Algunos aspectos teóricos y prácticos del Reaseguro de Vida

Por Víctor MASJUAN TERVEL
(Venezuela)

PRIMERA PARTE

I

Riesgos cubiertos por el reaseguro de vida

El reaseguro de vida se aplica, casi exclusivamente, para cubrir el riesgo de la muerte prematura y no el de la sobrevivencia prolongada. Es decir, que se utiliza cuando la muerte del asegurado origina una pérdida a la compañía aseguradora o, en otros términos, cuando el fallecimiento del asegurado obliga a pagos que superan la "reserva" de la póliza. En los seguros "dotales puros" o de "rentas vitalicias o temporales" la prima del riesgo de muerte es negativa; pero es positiva la prima del riesgo de sobrevivencia.

En la práctica actual, junto con cubrir el riesgo de muerte, las pólizas contienen ciertos seguros adicionales relativos a la incapacidad total y permanente y a la muerte o desmembración debida a accidente. El reaseguro de estos beneficios adicionales se realiza en forma similar al que se aplica a los "ramos generales" o "seguros elementales"; por lo que no serán objeto de estudio en las consideraciones que siguen, las que se referirán al reaseguro del riesgo de muerte cuya prima sea positiva.

2

Primas de riesgo y de ahorro

Toda prima pura anual puede descomponerse en dos porciones: una que representa el costo teórico del riesgo de muerte por el año que se inicia, la "prima de riesgo", y otra destinada a agregarse algebraicamente a la reserva, la "prima de ahorro". En los planes de seguros cuyas reservas no aumentan en proporción mayor al factor de capitalización técnica, la prima de ahorro es negativa y en consecuencia la prima de riesgo supera a la prima pura anual; es el caso de los temporales entre otros posibles.

Sobre la prima de ahorro la compañía aseguradora sólo corre un "riesgo económico", ya que la inversión que haga con ella está sujeta a las eventualidades de toda colocación de dinero; en cambio la prima de riesgo contenida en la prima pura anual está destinada, junto con otras, a hacer frente a los siniestros (fallecimientos) que pueda experimentar la compañía. Cuando la compañía dispone de un cierto Fondo de Garantía (es decir de una cantidad que expone para cubrir la diferencia que pueda haber entre las primas de riesgo recaudadas y el valor de los siniestros acontecidos), la Cartera de seguros es suficientemente numerosa y los capitales asegurados no varían mucho entre sí, podría ella estar en situación de afrontar por sí sola los riesgos asumidos, *sin requerir entrar en "sociedad" con otra compañía. Pero en la* práctica sucede que o la Cartera no es numerosa o los capitales asegurados son muy desproporcionados o el Fondo de Garantía no es elevado, características que muchas veces se dan conjuntamente, lo que obliga a buscar un "socio" para afrontar los riesgos asumidos. Este socio es un coasegurador o bien un reasegurador; en el primer caso el riesgo se asume entre ambos en determinadas proporciones y frente al asegurado cada uno responde por la cuota asumida; en el segundo caso la compañía aseguradora se hace responsable ante el asegurado por la totalidad del riesgo, pero contrata con el reasegurador la cesión de una parte del mismo; llegado el caso de un siniestro la compañía aseguradora paga la totalidad del capital asegurado al beneficiario de la póliza y recupera del reasegurador la parte que había convenido con él en reasegurar.

3

Reaseguros automático y facultativo

El reaseguro de vida, al igual que el referente a ramos generales, se conviene por contratos donde se estipulan los casos en los cuales la cesión al reasegurador es automática o es facultativa. Aquí caben diversas posibilidades; puede ser obligatoria la cesión y voluntaria la aceptación o viceversa; pero casi siempre el reaseguro automático es obligatorio para ambas partes mientras el facultativo es de cesión y aceptación voluntaria.

En general, el reaseguro facultativo se emplea cuando la cedente, por alguna razón, desea retener una suma inferior al pleno convenido en el contrato automático o se trata de un riesgo agravado o subnormal que no acepta automáticamente el reasegurador o, de serlo, la cedente desea conocer el parecer de éste.

Es de norma usual que cuando se trata de reaseguros automáticos la cedente sólo envia al reasegurador la respectiva "hoja de cesión individual" con los diversos datos requeridos sobre el monto asegurado, plan, edad, vigencia, "evaluación del riesgo" (porcentaje de mortalidad o tipo de sobreprima por razón de actividad o estado físico), otros seguros en vigor, retención de la cedente en pólizas anteriores y en la presente, más todo lo relativo a las primas de reaseguro respectivas.

Si se trata de una cesión facultativa, primeramente la cedente envía al reasegurador copias de los informes de diverso tipo y exámenes médicos que la cedente haya recopilado sobre el solicitante del seguro de vida. Una vez aceptado el riesgo por el reasegurador la compañía envía la respectiva hoja de cesión individual en forma similar al caso automático.

4

Reaseguro a base de prima de tarifa

El reaseguro en el ramo de vida tiene más de un siglo. En el año 1849 comienza a practicarse entre compañías escocesas (1) bajo la modalidad de "prima de tarifa"; posteriormente aparece el sistema de reasegurar el capital en riesgo que da origen al reaseguro de "primas de riesgo".

El primer método mencionado se asemeja al reaseguro de "riesgos generales" por cuanto la cedente paga al reasegurador la misma prima unitaria que cobra al asegurado y recibe una comisión que es del orden de 100 por 100 en el primer año, 20 por 100 en el segundo y 10 por 100 en los siguientes; en algunos casos puede convenirse en pagar al reasegurador una prima unitaria de reaseguro diferente de la tarifa de la cedente, pero no es usual. Por su parte el reasegurador participa en todos los pagos que haga la cedente por siniestros, rescates y vencimientos en la proporción que corresponda al capital reasegurado. Con este método el reasegurador está obligado a formar las reservas respectivas por las porciones reaseguradas, pero se acostumbra, por varias razones, que ellas queden depositadas en manos de la cedente, la que le abona un interés convenido en el contrato de reaseguro.

Este método aún se emplea por algunas compañías en sus años iniciales, ya que la cedente recibe dinero del reasegurador por concepto de las reservas que éste debe dejar en depósito en manos de aquélla. Esta ventaja sólo es notoria si tales reservas se computan por el método de la prima nivelada; pues de serlo por el método "modificado" (2) o "zillmerado" (3), la entrega de dinero es de poca importancia. También lo emplean las compañías de gran volumen, para los riesgos con capitales asegurados muy elevados que sobrepasan sus retenciones, ya de por sí muy altas.

5

Reaseguro a base de prima de riesgo

Bajo la denominación, indistinta, de "capital, monto o cantidad en riesgo" se entiende la diferencia entre el "valor actual" de los pagos que debe hacer la compañía aseguradora al fallecer un asegurado y la reserva asignada a la respectiva póliza de acuerdo con las bases técnicas utilizadas para su cómputo. La pérdida real que experimenta la compañía será algo diferente, ya que la reserva aplicada a una póliza es sólo un valor teórico, resultante de las hipótesis sobre mortalidad, interés y gastos que intervienen en su determinación. En cierto modo podría decirse que la pérdida real es la diferencia entre el monto pagado y el valor de rescate.

El reaseguro a "prima de riesgo" se basa en la cesión de una parte del capital en riesgo asumido por la aseguradora que exceda a su "retención" o "pleno". En la práctica la retención se fija, en el respectivo contrato de reaseguro, sobre capital nominal asegurado o sobre capital en riesgo. En el primer caso el capital en riesgo retenido por la cedente varía en la misma proporción que para el reasegurador; en el segundo el capital reasegurado termina por anularse antes que la póliza haya llegado a su vencimiento convenido.

Por el capital en riesgo reasegurado la cedente paga primas de reaseguro por anualidades anticipadas. Estas primas se calculan en base a una tarifa especial que se conviene y es el resultado de multiplicar la tarifa unitaria, correspondiente a la edad alcanzada por el asegurado, por el capital en riesgo que se reasegura para el año en referencia. Es usual que el reasegurador otorgue comisiones sobre esas primas; casi siempre 100 por 100 en el primer año y a veces 20 por 100 para el segundo y 10 por 100 para el tercero; otras veces en lugar de estas últimas concede un 50 por 100 para la prima de reaseguro relativa al quinto año de la póliza. La razón de tales comisiones se justifica, aparte de objetivos de natural competencia entre reaseguradores, por el posible efecto de la selección médica en los primeros años y para ofrecer, con este método, las mismas ventajas que podían aducirse al reaseguro en base a la prima de tarifa o comercial.

6

Otras características de los reaseguros de vida

Los reaseguros de vida efectuados bajo las modalidades mencionadas son incancelables, por las partes contratantes, mientras los respectivos riesgos estén en vigor. Es decir que una vez que la compañía aseguradora ha cedido un riesgo no puede cancelarlo sino al término del mismo (anulación de la póliza, rescate o vencimiento) o por llegar a ser inferior a la retención convenida; por su parte tampoco puede el reasegurador cancelarlo. En los contratos de "prima de riesgo" se establecen excepciones a esta regla, como por ejemplo si la póliza se modifica y el capital, ahora reducido, no sobrepasa un límite determinado que puede ser justamente la retención convenida. También en estos contratos, se estipula el beneficio de retiro parcial de la Cartera de reaseguros y por el cual la cedente que haya aumentado su límite de retención puede anular las cesiones de reaseguros que se encuentren por debajo del nuevo límite. El beneficio de retiro de Cartera se permite aplicarlo a una determinada cesión cuando tiene alguna antigüedad, por ejemplo siete años, y si menos tiempo en base a una pequeña indemnización de 1 ó 2 por 1.000 del capital reasegurado para el año en que se efectúa el retiro o recuperación de la cesión.

Naturalmente, en casos de fuerza mayor podrá haber un retiro total de Cartera (guerras, quiebras, cese de relaciones, fusiones de compañías). Si el motivo para el retiro total no fuera involuntario el reasegurador tiene el derecho a reclamar una indemnización. La razón de ello se motiva —al menos teóricamente— en el hecho de que el reasegurador otorgó, en los primeros años de reaseguro de cada cesión, comisiones elevadas que significaban una pérdida para él y que esperaba recobrar a lo largo del tiempo.

