puesto eminente no sólo en la matemática teórica, sino también en sus aplicaciones técnicas.

5. El Cálculo de Probabilidad es únicamente el conjunto de los procedimientos o de los métodos que permiten determinar probabilidades de acontecimientos complejos, con validez independiente de la definición y el significado de probabilidad. Del resto es esto algo completamente análogo a lo que sucedió con el Cálculo Infinitesimal, que hasta la mitad del siglo pasado se basaba sobre conceptos que carecían en absoluto de precisión y claridad. Recién con las investigaciones profundas y agudas de DIRICHLET, DEDEKIND, WEIRESTRASS y otros acerca de la naturaleza de los números irracionales y el concepto de lo infinitamente pequeño, se llegó a proporcionar bases rigurosas al Cálculo, que ya existía por unos siglos y había prestado servicios de trascendental importancia a la ciencia.

Si nos limitamos a aceptar como el caso más probable el de la mayor frecuencia en una serie de acontecimientos posibles, resulta claro que se trata de un valor asintótico, al cual nos vamos acercando paulatinamente con cada nueva prueba, disminuyendo siempre más la desviación entre el número observado y el previsto. Gracias al Cálculo de Probabilidad estamos en condiciones de determinar la probabilidad de que tal desviación no exceda un límite fijado. Si ponemos este límite igual a λ, la fórmula para la probabilidad de que la desviación sea igual a λ, es dada por

$$\Phi\,(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\lambda e^{-t^2}.\,dt$$

A raíz de ella la desviación decrece con el cuadrado del número de las pruebas. Por ejemplo, si la probabilidad es igual a 10^{-4} para una desviación de 1000 sobre un millón, ella es de 10^{-4} para 2000 de 10^{-9} para 3000 y prácticamente cero para desviaciones superiores. Esto equivale a decir que con aumentar el número de las pruebas el valor relativo de una posible desviación disminuye con enorme rapidez. Este fenómeno, que es debido al puro juego de las combinaciones, forma la famosa ley de los grandes números, pronunciada por primera vez por Jacobo BERNOUILLI en 1713.

De la fórmula de GAUSS para la frecuencia de los errores, harto conocida por su forma curva, ha brotado toda una ciencia, la Teoría de los Errores. Esa nos permite determinar la probabilidad de que el error que podemos cometer en repetidas pruebas no exceda un límite, por cuanto pequeño, libremente fijado de antemano, como, por ejemplo, el margen de seguridad de un puente. Si sabemos que con una probabilidad del 99 por 100 el margen de resistencia a 25 toneladas es del 20 por 100, no se permitirá el paso de vehículos que pesen más de 20 toneladas, consiguiendo así la casi-seguridad de que el puente no se derrumbe bajo un peso excesivo.

Basta, creo, este ejemplo para dar una idea de la alta importancia práctica de dicha teoría, y he aquí esta otra paradoja: que los métodos científicos destinados a procurarnos la seguridad en la vida cotidiana reposan sobre un concepto que no se logra definir.

6. Yo opino que podemos llegar a una visión mucho más clara respecto a la probabilidad si no preguntamos: ¿Qué es lo probable?, sino: ¿Qué es lo improbable?, teniendo siempre presente que la probabilidad se aplica exclusivamente a juicios empíricos, es decir, de nuestra experiencia, los que nunca brindan la certeza.

Para afirmar que de mi cubilete saldrán nueve bolillas blancas sobre diez, debo tener una razón que lo justifique; si no, se trata de un disparate. Si digo que término medio, en muchas pruebas repetidas saldrán del cubilete, que contiene igual número de blancas y negras, los dos colores con la misma frecuencia, esto sólo demuestra que no sé nada sobre las diferencias que sin duda existen entre ellas, salvo la que se refiere a su color. Estamos convencidos que no saldrán primero todas las blancas y luego las negras: sería un arbitrio de que consideramos incapaz a la naturaleza. Si ahora nos imaginamos que poseemos un dispositivo que nos permita acelerar la extracción de las bolillas, hasta llegar a hacerlas salir prácticamente todas a la vez, claro está que mitad de ellas serán blancas y mitad negras. Pero la operación que acabamos de efectuar es la misma como antes, sólo ejecutada en un tiempo mucho menor, y entonces el resultado no puede ser distinto en los dos casos. Así llegamos a la conclusión que juzgamos según la probabilidad, porque instintivamente suponemos que la naturaleza no actúa según caprichos o, como la decían los antiguos: "Natura non facit saltus."

7. Como hemos visto, la evolución de la física moderna ha contribuído sobremanera a robustecer la concepción de KEYNES acerca de la naturaleza de la probabilidad, que la reduce a una mera forma mental, por la cual se limita la validez de nuestros juicios empíricos en función a nuestros conocimientos acerca de ellos. Sin embargo,

se ha tropezado con casos donde esta concepción fracasa. Para ciertos fenómenos ni siquiera el recurso a los parámetros ocultos resultaba suficiente para explicarlos, particularmente fenómenos de radiación. La microfísica se ha visto obligada a admitir la existencia de sistemas, llamados "estocásticos", en que los acontecimientos individuales no son determinados por la causalidad, pero sí obedecen a una ley de probabilidad.

Con análogas dificultades han tropezado los estudiosos del problema de la entropía. Supongo que se conoce este concepto o, por lo menos, se ha oído hablar de él. De todos modos, es demasiado complejo para ser explicado aquí. Sea suficiente mencionar que incluye el principio de la irreversibilidad de la evolución universal, lo que, según la opinión de ciertos sabios, debe conducir a la muerte del planeta por el calor, cuando la temperatura habrá alcanzado el mismo nivel en todas partes.

Ahora bien; BOLTZMANN y GIBBS han descubierto que la entropía de un estado cualquiera es proporcional al logaritmo de su probabilidad, lo que se puede expresar también diciendo que un sistema aislado evoluciona espontáneamente siempre de un estado menos probable a uno más probable.

Con esto, después de haber sido confinada a nuestra mente, la probabilidad ha pasado al otro extremo, al convertirse en una característica esencial de los procesos físicos, con completa abstracción de nuestros conocimientos respectivos.

¿Qué conclusiones debemos sacar de esta paradoja final de la probabilidad? Ciertamente no que la concepción de KEYNES es equivocada, pero sí que no es de carácter general. Evidentemente existen dos clases de probabilidad: subjetivas, que dependen de nuestros conocimientos, y objetivas, que existen por sí mismas. Que esto sea posible no tiene que sorprendernos: en la matemática hay misterios más pasmosos, como, por ejemplo, el hecho de que la cantidad de los números primos menores de un número cualquiera tiende hacia el logaritmo de ese número.

El Cálculo de Probabilidad es un maravilloso instrumento a nuestra disposición; usémoslo como lo hacen los ingenieros con la electricidad, de la que se sirven para producir siempre nuevos milagros, sin saber mínimamente en qué ella consiste.