También, como en el reaseguro de ramos elementales, las modalidades mencionadas para el ramo de vida contemplan una participación de la cedente en las utilidades técnicas que el contrato produzca.

7

Otros métodos de reaseguro de vida

Para evitar los cálculos sobre cesiones individuales, se han ideado métodos con el objeto de determinar, de una vez, el total de primas de reaseguro correspondientes a la Cartera cedida. Al respecto pueden citarse el "Simplematic Re" de una compañía norteamericana, el de "Liquidación anual" de Smolensky (4), el de "Generación de contratos" propuesto por Echeverría (5), el de Bjoraa (5), etc.

En el sistema Simplematic Re la tarifa de reaseguro, a partir del sexto año del contrato, se fija en forma global, es decir independiente de las edades de los reasegurados. Esta prima unitaria, para aplicar al total de capitales en riesgos reasegurados, se determina según fórmulas del uso privado del reasegurador por ajuste de las tasas de siniestralidad de los cuatro años anteriores; es decir por ajuste de la relación entre siniestros y capitales.

El método de la liquidación anual se basa en la determinación de las primas de riesgo cobradas en el ejercicio anual por la cedente, que se pueden calcular como iguales a las primas puras más los intereses correspondientes a esas primas y la reserva, menos el aumento de éstas respecto del ejercicio inmediatamente precedente.

El sistema de ECHEVERRÍA (que al presente aplica una compañía venezolana) se basa en una agrupación de pólizas por años de emisión, para cuyo conjunto determina una edad media siguiendo de cerca el método de Lidstone. La prima global de reaseguro se calcula por aplicación de la tarifa unitaria, relativa a la respectiva edad media del grupo, al total de capitales en riesgo.

En otro orden de coberturas de reaseguro podrían citarse los contratos de "exceso de pérdidas" y de "pérdida global".

Por el primero el reasegurador se hace cargo de las pérdidas de la cedente, que sobrepasan un determinado límite, cuando un accidente causa reclamaciones provenientes de dos, tres o más asegurados, según se estipule. La retención de la cedente puede ser bien una suma fija o una variable; por ejemplo igual a la mayor reclamación individual resultante o de las dos mayores o a la mayor y la mitad de la segunda mayor, etc.

En el contrato de pérdida global la responsabilidad del reasegurador comienza cuando la siniestralidad habida en el curso de un año, por ejemplo, sobrepasa una determinada proporción de las primas recaudadas. El sistema de exceso de pérdida se aplica a resultados aislados, mientras el de pérdida global a resultados acumulados. Tanto uno como otro causan primas de reaseguro en proporción a las primas cobradas por la cedente. En los capítulos que siguen se tratará exclusivamente del método de reaseguro de prima de riesgo que es el que motiva las consideraciones que aporta el presente trabajo.

8

PLENO O LÍMITE DE RETENCIÓN

Como en lo que sigue será necesario recurrir a fórmulas se expone la notación que se empleará:

C = capital nominal asegurado en la póliza;
R_t = capital en riesgo al final del año t^o;
C^r = capital nominal reasegurado;
R_t^r = capital en riesgo reasegurado durante el año t^o;
L = retención o pleno de la cedente, el cual puede ser sobre el capital nominal, o sobre el capital en riesgo, y puede variar o no con la edad del asegurado o con la clase de riesgo (*subnormal, sexo*);
V_t = reserva terminal, por unidad de capital nominal asegurado, en el año t^o;
S_t = valor actual de los pagos que hace la compañía al fallecer un asegurado en el año t^o, por unidad de capital nominal asegurado.

La retención, desde un punto de vista teórico, debiera variar tanto con la edad alcanzada por el asegurado como con el tiempo de aseguramiento; aparte, claro está, de la variación que provendría de la consideración de la tarifa de reaseguro, del fondo de garantía y ganancias de la compañía. Todo ello hace el problema muy complejo y en la práctica el pleno no se hace variar con el tiempo de aseguramiento (no es el caso aquí de referirse a la variación global que se hace de tiempo en tiempo cuando el desarrollo de la Cartera aconseja una variación del pleno, como es el caso de una inflación o crecimiento acelerado del número de pólizas o baja sustancial de la mortalidad). En cambio, muchas veces, sí se lo hace variar según la edad que tiene el asegurado al tomar el seguro o según la clase de mortalidad; en general, se lo reduce para las edades avanzadas y para los casos de una sobremortalidad superior al 50 por 100.

Por ello en la práctica el pleno L o es igual para todos los casos o sólo varía para grupos de edades o al pasar de cierto porcentaje de sobremortalidad. Una vez fijada la tabla de plenos L, queda por definirse si tales retenciones se aplican sobre montos nominales o capitales en riesgo; en el primer caso el capital en riesgo reasegurado R_t^r será para el año t^o:

$$(C - L)\ (S_t - V_t) = C^r\ (S_t - V_t)$$

y en el segundo, en cambio será:

$$C\ (S_t - V_t) - L = R_t - L$$

Algunos reaseguradores prefieren el primer sistema, pues en caso de repartirse una sobreprima, que no corresponda a un porcentaje fijo de sobremortalidad (ocupación o un desajuste en el estado de salud de orden transitorio), las operaciones aritméticas a que ello da lugar son simples, ya que basta dividírsela en la proporción que guarden los capitales nominales retenidos y reasegurados; en cambio, bajo el segundo sistema tal reparto debe hacerse en la misma relación que haya entre los capitales en riesgos retenidos y cedidos, que por ser variable de año en año obliga a varios cálculos. A este último procedimiento se opone un argumento teórico, puesto que una prima para un sobreriesgo, que se cobra en forma nivelada, puede originar reservas negativas que el reasegurador no llegaría a amortizar por anularse el reaseguro antes que ocurra el término original del período estipulado para el pago de primas. Pero estas objeciones no parecen tener importancia práctica, tanto porque son muy pocos los casos a los cuales se aplica el procedimiento indicado y porque tampoco con el primer sistema el reasegurador recupera las reservas negativas en los casos de anulación de la póliza.

El sistema de retención en base a un capital nominal no se justifica, al menos teóricamente, ya que en los planes que acumulan fuertes reservas el capital en riesgo retenido disminuye en forma sensible a lo largo del tiempo y no tendría tal disminución si el asegurado hubiera optado por un seguro temporal; para salvar esta incongruencia los partidarios del sistema fijan distintos plenos según los planes, lo cual introduce un nuevo elemento de arbitrariedad en su elección. Por eso fue que PARAIRA, según la obra de LANDRE (15) y citado por MICHALUP (18), sugirió en 1893 que la retención se fijara en relación con el capital en riesgo y no respecto del nominal.

10

VARIACIÓN DEL PLENO CON EL PERÍODO DE ASEGURAMIENTO

Los efectos de la selección médica se manifiestan en una reducción de las tasas de mortalidad en los tres o cinco primeros años de aseguramiento, respecto de las que acusan los asegurados con mayor tiempo. Antes se estimaba que la selección médica influiría hasta más allá del quinto año; pero hoy, en virtud de los adelantos médicos tanto de tratamiento como de diagnóstico, se ha reducido ese período, en especial si se trata de asegurados de edades no avanzadas, para quienes los riesgos de muerte más intensos son los accidentes.

La reducción de las tasas de mortalidad que produciría la selección médica llevaría a pensar que los plenos de retención podrían ser variables a lo largo del tiempo de aseguramiento, aparte de que el propio envejecimiento del asegurado también haría pensar en otro motivo de variación. Todo ello, como se dijo en el capítulo precedente, hace el problema sumamente complejo y no se ha alcanzado la solución teórica que conjugue estas variables. Tanto por esta razón como la necesidad de hacer prácticos los sistemas, para que su aplicación en la gestión diaria pueda hacerse sin dificultades y sin el auxilio de la alta técnica actuarial, se acostumbra fijar los plenos en forma independiente del tiempo de aseguramiento y de la edad alcanzada por el asegurado, y si se llega a establecer una tabla variable de retenciones, éstas serán sólo función de la edad inicial de aseguramiento y aun así para grupo de edades y con valores "redondos"; es decir en múltiplos de miles o decenas de miles de unidades monetarias.

11

Determinación del pleno

Para la determinación del pleno se han propuesto diversas fórmulas cuya base descansa en diferentes teorías y distintas premisas. Con el auxilio de la teoría clásica o del riesgo individual han indicado soluciones: Laurent, Landre, Bohlmann, Dubourdieu, Michalup y otros.

Kern y Thepaut han señalado fórmulas prácticas para la determinación del pleno en base a la teoría del riesgo colectivo de F. Lundberg (7) y desarrollada por Laurin (8), Cramer (9), Segerdahl (10), Esscher (11) y los actuarios de la Escuela Escandinava.

Por su parte De Finetti y Baudez (12) han desarrollado una nueva teoría que considera una Cartera de seguros como un caso especial del famoso y clásico problema de "la ruina de los jugadores".

Tanto ellos como DUBOURDIEU logran así fórmulas para la determinación del pleno.

En la parte siguiente de este trabajo se expondrán en forma somera los resultados alcanzados por los autores citados y que se refieren al pleno para una Cartera de seguros temporales por un año; que por lo demás es lo que interesa al método de reaseguro de prima de riesgo, que asimila la cobertura del riesgo a un seguro anualmente renovable.

SEGUNDA PARTE

I

TEORÍA CLÁSICA

La notación que sigue se utilizará para la presentación de las fórmulas alcanzadas por los autores que han aplicado la teoría del riesgo individual o clásica a operaciones de seguros por un año:

C_i = capitales en riesgo correspondiente a un asegurado "i";

$s_i^2 = C_i^2 p_i q_i$ = cuadrado del riesgo medio cuadrático por el asegurado "i";

S = riesgo medio cuadrático para toda la Cartera $= \sqrt{\Sigma s_i^2}$ (supuesto los riesgos independientes);

K = capital o fondo de garantía que expone la Compañía;

p_i, q_i = probabilidades anuales del asegurado "i" de sobrevivir un año más y morir durante el año, respectivamente;

g_i = ganancia anual, por unidad de capital en riesgo, que proporciona un riesgo "i" = prima unitaria de tarifa menos gastos y menos la prima pura "q";

$G = \Sigma C_i g_i$ = ganancia anual por toda la Cartera;

L = pleno o límite de retención;

$\&$ = coeficiente de "solvencia" $= \dfrac{K+G}{S}$;

I = valor medio esperado de siniestros $= \Sigma C_i q_i$;

I_m = mayor valor "verosímil" de siniestros $= I + \& \,.\, S$.

En la teoría clásica se supone que en un año la compañía tendrá que pagar *indemnizaciones por siniestros, a lo más, igual* al valor medio esperado I más una desviación desfavorable que no superará un número "&" de veces el riesgo medio cuadrático S. Cuanto mayor se elija este coeficiente de solvencia &, mayor será la probabilidad de que no ocurra una siniestralidad superior a I_m y por ello se dice que verosímilmente será el mayor valor que podrá alcanzar el pago de siniestros. Si la Cartera es muy numerosa y los capitales asegurados no son muy dispares, puede aceptarse que la distribución de los siniestros anuales seguirá una ley normal (teorema central del límite) (13) y en consecuencia puede elegirse para "&" el valor 3 como un prudente índice o coeficiente de solvencia.

Según LAURENT (14) el pleno L para un nuevo riesgo con probabilidades "p" y "q" y ganancia "g" sería aquel que no exige el aumento del capital de garantía K. En consecuencia se tiene:

$$K + G = \& \,.\, S$$
$$K + G + Lg = \& \sqrt{S^2 + L^2pq}$$

para antes y después de la nueva operación, respectivamente. De todo lo cual se deduce:

$$(K + G + Lg)^2 - (K + G)^2 = \&^2(S^2 + L^2pq) - \&^2S^2$$

y finalmente:

$$L = \frac{\dfrac{2\ \&\ S\ g}{2}}{\dfrac{2}{\&}\,pq - g} = \frac{2\ S\ g}{\&\ p\ q}$$

Por su parte LANDRE (15) afirma que el pleno para el nuevo riesgo no debe variar la relación entre el riesgo medio cuadrático y la suma de capitales asegurados $C = \Sigma C_1$. Este punto de vista lo lleva a determinar un valor L tal que

$$\frac{S^2}{C^2} = \frac{S^2 + L^2pq}{(C + L)^2}$$

relación que produce la siguiente fórmula:

$$L = \frac{2\ S^2C}{C^2pq - S^2}$$

que en determinados casos podría dar resultados negativos.

Para BOHLMANN (16) el pleno no debería variar la relación entre la ganancia y el riesgo medio cuadrático, afirmación que se traduce en la siguiente relación:

$$\frac{G^2}{S^2} = \frac{(G + Lg)^2}{S^2 + L^2pq}$$

y de la cual se obtiene para L la fórmula:

$$L = \frac{2\ S^2\ Gg}{pqG^2 - S^2g^2}$$

En su excelente texto sobre la Teoría Matemática del Riesgo DUBOURDIEU (17) aplica la teoría clásica a la determinación de los plenos relativos y absolutos. Los primeros resultan ser proporcionales al cociente entre "g" y "pq"; o sea que

$$L = r\,\frac{g}{pq}$$

El valor de "r" lo determina de modo que el coeficiente de solvencia "&" no sea menor de 3 ó 4, y así logra los valores de los plenos absolutos.

La fórmula de este autor demuestra que si la ganancia unitaria "g" es proporcional a la prima pura "q", el pleno sería inversamente proporcional a "p"; y como éste varía poco entre las edades usuales en el seguro de vida, podría decirse que el pleno sería independiente de la edad. Si en cambio, se estima que la ganancia es prácticamente constante, o sea independiente de la prima pura "q", se tendría que $L \cdot q$ sería casi constante; dicho de otro modo, que la prima de riesgo retenida por la cedente debería ser casi constante. A esta afirmación llega por otro camino, MICHALUP (18).

Como base a esta teoría "individual" o "clásica" se presentaron varios trabajos al XIV Congreso Internacioal de Actuarios, en Madrid. Entre ellos cabe citar una importante contribución de LASHERAS-SANZ (6) para "establecer una teoría matemática del reaseguro" que se extendería a los diversos tipos de riesgos y a los diferentes contratos de reaseguro; como también las fórmulas para el cálculo del pleno, de estructura similar a las ya apuntadas, a que llegan DEITZ (6) y SAVIGNON (6).

2

Teoría del riesgo colectivo

Thepaut (19) y Kern han intentado aplicar la teoría colectiva del riesgo a la determinación del pleno en los seguros de vida y ha llegado el primero a la siguiente solución para el pleno mínimo:

$$L = \frac{6g}{3q + 2g} \cdot \frac{K}{B}$$

donde "B" es tal que e^{-B} expresa la probabilidad máxima de ruina para la compañía. Si se toma $B = 10$ como "índice de solvencia"; es decir, que, por ser la probabilidad de ruina no mayor de $e^{-10} = 1$: : 22.000 se supone que ello no ocurrirá, el valor L sería aproximadamente:

$$L = 0{,}2\,K \frac{g}{q}$$

ya que "q" es en general bastante mayor que "g".

Si se admite que "g" varía entre un 20 por 100 y 50 por 100 de "q", los planos estarían comprendidos entre un 4 por 100 y un 10 por 100 del valor del fondo de garantía.

Kern (20) encuentra que el pleno L produce una probabilidad de ruina que no sobrepasa el valor:

$$-K \frac{2b}{L\,e\,2b} \quad ,, \quad \frac{1}{1 + b}\, e$$

donde "b" es el cociente g : q.

Por su parte el autor ha encontrado que si se determina la cantidad auxiliar "c" de tal modo que

$$b = \tfrac{1}{2}\, c \cdot e^{c}$$

resulta ser la probabilidad de ruina inferior a

$$-c \frac{K}{L} \quad ,, \quad \frac{1}{1 + b}\, e$$

fórmula similar a la de KERN, pero que, para una misma cota superior de la probabilidad de ruina, da un valor mayor para L, ya que

$$c > 2b \cdot e^{-2b}$$

3

TEORÍA DE LA "RUINA DEL JUGADOR"

DE FINETTI (21) al aplicar el teorema sobre la ruina del jugador a un juego no equitativo llega a la conclusión que la probabilidad de ruina no será mayor de e^{-aK} si el pleno L no sobrepasa de

$$L = \frac{2g}{a \cdot pq}$$

Si se hace $aK = B$ la fórmula queda

$$L = \frac{2g}{pq} \cdot \frac{K}{B}$$

prácticamente igual a la encontrada por THEPAUT al aplicar la teoría del riesgo colectivo; resultado que no sorprende desde que DUBOURDIEU ha mostrado en su magnífico tratado, ya mencionado, que coinciden en primera aproximación las teorías clásica o individual, la colectiva y la basada en el teorema de la ruina del jugador.

4

ELECCIÓN PRÁCTICA DEL PLENO

La sumaria reseña de fórmulas propuestas por diversos autores, que se han colocado en diversos puntos de vista, muestra que ni siquiera se ha resuelto el problema teóricamente. Por otra parte aun si se decide elegir una determinada fórmula queda subsistente el problema de la exacta determinación de las variables que entran en ella, como serían los coeficientes de solvencia, los valores de "q" y de "g" y la independencia de los riesgos.

Todo ello obliga a elegir los plenos en una forma más o menos arbitraria, alrededor de los valores que la teoría pueda proporcionar. Una segunda razón para la elección arbitraria estriba en el hecho de que por razones prácticas los plenos deben ser números "redondos" y variar lo menos posible de un riesgo a otro. Sentadas estas premisas, cabe estudiar alguna fórmula práctica que permita "ver" cuál o cuáles serían los plenos que debieran elegirse y escoger finalmente un valor intermedio "redondeado".

Una solución posible podría ser la que se expone a continuación que considera un solo pleno, independiente de la edad y tiempo de aseguramiento. El hecho de que el reasegurador no cobra prima de reaseguro por el primer año, desde que otorga una comisión de reaseguro del 100 por 100, y que además concede una participación en las utilidades, vuelve a complicar el problema y de ahí que sea necesario y justificable que se utilicen valores promedios para la mortalidad y para la tarifa de reaseguro.

Además de las notaciones ya introducidas anteriormente, deben agregarse estas otras:

R_i = monto en riesgo para el asegurado "i" durante el año de cálculo;

L_i = monto retenido por la compañía por el asegurado "i";

$W = \Sigma R_i$ = suma de los capitales en riesgo para el total N de asegurados;

$U = \Sigma L_i$ = suma de los capitales en riesgo retenidos por la compañía;

Q_i = tarifa del reasegurador para el riesgo "i" (por año y por unidad de capital en riesgo reasegurado);

E_L = prima total que, cuando retiene L_i, paga la compañía al reasegurador en el respectivo año;

I_L = valor medio esperado de las indemnizaciones pagadas por la compañía por las partes retenidas;

S^2 = cuadrado del riesgo medio cuadrático de la Cartera $= \Sigma p_i q_i R^2$;

$S^2_{\cdot}$ = cuadrado del riesgo medio cuadrático por la Cartera retenida $= \Sigma p_i q_i L^2_i$.

El valor de la retención L_i será igual a R_i cuando éste no supere al pleno L e igual al pleno en los demás casos. Los otros símbolos definidos tienen por valor:

$$E_L = \Sigma Q_i(R_i - L_i) = Q(W - U_L)$$

sumatoria en la cual los términos son nulos cuando $L_i = R_i$, y "Q" es la tarifa promedial que aplica al reasegurador.

$$I_L = \Sigma q_i \cdot L_i = q \cdot U_L$$

donde "q" es la mortalidad promedia que experimenta la cedente por la parte retenida.

Si la compañía reasegurara íntegramente su Cartera pagaría por ello una suma anual E_O igual a $Q \cdot W$ y por ese costo quedaría eximida de riesgo alguno. En cambio si fija un límite de retención L pagaría al reasegurador solamente $E_L = Q \cdot (W - U_L)$ o sea que tendría una economía de $Q \cdot U_L$ (estrictamente el nuevo promedio Q no será igual al otro; pero dentro de las aproximaciones al problema puede aceptarse la igualdad). Esta economía tiene por contrapartida un egreso probable igual a $I_L = q \cdot U_L$ más una posible desviación desfavorable.

Por consiguiente el pleno L debe ser tal que la economía sea suficiente para cubrir el valor medio de las retenciones siniestradas más la mayor desviación que, verosímilmente, puede esperarse; y con un alto margen de seguridad se estima que la desviación no supera a 3 ó 4 veces el riesgo medio cuadrático de la Cartera retenida. O sea que debe cumplirse:

$$(Q - q) \cdot U_L > 3\ S_L = 3\sqrt{\Sigma p_i q_i L_i^2} \approx 3\sqrt{q \Sigma L_{ii}^2}$$

Esta es una inecuación para L, cuya solución puede obtenerse por tanteos. Primeramente se sustituirán los valores promedios para Q y q que se consideren apropiados, conforme a la experiencia o impresión que sobre ellos se tenga. En seguida se ordenarán los capitales en riesgo de menor a mayor, o se agruparán si lo primero resultare laborioso; se darán valores a L y se calcularán los miembros de la desigualdad. El pleno podría ser un valor intermedio entre el primer L que invierte la desigualdad y el precedente, que se redondearía a una cantidad en miles o decenas de miles de unidades monetarias.

Naturalmente un pleno determinado por el procedimiento indicado resultará muy bajo, ya que no se toma en cuenta sino la eventual ganancia por la retención. Si además se considerara la exposición a perder un capital de garantía "K", la relación anterior tendría en el primer miembro a este valor como sumando.

...puesto no puede pretender el dar una determi-
...ventajoso; pero sí, rápidamente, permite apreciar
...ud en que él se encuentra.

5

Ejemplo de estimación del pleno

Para precisar el método sugerido en el punto precedente se desarrollará un ejemplo simplificado. Se supondrá que la tarifa de reaseguro es de 7 por 1.000 anual, que la mortalidad realmente esperada es de 4 por 1.000 en promedio y que la Cartera de monto en riesgo se distribuye como sigue:

Monto en riesgo (miles Bs.)	Número de riesgos		Monto totales en riesgos (miles Bs.)		(Montos en riesgo)[2] (10^6 Bs. 2)	
	Distribución	Acumulados	Distribución	Acumulados	Por riesgo	Por N.° de riesgos
5	500	6.000	2.500	140.500	25	12.500
10	2.000	5.500	20.000	138.000	100	200.000
20	2.500	3.500	50.000	118.000	400	1.000.000
40	500	1.000	20.000	68.000	1.600	800.000
80	300	500	24.000	48.000	6.400	1.920.000
120	200	200	24.000	24.000	14.400	2.880.000
Totales.	6.000	—	140.500	—	—	6.812.500

Esta Cartera significaría anualmente, para diversos plenos de retención, los pagos por reaseguro que se indican, junto con los "valores medios" de los siniestros esperados en razón de las retenciones hechas por la compañía.

Límite de retención (miles Bs.)	Montos totales en riesgo (miles Bs.)		Gastos por mortalidad (miles Bs.)		
	Retenidos	Cedidos	Siniestros esperados a/c. compañía	Pagos por reaseguro	Total
0	0	140.500	0	983	983
10	57.500	83.000	230	581	811
20	92.500	48.000	370	336	706
30	102.500	38.000	410	266	676
40	112.500	28.000	450	196	646
50	117.500	23.000	470	161	631
100	136.500	4.000	546	28	574
120	140.500	0	562	0	562

La Cartera supuesta contiene 6.000 riesgos independientes, de los cuales 500 son por un monto de Bs. 5.000 más 2.000 por un monto en riesgo de Bs. 10.000, etc. El total de montos en riesgo para esa Cartera suma Bs. 140,5 millones.

Si la compañía reasegurare completamente la Cartera cedería Bs. 140,5 millones de montos en riesgo, por los cuales pagaría al reasegurador Bs. 983.000 anuales en base a la tarifa de 7 por 1.000. Como no retendría nada, no tendría siniestros por propia cuenta y en consecuencia el riesgo total de la Cartera tendría un costo fijo de Bs. 983.000 al año.

En cambio si adoptare un pleno de Bs. 30.000 retendría la totalidad del monto en riesgo de los casos en que no se sobrepasa esa suma. En el ejemplo supuesto, los 5.000 menores montos en riesgo serían totalmente retenidos por la compañía y tendría que reasegurar los 1.000 casos que corresponden a montos de Bs. 40.000 ó más. Como éstos significan un total de Bs. 68 millones de monto en riesgo y en cada uno se retienen Bs. 30.000 quedan por reasegurar sólo Bs. 38 millones.

La adopción del pleno de Bs. 30.000 originaría un pago cierto al reasegurador de Bs. 266.000 anuales y un "valor esperado" de siniestros a cargo de la compañía de Bs. 410.000 como resultado de aplicar la tasa media de 4 por 1.000 anual por la mortalidad esperada, al total de montos en riesgos retenidos por la compañía. En consecuencia en un largo período de años, para que hubiere lugar al juego de las compensaciones entre las desviaciones en más y en menos, podría esperarse un costo total promedio de Bs. 676.000 anuales por asumir la compañía el riesgo total de la Cartera.

Naturalmente, cuanto mayor sea el pleno menor será la suma "promedia" anual que costaría el asumir el riesgo de esa Cartera. Por ello entraña, a su vez, la contingencia de más fuertes desviaciones desfavorables. En el cuadro numérico que sigue se determina la mayor desviación que verosímilmente puede ocurrir.

Para cada valor del pleno se ha calculado la suma de las segundas potencias de las retenciones resultantes en cada riesgo asumido, cuyos resultados están en la segunda columna. En la tercera columna figuran los valores de muliplicar esas sumas por la tasa de 4 por 1.000 y en la columna siguiente la raíz cuadrada de tales productos, lo que determina el "riesgo medio cuadrático" de la Cartera retenida. Finalmente en las columnas restantes se reproducen los gastos "medios" por la mortalidad (ya calculados en el cuadro precedente) y se agregan las desviaciones "máximas verosímiles" (que se han supueso iguales a tres veces el riesgo medio cuadrático).

Límite de retención (miles Bs.)	Suma de los cuadrados de retenciones (10^6. Bs^2)	Riesgo medio cuadrático		Gastos «máximos» por mortalidad (miles Bs.)			
		al cuadrado	simple	medios	desv.	máximos	Dif.
0	0	0	0	983	0	983	0
10	562.500	2.250	47	811	141	952	172
20	1.612.500	6.450	80	706	240	946	277
30	2.112.500	8.450	92	676	276	952	307
40	2.812.500	11.250	106	646	318	964	337
50	3.262.500	13.050	114	631	342	973	352
100	5.932.500	23.730	154	574	462	1.036	409
120	6.812.500	27.250	165	562	495	1.057	421

Nota: Los valores para el cuadrado del "riesgo medio cuadrático" están expresados en $10^6 \cdot Bs^2$ y los de la potencia simple en miles de Bs.

Los cálculos reseñados muestran que el riesgo medio cuadrático para el caso de un pleno de Bs. 10.000 sería de Bs. 47.000 ó sea que los pagos que anualmente la compañía haría por cuenta propia en materia de siniestros tienen una distribución tal que su valor medio es de Bs. 230.000 y una desviación típica de Bs. 47.000. Si se toma como valor máximo verosímil un pago igual al valor medio más tres veces esa desviación típica, en un "año malo" la compañía tendrá que hacer frente a gastos "medios" de Bs. 811.000 más Bs. 141.000 por desviación desfavorable; todo lo que hace un total de Bs. 952.000 como "máximo verosímil".

El costo mínimo para uno de estos "años malos" sería de Bs. 946.000 si se retuviera por la compañía un monto en riesgo de Bs. 20.000. Si en cambio la retención fuere de Bs. 50.000 el costo total, para el año más desfavorable, todavía no alcanzaría al de reasegurar íntegramente la Cartera. Si se retuvieran Bs. 100.000 por riesgo, la Cartera demandaría un gasto por mortalidad de Bs. 574.000 anuales en promedio y en consecuencia habría una diferencia, o economía, de Bs. 409.000 respecto del caso de reaseguro total; pero a cambio de esta economía promedia de Bs. 409.000 por año se queda sujeto al riesgo de que si ocurre la máxima desviación verosímil, que alcanza a Bs. 462.000 se tendría un resultado inferior a si se hubiese reasegurado totalmente.

Parece innecesario repetirlo, pero los resultados que proporciona este camino deben servir sólo de guía, ya que se introducen varias hipótesis simplificatorias en el tratamiento del problema.

En todo caso, rápidamente se tiene a la vista un esquema de valores aproximados de lo que resultaría si se eligiera uno u otro valor para el pleno de retención. Por ejemplo, si se elige el pleno de Bs. 30.000 en lugar de Bs. 20.000 se arriesga la compañía a que en un "año malo" la Cartera le cueste Bs. 6.000 más; pero en cambio en promedio ganaría Bs. 30.000 más por año al elegir el pleno mayor.

6

Estimación del pleno por las fórmulas de varios autores

A simple título comparativo se aplicarán las fórmulas, de los autores mencionados más atrás, para la determinación del pleno que correspondería a la Cartera supuesta en el ejemplo precedente.

En la fórmula de LAURENT

$$L = \frac{2\ S\ g}{\&\ p\ q}$$

habría que hacer p = 1 (aproximadamente); q = 4 por 1.000; g = 3 por 1.000 (diferencia entre la tarifa de reaseguro y el valor supuesto para la mortalidad realmente esperada) y & = 3 (que así se ha supuesto como proporción entre la máxima desviación verosimil y la típica). En cuanto a S depende de la retención que previamente se haya elegido.

La fórmula indicaría que si originalmente no se ha retenido nada en los riesgos asumidos, lo que hace S = 0, no podría fijarse jamás un pleno puesto que siempre daría el valor cero. Pero si se descarta este caso y se supone, por ejemplo, que la retención original es de Bs. 100.000 correspondería a S el valor de Bs. 154.000 y por lo tanto al asumir un nuevo riesgo la compañía podría retener.

$$L = \frac{2 \times 154 \times 3}{3 \times 4} = \text{Bs. } 77.000$$

que es inferior a su retención original; si ésta fuera sólo de Bs. 50.000, se tendría para L:

$$L = \frac{2 \times 114 \times 3}{3 \times 4} = \text{Bs. } 57.000$$

lo cual muestra que la fórmula de LAURENT daria un pleno de más o menos Bs. 50.000. Ello entraña un cierto capital de garantía que alcanzaría a K = 3 • S — G = 342.000 — 352.000 = negativo; es decir que no sería necesario.

La fórmula de LANDRE, si se supone que ya se retienen Bs. 50.000 daría para un nuevo riesgo un pleno de Bs. 55.000 lo que está en concordancia con lo señalado por la fórmula de LAURENT.

En cuanto a la fórmula de BOHLMANN para un pleno original de Bs. 50.000 daría una retención de casi Bs. 56.000 para un nuevo caso; lo que también concuerda con lo resultante de las anteriores.

La fórmula de DUBOURDIEU exige la consideración de un cierto capital de garantía, que tendría que ser mayor que la diferencia entre la desviación máxima verosímil y el valor medio de la ganancia; es decir que $3 \cdot S_L - G_L \leqslant K$ donde tanto S_L como G_L se refieren al riesgo medio cuadrático y la ganancia media esperada cuando la compañía tiene un pleno L. Por inspección de los valores apuntados en los cuadros del ejemplo de Cartera, se ve que K sería negativo para plenos inferiores a Bs. 50.000 y debería alcanzar a Bs. 53.000 si se adoptare un pleno igual a Bs. 100.000.

Las restantes fórmulas de KERN, THEPAUT y DE FINETTI hacen depender el pleno del capital de garantía y por ello no son comparables con las hasta aquí utilizadas.

7

CONCLUSIONES

La somera enumeración de fórmulas presentada revela que el problema de la determinación del pleno no tiene respuesta única; depende de la posición que se adopte respecto a lo que se estima como "seguridad" de la compañía frente a las desviaciones que se presentarán, como también de los resultados inmediatos o a más largo plazo que se deseen obtener. Por último hay que tomar en cuenta que en todas las fórmulas interviene la tasa de mortalidad "q" que sólo puede apreciarse con exactitud si se tiene un gran número de observaciones; lo que entre nosotros no se da todavía, por el reducido número de asegurados.

Lo anterior lleva a que llegado el momento de entrar en el terreno de la práctica, el pleno se decidirá en forma bastante subjetiva y por ello será ilógico que se lo fije en forma rígida. Será pues aceptable que pueda tener variaciones, si bien no importantes, de un caso a otro aunque se trate de riesgos similares; o que varíe un poco de una edad a otra. Esta conclusión será muy útil para justificar los procedimientos simplificados para los cómputos de las primas de reaseguro, que se analizarán en la parte final que sigue.

TERCERA PARTE

1

Procedimiento para las cesiones de reaseguro

Cada póliza que exija reaseguro origina una "hoja de cesión" en la cual, junto con los diferentes datos relativos a la identificación del asegurado y a la respectiva póliza y modalidades del riesgo, deben señalarse los capitales retenidos y reasegurados; esta información debe insertarse tanto si se reasegura bajo la forma de "prima de tarifa" o "prima de riesgo". Pero mientras en el primer sistema sólo basta después agregar la prima cedida al reaseguro y las comisiones de los tres o cuatro primeros años (o sean unos tres o cuatro cálculos simples) en el método de prima de riesgo, es indispensable agregar los valores de los capitales en riesgos reasegurados, para un número de años que pueda variar entre 5 y 10, y las respectivas primas de reaseguro. Esta operación es algo laboriosa y expuesta a errores, por lo que siempre se la hace presente al enumerar las desventajas del sistema, que en todo caso estaría ampliamente compensada por las ventajas que él presenta por su flexibilidad para amoldarse a cualquier situación cambiante (rebaja de primas, retiro parcial de cartera).

Para anular esta aparente desventaja se han ideado diversas soluciones que abrevian los cálculos o lo simplifican al menos y será materia de lo que sigue hacer un recuento y análisis de las mismas.

2

Cálculo del capital en riesgo

Si en la "hoja de cesión" se indican los capitales en riesgo reasegurados durante cinco años de seguro, será necesario calcular estos cinco capitales y las cinco correspondientes primas de reaseguro; con la excepción de la prima de primer año, desde que es usual que se conceda el 100 por 100 de comisión para ese año.

Si en lugar de señalar sólo lo relativo a cinco años de reaseguro se deseara de una vez hacerlo para diez años, por ejemplo, el número de cálculos sería de diez capitales en riesgo reasegurados y a lo menos nueve primas para los años de renovación.

Tales operaciones no sólo exigen un determinado tiempo sino que, como es natural, a mayor número de ellas mayor es la posibilidad de cometer errores. Por otra parte el cálculo del capital en riesgo y las correspondientes primas tiene que encomendársele a personal de cierta especialización con el consiguiente costo operativo. De allí que si se logra tanto simplificar las operaciones aritméticas como reducir el número de las mismas, se logra una economía junto con una menor posibilidad de errores.

3

Métodos manuales y mecánicos

Naturalmente las primeras simplificaciones ideadas han correspondido al cálculo manual. Hoy en día, con el avance de los procedimientos de las computadoras electrónicas se han desarrollado métodos utilizables por estos sistemas.

La simplificación en el cálculo manual es de importancia para la compañía cedente, a quien generalmente corresponde hacer los cómputos y también lo es para el propio reasegurador al momento de hacer la revisión de los valores consignados en la hoja de cesión.

Los métodos con el uso de equipo electrónico son aplicados por el reasegurador, quien produce, en base a una mínima información por parte de la cedente, las primas de reaseguro y aun los respectivos capitales en riesgo.

Estos métodos simplificados, tanto manuales como mecánicos, no pueden aplicarse a todos los planes de seguros; pero cubren la mayoría de los casos.

Quizás dentro de unos pocos años ya los cálculos por medios mecánicos estarán muy generalizados y los manuales estarán en retirada, los cuales para la próxima generación serán, muy posiblemente, sólo un recuerdo histórico.

4

Cálculo manual simplificado del capital en riesgo

Una primera idea para simplificar las operaciones descritas consistiría en preparar, previamente, tablas con capitales en riesgo para cada plan, edad y diferentes montos nominales de seguro. Pero de inmediato se ve lo numerosas que serían estas tablas y ello hace impráctica la idea. En efecto, una compañía tiene a lo menos 10 planes en producción y las tarifas abarcan no menos de 40 edades; o sea que se necesitarían 400 tablas para un solo valor del capital nominal, y como éstos, en la práctica, son a lo menos 10 los de más venta, ya resultaría un total de 4.000 tablas.

En la parte destinada a la formulación matemática del pleno se vio que no había consenso entre los autores y que por consiguiente su determinación, a la hora actual, contiene un margen de subjetividad. Al ser, pues, algo arbitraria la fijación del mismo no puede objetarse que sea calculado sólo aproximadamente el capital en riesgo, pues el error que se cometa sólo significará que en realidad la cedente está reteniendo o algo más o algo menos que lo supuesto. Así si una compañía retiene Bs. 30.000 y en el cálculo del monto en riesgo comete un error por aproximación de Bs. 5.000 ello significa que o bien en realidad retiene Bs. 25.000 ó Bs. 35.000 según sea el error por exceso o defecto. Diferencias como éstas no afectan la seguridad o solvencia de la cedente en lo más mínimo y su aceptación significa la posibilidad de simplificar las operaciones de reaseguro a prima de riesgo, como se muestra a continuación.

En muchos planes la reserva unitaria varía poco, para una misma vigencia, con la edad del asegurado. Es el caso de los dotales por un número fijo de años y otros planes en los cuales el factor capitalización tiene predominio; o bien en los planes temporales uniformes o decrecientes, de no muy largo período, que acumulan reservas insignificantes.

Para estos planes puede elegirse, como base de cálculo del capital en riesgo, una misma reserva cualquiera que sea la edad del asegurado. Con ello se cometerá un error en más o menos; pero quedará dentro de los límites tolerados para variación del pleno de retención. Esta reserva, independiente de la edad, tendría que ser una reserva "promedio" entre el mínimo y máximo de los valores para las diferentes edades, que puede ser la correspondiente a una edad intermedia en el rango de la tarifa.

En el cuadro que sigue se insertan los valores de la reserva para un seguro dotal a 20 años por 1.000 unidades monetarias, para distintas edades y vigencias, según la tabla CSO 1958 al 3 ½ por 100:

Edad inicial	Reserva terminal para el año de vigencia				
	3	6	9	12	15
20	108	229	363	512	679
30	109	230	364	513	678
40	110	231	364	511	675
50	112	232	362	504	665
60	115	234	357	490	641

Si en lugar de tomar la reserva correspondiente a la edad del asegurado se utilizara siempre la correspondiente a la edad 50, en este plan dotal se introducirán errores máximos, en la determinación del capital en riesgo, del orden del 0,4 por 100 del monto nominal en el tercer año de vigencia; del 0,5 por 100 en el noveno año y del 2 por 100 en el décimoquinto año de vigencia. Para llegar a cometer un error de Bs. 5.000 sería necesario que el capital nominal asegurado fuera mayor de Bs. 200.000, monto que no es frecuente asegurar y en todo caso siempre queda el recurso, para estas raras ocasiones, de hacer el cálculo exacto.

Esta pequeña variación con la edad, que anotan las reservas de los seguros dotales para un número fijo de años, sugirió al autor en 1950 (22) la idea de utilizar una sola tabla de reservas, la correspondiente a la edad 40, cualquiera que fuera la edad del asegurado. Así simplificado el cálculo es posible preparar, previamente, tablas de capitales en riesgo para los montos nominales más usuales; en efecto el problema se reduce a utilizar una sola tabla por plan en lugar de 40 que habrían correspondido a las diferentes edades de una tarifa.

Llegado el caso de hacer una cesión, ya no es necesario hacer el cálculo de los capitales en riesgo, sino que basta consultar la tabla respectiva del plan y copiar los valores correspondientes. En cuanto a las primas, éstas sí deben calcularse puesto que se computarán en base a la verdadera edad del asegurado.

El método se aplica, también, a otros planes si las reservas no varían mucho con la edad. Para los seguros de vida entera puede utilizarse el método, dividiendo el rango de edades en dos o tres grupos, según sea el orden de diferencias que se acepte.

5

Variación de las reservas en los planes dotales y otros

No es de extrañar que para una misma vigencia la reserva varíe poco, de una edad a otra, en los planes dotales a "n" años. En efecto, la prima de un seguro dotal es la suma de la de un plan de capitalización a los mismos "n" más la correspondiente al riesgo, diferencia entre el capital nominal y la reserva de capitalización. Esta última prima produce reservas nulas al principio y al fin del seguro y en general negativas; intuitivamente se ve que no pueden ser muy importantes y en consecuencia las reservas del seguro dotal no pueden presentar mucha variación entre diferentes edades.

Esta idea sugirió a Michalup (23) simplificar el cálculo del capital en riesgo de los dotales mediante la sustitución de la reserva exacta por la correspondiente al seguro de capitalización de igual período; pero a una tasa de interés algo superior a la utilizada en el seguro. En esta forma, el aumento de la tasa de interés produce reservas iguales a la de un dotal al interés técnico del seguro si la mortalidad es constante y equivalente a dicho aumento de tasa.

Tampoco hay gran variación en las reservas de los seguros a término fijo, base de los denominados "educacionales", desde que el capital en riesgo de este plan es igual al de un dotal de igual período, si bien de distinto monto nominal.

En otros planes de fuerte capitalización, cuando hay riesgo por cubrir hasta el final del período, también se presentan estas características de poca variación en las reservas. No así en el dotal múltiple, que equivale a un dotal simple por un cierto número de años, después de lo cual se transforma en un seguro de capitalización pura (24). El período del dotal simple aumenta con la mayor edad y ello introduce variaciones sensibles en las reservas.

En el caso de los seguros temporales, si la duración de ellos no es muy larga, la reserva toma valores poco significativos. Por ello, también puede decirse que la reserva tiene poca variación y en la práctica del reaseguro ya está aceptado que el cálculo del capital en riesgo no tome en cuenta dicha reserva; por lo que el monto reasegurado queda constante a lo largo del tiempo. Queda pues la pregunta: Si en los temporales se altera el pleno al no tomar en cuenta la reserva, ¿no se justifica que las reservas de otros planes puedan calcularse aproximadamente? Las respuestas han sido las soluciones señaladas hasta aquí, y las que se verán más adelante.

6

Cálculo simplificado de la prima de reaseguro

Desde que el capital en riesgo puede calcularse con aproximación según las soluciones expuestas, nada de absurdo tiene que tal aproximación se haga a un número "redondo", por ejemplo para el caso de Venezuela al millar más cercano de bolívares; en otros países, según el valor de su unidad monetaria, a la centena o a la decena de millar más próxima.

Ello permite, a su vez, la preparación previa de tablas de primas de reaseguro para diferentes montos de capitales reasegurados. Así, para Venezuela por ejemplo, sólo se necesita para cada edad una tabla de primas por capitales de Bs. 1.000 a Bs. 100.000 de mil en mil. La elaboración de estas tablas, unas 55, para las edades de 20 en adelante toman muy poco tiempo y su utilidad es manifiesta. En efecto, basta sólo una consulta a la tabla para tener la prima de reaseguro que corresponda.

Quizá no está lejano el día en el cual los reaseguradores ya no fijen las primas edad por edad sino por grupos de edades y así el número de tablas preparadas de antemano podrán reducirse a unas diez. Al presente ya una compañía estadounidense deja sin variación las primas unitarias para el reaseguro del segundo año al quinto inclusive.

Las simplificaciones anotadas en materia de cálculo del capital en riesgo y cálculo de la prima, por el uso de tablas preparadas anticipadamente, no sólo aligeran el trabajo sino que evitan los naturales errores de computación, con el solo límite de los que ocurran por error de consulta o transferencia. Pero más aún, esta clase de labores puede encomendarse a personal no tan especializado, con la consiguiente economía.

7

Nuevo método simplificado del cálculo de la prima de reaseguro

Una compañía de los Estados Unidos ha introducido un nuevo método para el cálculo de la prima de reaseguro que por su sencillez es muy probable se generalice su uso hasta tanto todo se haga por medios mecánicos. En adelante se lo designará como método C.

Por este método la cedente calcula *exactamente* tanto los capitales en riesgo reasegurados como las respectivas primas de reaseguro para el tercero y octavo años de la póliza. La cedente paga en los primeros cinco años (salvo la comisión de 100 por 100 del primer año) la *misma* prima calculada para el tercero y en el segundo lustro paga cada año la prima calculada exactamente para el octavo.

Una simplificación así parece natural, desde que puede pensarse que la prima del tercer año será aproximadamente el promedio de las cinco primeras y la del octavo de las cinco siguientes.

Llegado el caso de un siniestro, que ocurra en un año distinto del tercero y octavo, se calculará el valor exacto del capital en riesgo para ese año, de acuerdo con las tablas de reservas de la cedente y el pleno ya fijado en la respectiva hoja de cesión y señalados en el respectivo contrato de reaseguro.

Para los años siguientes al décimo, el método comentado sigue la práctica vigente de computar capitales y primas de año en año.

La simplificación es notoria, pues basta realizar sólo cuatro operaciones aritméticas para el reaseguro de diez años. Al suceder un siniestro, aunque no siempre, habrá que hacer otro cálculo más; pero los siniestros no representarán más de 2 ó 3 por 100 de las cesiones hechas.

En este método no pueden tenerse tablas preparadas de antemano, como en las soluciones anteriores, ya que requiere el cálculo exacto del capital en riesgo, o sea hasta la última unidad monetaria; lo cual exige la consulta de la reserva de la verdadera edad. Naturalmente no se podrían preparar con anticipación tan numerosas tablas, y de hacerlo el nuevo procedimiento perdería importancia.

En casos muy especiales el método no podrá utilizarse. Si por ejemplo el plan contempla pagos anticipados en el año séptimo u octavo, es decir, cuando haya una variación brusca de la prima que no coincida con el sexto año, o si el capital en riesgo se anula antes del décimo año. Pero dado que ellos son muy pocos se los puede tratar separadamente con el método ordinario.

Naturalmente, la primera pregunta que se asoma, supuesta la misma tarifa de reaseguro, es de si con el nuevo método se paga algo más o algo menos. La pregunta tiene más bien carácter teórico, pues de resultar que se pagaría algo más, basta que el reasegurador reduzca un poco las primas, en este nuevo método, para que la objeción no tenga validez.

El punto que sigue se referirá a este problema que depende no sólo de la tabla de mortalidad sino del interés técnico y del tipo de retención: sobre monto nominal o sobre monto en riesgo.

8

Variación de la prima de reaseguro a lo largo de la vigencia de la póliza

Para que la prima de reaseguro no experimentare variación a lo largo de los años de reaseguro, sería necesario que

$$Q_t \cdot R_t^r$$

se mantuviera constante; donde Q_t es la tarifa del reasegurador, que corresponde a la edad alcanzada por el asegurado para el año t^0 de reaseguro y R_t^r (como ya fue definido antes) el capital en riesgo reasegurado en ese año.

Para que no haya variación de un año al siguiente, tendría que cumplirse la igualdad:

$$Q_{t+1} \cdot R^r_{t+1} = Q_t \cdot R^r_t$$

o sea que la razón entre las primas unitarias del reasegurador, para dos edades consecutivas, es decir, el cociente $Q_{t+1} : Q_t$, tendría que igualar a la razón entre los dos respectivos capitales en riesgos reasegurados: $R^r_t : R^r_{t+1}$.

En las tarifas usuales de reaseguro, que siguen de cerca a la tabla CSO 1941, *la variación porcentual* de la prima de una edad a otra es pequeña en las edades jóvenes (del orden de 2 a 3 por 100) y aumenta con las edades más avanzadas, hasta alcanzar un nivel constante de un 8 por 100 de aumento de una edad a la siguiente, dentro de los límites de edades en que normalmente se efectúa el reaseguro. Por consiguiente, si la *disminución* del capital en riesgo reasegurado no alcanza los porcentajes indicados, la prima de reaseguro aumentará del año "t" al siguiente; y a la inversa.

Dado que en los años iniciales la disminución del capital en riesgo, para la mayoría de los planes, no llega a alcanzar ese 8 por 100 de un año al siguiente, *las primas de reaseguro serán, en general, crecientes* durante los primeros diez años de cesión del riesgo respectivo. O sea que la cedente al pagar, por el método C, en el segundo año la misma prima que en el tercero, abonará algo de más que vendrá a recuperar durante el cuarto y el quinto; igualmente, si la prima de reaseguro sigue creciente hasta *más allá del octavo* año, la cedente pagará en el sexto y en el séptimo más de lo que correspondería si se hiciera el cálculo exacto y recuperará estos excesos durante el noveno y décimo año, en que desembolsará menos.

La intervención de la caducidad, que en nuestro medio es elevada, agudiza la situación, pues la cedente paga *al principio de más, con la* expectativa de recuperarlo después; pero tal posibilidad se le reduce por efecto de la mencionada caducidad. Ello exige, para que el método *no resulte inequitativo*, que las primas unitarias para los años tercero y octavo sean algo inferiores a las que, para iguales edades alcanzadas, se fijan en el método corriente de calcular primas de año en año.

Desde el punto de vista de la cedente, la mejor situación con el método C se produce cuando la prima de reaseguro máxima coincide con *el quinto año-póliza*; puesto que si bien en el segundo año pagaría de más, en cambio ahorraría en el cuarto, quinto, sexto y séptimo año. La peor situación se le presentaría si esa prima máxima corresponde al octavo año, ya que en los años sexto, séptimo, noveno y décimo pagaría de más; pero no tanto si el máximo se presentara al tercer año.

No resulta igualmente equitativo el método si el pleno en lugar de ser sobre capital nominal lo es sobre capital en riesgo. En efecto, la disminución del capital en riesgo es más acelerada cuando la retención es por un nivel constante de capital en riesgo, y por consiguiente la prima de reaseguro tiende más rápidamente a hacerse decreciente a medida que transcurre la vigencia del seguro. Pero en la práctica esta posible ventaja no llega ha hacerse presente, puesto que en los planes de vida entera la prima de reaseguro, en general, no decrece nunca y en los dotales sólo lo hace cuando faltan 10, a lo más 15 años, para el vencimiento, o sea (con la excepción de los dotales de corto plazo y cuya producción es escasa) cuando ya el método C aplica la prima exacta para la edad alcanzada.

Y en cuanto a la diferencia que resulta si las reservas se calculan con una u otra tabla de mortalidad y con uno u otro interés técnico, en términos amplios puede decirse que a mayor interés técnico aumenta el capital en riesgo y en consecuencia la prima decreciente de reaseguro aparece más tarde. Si la mortalidad que asignan dos tablas se diferencian en una constante, la mayor (si el capital en riesgo disminuye a lo largo del tiempo) dará menores reservas y por consiguiente las primas de reaseguro decrecerán, también, más tarde.

Las observaciones hechas en estos últimos párrafos sólo tienen un alcance general, ya que el problema es complejo desde que intervienen las bases técnicas del plan reasegurado, el método de cómputo de las reservas (puras o modificadas), la tarifa de reaseguro y el pleno.

9

Determinación del máximo de la prima de reaseguro, para algunos planes

La determinación de la prima máxima de reaseguro, a lo largo del tiempo de la respectiva cesión, es un problema parecido al estudiado, entre otros, por AKERBERG (25), RIVAS (26) y el autor (27) en relación con la prima natural de un seguro de rentas.

El máximo de prima se presentará en el año t° de riesgo que cumpla la siguiente desigualdad:

$$Q_{t-1}\, R^r_{t-1} \leqslant Q_t \cdot R^r_t \geqslant Q_{t+1} \cdot R^r_{t+1}$$

Como los resultados dependen tanto del plan como del tipo de retención se limitará el análisis que sigue a algunos planes y con el supuesto que la retención es sobre el capital nominal, lo que equivale a decir que el riesgo correspondiente a un determinado valor nominal está totalmente reasegurado.

a) *Seguro dotal*: el capital en riesgo es proporcional a $\ddot{a}_{\overline{x+t:n-t}|}$ en el año t° de reaseguro. La prima correspondiente será, si se designa por "z" la edad alcanzada $x + t - 1$ y por "f" la edad en que termina el seguro: "x + n".

$$Q_z \cdot \ddot{a}_{\overline{z+1:f-1-z}|}$$

La prima será creciente si

$$Q_z \cdot \ddot{a}_{\overline{z+1:f-1-z}|} \leqslant Q_{z+1} \cdot \ddot{a}_{\overline{z+2:f-2-z}|}$$

que se transforma como sigue:

$$\frac{Q_z}{D_{z+1}}\,(N_{z+1} - N_f) \leqslant \frac{Q_{z+1}}{D_{z+2}}\,(N_{z+1} - D_{z+1} - N_f)$$

$$\frac{Q_{z+1}}{D_{z+2}} \leqslant \frac{N_{z+1} - N_f}{D_{z+1}} \left[\frac{Q_{z+1}}{D_{z+2}} - \frac{Q_z}{D_{z+1}}\right]$$

y si se designa por J_z el cociente $Q_z : D_{z+1}$, se tiene finalmente que

$$\frac{J_{z+1}}{J_{z+1} - J_z} \leqslant \ddot{a}_{\overline{z+1:f-1-z}|}$$

para que la prima de reaseguro sea creciente del año t° al (t + 1)°.

Como la tarifa de reaseguro es creciente con la edad "z" (excepto el caso de edades inferiores a 10 años que casi no originan reaseguros) el valor de J_z será creciente, puesto que D_z es decreciente. Por lo tanto el primer miembro de la desigualdad será positivo para todo "z" y ello obliga a que "f—1—z" no pueda descender de cierto valor sin romper la desigualdad, lo cual es evidente desde que la prima de reaseguro debe terminar por decrecer ya que finalmente llega a anularse.

Pero el hecho de que para un cierto año t^0 la prima sea mayor que la siguiente no se puede inferir que no pueda, más adelante, invertirse la situación, ello dependerá de la variabilidad de la tarifa de reaseguro con la edad.

En efecto, si la tarifa es tal que la curva representativa del primer miembro de la desigualdad es muy irregular puede suceder que corte a la curva representativa del segundo miembro en dos puntos; lo que entrañaría una prima de reaseguro decreciente al principio, para pasar primero por un mínimo y después por un máximo y decreciente otra vez. Y aun quizá pudieran cortarse en tres puntos, lo que significaría una prima de reaseguro creciente para pasar por un máximo, después por un mínimo y otra vez por un máximo. Particularidades semejantes presenta la prima natural de riesgo en el seguro de anualidades, según la tabla de mortalidad (27).

Si por ejemplo la tarifa de reaseguro es la que se indica en el cuadro que sigue y la cedente tiene como bases técnicas la tabla CSO 1941 y el 3 ½ por 100 de interés, los valores resultantes son:

Edad x	Q_x ‰	$\frac{J_{x+1}}{J_{x+1} - J_x}$	f
20	3,34	19,82	58
21	3,39	21,02	66
22	3,43	19,91	61
23	3,48	19,95	62
24	3,53	18,07	56
25	3,60	19,04	61
26	3,66	18,22	59
27	3,73	16,77	55
28	3,82	16,87	57
29	3,91	16,33	56
34	4,46	15,27	59
35	4,59	10,88	50
36	4,86	10,76	51
37	5,15	10,68	52

Edad x	Q_x ‰	$\frac{J_{x+1}}{J_{x+1} \quad J_x}$	f
44	8,04	9,48	58
45	8,61	9,34	58
54	16,65	8,24	66
55	17,98	8,11	67
65	39,64	6,81	76
66	42,96	6,67	77
71	64,27	5,86	82
72	69,66	5,69	83

Esta hipotética tarifa de reaseguro muestra que si un asegurado toma un seguro dotal a los 60 años y tiene menos de 20 años, las primas de reaseguro empezarán por ser crecientes, después serán decrecientes durante 3 años, una nueva subida por un año, otro descenso, y a partir de los 26 años la prima subirá sin cesar hasta la edad de 45 por lo menos, para finalmente decrecer.

b) *Seguro a término fijo:* en este plan el capital en riesgo es también proporcional a la anualidad $\ddot{a}_{x+\overline{t:n-t}|}$ y por consiguiente la misma desigualdad encontrada para el dotal señalará el máximo de prima.

c) *Seguro de rentas o desgravamen hipotecario:* si se prescinde de la reserva que en este plan puede ser de poca importancia en relación con el capital en riesgo éste será proporcional a $\ddot{a}_{\overline{n+1-t}|}$

La prima de reaseguro será creciente si se cumple que

$$Q_z \cdot \ddot{a}_{\overline{f-z}|} \leqslant Q_{z+1} \cdot \ddot{a}_{\overline{f-1-z}|}$$

Si a esta desigualdad se la transforma en la forma empleada por Rivas (26) se tiene que:

$$Q_z \cdot \ddot{a}_{\overline{f-z}|} \leqslant Q_{z+1} \cdot (\ddot{a}_{\overline{f-z}|} - v^{f-1-z})$$

y finalmente

$$\frac{Q_{z+1}}{Q_{z+1} - Q_z} \leqslant s_{\overline{f-z}|}$$

para que la prima de reaseguro sea creciente.

Transformada de acuerdo con la forma empleada por el autor (27) se encuentra que

$$Q_z(1 - v^{f-z}) \leqslant Q_{z+1}(1 - v^{f-1-z})$$

o también

$$v^f[Q_{z+1}(1 + j)^{z+1} - Q_z \cdot (1 + j)^z] \leqslant Q_{z+1} - Q_z$$

y si se designa por I_z el producto $Q_z \cdot (1 + j)^z$, donde "j" es el interés de cálculo, de las rentas o hipoteca, se llega finalmente a que debe cumplirse

$$\frac{\Delta\, I_z}{\Delta\, Q_z} \leqslant (1 + j)^f$$

para que la prima sea creciente.

d) *Seguros saldados de vida entera o dotales:* como el capital en riesgo es $1 - A_{x+t:\overline{n-t}|} = d.\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$ sigue el mismo curso que el del respectivo dotal con pago de primas por los "n" años. El Seguro de Vida entera es un dotal a la edad final de la tabla y cae en el mismo grupo, si se lo salda en cualquier momento.

10

PROCEDIMIENTOS MECÁNICOS PARA EL CÓMPUTO DE CAPITALES Y PRIMAS DE REASEGURO

Es concebible teóricamente asignar a una moderna computadora todos los cálculos de capitales en riesgo y respectivas primas; pero el recargo de datos en la "memoria" sería enorme y podría coparse su capacidad si, como es el caso, los cómputos los hace el reasegurador, ya que cada cedente utiliza diferentes planes y bases técnicas. Por ello es que se han ideado métodos aproximados, sea para determinar el capital en riesgo o la prima de reaseguro.

Si es la prima la que se determina mecánicamente, el capital en riesgo realmente reasegurado será calculado "a posteriori" cuando ocurra el fallecimiento del asegurado; simplemente al dividir la prima de reaseguro pagada por la tasa unitaria respectiva. En el caso de determinar *mecánicamente* el capital en riesgo, la prima se calcula exactamente en relación con este capital.

La cedente se limita a dar unas pocas informaciones, aparte de las indispensables para identificar y calificar el riesgo; ellas son los capitales en riesgo en tres épocas; o bien en una o dos épocas y la duración del riesgo.

11

Procedimiento para interpolar las primas de reaseguro

Una compañía europea pide a la cedente que le indique las primas exactas de reaseguro del primero, sexto y undécimo año y en base a ellas, la computadora de esa reaseguradora determina las primas para los años intermedios, mediante interpolación parabólica.

Naturalmente que la prima del primer año sólo sirve para la mencionada interpolación, pues ella no se cobra. También puede modificarse el cálculo de las primas por interpolación entre las correspondientes al segundo, sexto y décimo año.

Si las primas para el primero, sexto y undécimo año valen respectivamente 25A, 25B y 25C, y las calculadas, según el método alternativo, para el segundo, sexto y décimo año: 32A, 32B y 32C, las primas para los años intermedios, interpolados mediante una parábola, quedan determinadas por la expresión general:

$$c_A \cdot A + c_B \cdot B + c_C \cdot C$$

Los valores de estos coeficientes "c" para los dos casos de interpolación señalados son:

Año de Seguro	I caso			II caso		
	c_A	c_B	c_C	c_A	c_B	c_C
1	25	0	0	—	—	—
2	18	9	—2	32	0	0
3	12	16	—3	21	14	—3
4	7	21	—3	12	24	—4
5	3	24	—2	5	30	—3
6	0	25	0	0	32	0
7	—2	24	3	—3	30	5
8	—3	21	7	—4	24	12
9	—3	16	12	—3	14	21
10	—2	9	18	0	0	32
11	0	0	25	—	—	—

La computadora suma separadamente los valores de A, B y C para todos los reaseguros con igual número de años en vigor y a esas sumas les aplica los factores o coeficientes relativos a ese año. En esta forma produce, no primas individuales, sino primas para toda la Cartera de reaseguros de igual antigüedad.

Para la anulación de primas se procede de modo similar con el debido ajuste si no corresponden a un período anual.

12

Procedimiento para interpolar los capitales en riesgo

Otra compañía europea pide a la cedente que le indique los capitales en riesgo, inicial R_o y final R_m para el período de interpolación "m". Pero para ciertos planes pide, además, el valor del correspondiente a la mitad del período de interpolación: $R_{\frac{m}{2}}$ o $R_{\frac{m+1}{2}}$ según sea "m" par o impar; el cual se designará por $R_{\bar{n}}$.

La computadora calcula los capitales en riesgo para los años intermedios sea por la fórmula:

$$\text{(A)} \qquad R_t = R_o - (R_o - R_m) \times \frac{\ddot{s}_{\overline{t|}}}{\ddot{s}_{\overline{m|}}}$$

cuando sólo se ha requerido el conocimiento de R_o y R_m; sea por la siguiente:

$$\text{(B)} \qquad R_t = R_o - a \cdot \frac{\ddot{s}_{\overline{t|}}}{\ddot{s}_{\overline{m|}}} - b \cdot t$$

si además se ha exigido el valor de $R_{\tilde{n}}$. En este último caso la computadora calcula los valores de las constantes "a" y "b", por resolución de las dos ecuaciones lineales resultantes para $t = \tilde{n}$ y $t = m$:

$$t = \tilde{n} \qquad a' \cdot \ddot{s}_{\overline{\tilde{n}|}} + b \cdot \tilde{n} = R_o - R_{\tilde{n}}$$

$$\text{donde } a' = a : \ddot{s}_{\overline{m|}}$$

$$t = m \qquad a' \cdot \ddot{s}_{\overline{m|}} + b \cdot m = R_o - R_m$$

que al introducirlos en la fórmula (B) queda:

$$\text{(B')} \qquad R_t = R_o -$$

$$- \frac{(R_o - R_{\tilde{n}}) \cdot (t \cdot \ddot{s}_{\overline{m|}} - m \cdot \ddot{s}_{\overline{t|}}) - (R_o - R_m) \cdot (t \cdot \ddot{s}_{\overline{\tilde{n}|}} - \tilde{n} \cdot \ddot{s}_{\overline{t|}})}{\tilde{n} \cdot \ddot{s}_{\overline{m|}} - m \cdot \ddot{s}_{\overline{\tilde{n}|}}}$$

Los valores adquiridos de las anualidades "$\ddot{s}$" los calcula la computadora, en base al interés técnico "i" de la cedente. Como en las fórmulas aparecen estas anualidades tanto en el numerador como en el denominador, pueden reemplazarse por los proporcionales $r_t = (1 + i)^t - 1$.

En los puntos que siguen se verá la justificación de estas aproximaciones y su aplicación a los planes más usuales.

13

Justificación de las fórmulas empleadas

La reserva terminal para el año t° es igual al valor adquirido por las primas de ahorro P^a_k a la tasa de interés técnico:

$$V_t = \sum_{k=1}^{k=t} P^a_k \cdot (1 + i)^{t+1-k} = P(t) \cdot \ddot{s}_{\overline{t|}}$$

donde $P^a_k = v \cdot V_k - V_{k-1}$ y $P(t)$ una prima de ahorro "promedial": es decir, aquella prima de ahorro constante, a lo largo del período de "t" años, que acumula la misma reserva que el plan original.

Por lo anterior, el capital en riesgo R_t y las reservas V_t y V_m se pueden expresar de la siguiente manera, donde S_t es, como ya antes se ha definido, el monto que paga la compañía en caso de fallecimiento en el año t^0:

$$R_t = S_t - V_t = S_t - P(t) \cdot \ddot{s}_{\overline{t|}}$$

$$V_m = P(m) \cdot \ddot{s}_{\overline{m|}}$$

Al introducir el valor de V_m en la expresión de R_t se llega a que

$$R_t = S_t - V_m \frac{\ddot{s}_{\overline{t|}}}{\ddot{s}_{\overline{m|}}} \frac{P(t)}{P(m)}$$

En aquellos planes cuya prima de ahorro no varíe mucho durante los primeros "m", no será muy distinta P(t) de P(m) y en consecuencia, en primera aproximación, puede aceptarse que

$$R_t = S_t - V_m \frac{\ddot{s}_{\overline{t|}}}{\ddot{s}_{\overline{m|}}}$$

y si además el valor de S_t es constante (dotales, vida entera), pueden sustituirse en la expresión anterior S_t por R_o y V_m por $R_o - R_m$, con lo que se llega a la fórmula (A).

En realidad esta fórmula es de aplicación aún más general, pues supone que la reducción de capital en riesgo $R_o - R_t$ sigue una ley del tipo exponencial hasta el año m°; lo cual es casi de aceptación intuitiva para muchos planes.

Pero en otra clase de planes la prima de ahorro varía fuertemente; o bien el valor de S_t es creciente o decreciente linealmente y se hace necesario utilizar una fórmula con más parámetros, y se recurre a la (B) o su equivalente (B').

En los seguros temporales el capital en riesgo disminuye hasta un poco más allá de la mitad del período de seguro y aumenta después hasta alcanzar el valor nominal. La fórmula (A) aplicada para un período "m" igual al del seguro, da simplemente como capital en riesgo el valor constante R_o para todo el tiempo, lo que no contradiría la costumbre de reasegurar un monto constante, por no tomarse en cuenta la reserva de suyo poco significativa. Pero en los de plazo algo largo, la reserva puede llegar a ser del orden del 20 por 100 del capital nominal y podría pensarse en tenerla en consideración para el cálculo del capital en riesgo; de ser así habrá que utilizar la fórmula (B) o su equivalente (B').

Esta última fórmula se simplifica si se toma "m" igual al período del seguro temporal, pues la diferencia $R_o - R_m$ es nula y $R_o - R_{\tilde{n}} = V_{\tilde{n}}$. Queda, así, R_t reducido a:

$$(B'') \qquad R_t = R_o - V_{\tilde{n}} \frac{t \cdot \ddot{s}_{\overline{m|}} - m \cdot \ddot{s}_{\overline{t|}}}{\tilde{n} \cdot \ddot{s}_{\overline{m|}} - m \cdot s_{\overline{\tilde{n}|}}} =$$

$$= R_o - V_{\tilde{n}} \frac{t}{\tilde{n}} \times \frac{\dfrac{\ddot{s}_{\overline{m|}}}{m} - \dfrac{\ddot{s}_{\overline{t|}}}{t}}{\dfrac{\ddot{s}_{\overline{m|}}}{m} - \dfrac{\ddot{s}_{\overline{\tilde{n}|}}}{\tilde{n}}}$$

Como el cociente $\ddot{s}_{\overline{t|}} : t$ es creciente con "t" la última fracción será siempre positiva y por consiguiente R_t resultará ser menor que el valor nominal R_o a lo largo del período de interpolación, con excepción de $R_m = R_o$. El problema consistirá en una buena elección de "ñ" para que la aproximación sea lo mejor posible, dentro de las posibilidades de la fórmula; lo que se estudia en el punto final que sigue y que se referirá a la aplicabilidad de las fórmulas (A) y (B) a diversos planes.

14

Aplicabilidad de las fórmulas a diferentes planes

a) *Seguros dotales:* la fórmula (A) para el caso de hacer el período de seguro "n" igual al de interpolación "m", queda así, puesto que $R_m = 0$:

$$R_t = R_o - R_o \frac{\ddot{s}_{\overline{t|}}}{\ddot{s}_{\overline{m|}}} = R_o \frac{\ddot{a}_{\overline{m-t|}}}{\ddot{a}_{\overline{m|}}}$$

o sea que la fórmula sustituye el valor exacto del riesgo

$$R_o \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{m|}}}$$

por el indicado. Este último cociente de anualidades, que depende de la tabla de mortalidad de la cedente, es casi siempre algo mayor que el de las respectivas anualidades ciertas, al mismo tipo de interés técnico, $\ddot{a}_{\overline{m-t|}} : \ddot{a}_{\overline{m|}}$; en todo caso cuando la prima de riesgo es siempre decreciente. Luego, en general, la fórmula sobreestimará un poco el capital en riesgo. Mayor aproximación se obtendrá si se siguiera la sugestión de MICHALUP (23), ya comentada más atrás, de computar las anualidades no con el interés técnico de la cedente sino a una tasa algo más elevada.

b) *Seguro a término fijo:* en este plan el capital en riesgo es proporcional al del seguro dotal de igual período. El valor de R_o será igual al capital nominal descontado por el factor v^m.

c) *Seguro de rentas o desgravamen hipotecario:* si se desprecia la reserva, el capital en riesgo será proporcional a la anualidad cierta $\ddot{a}_{\overline{m+1-t|}}$ al hacer "m" igual al período de seguro. Luego R_o será proporcional a la anualidad $\ddot{a}_{\overline{m+1|}}$ y por lo tanto la fórmula queda:

$$\frac{R_t}{R_o} = 1 - \frac{\ddot{s}_{\overline{t|}}}{\ddot{s}_{\overline{m+1|}}}$$

o sea que puede emplearse la fórmula (A) que dará un valor ligeramente inferior al recién deducido, puesto que en ella se utiliza el valor $\ddot{s}_{\overline{m|}}$. Si se trata de seguro de desgravamen hipotecario y la tasa de interés del préstamo es muy superior al que emplea la compañía en sus cálculos de seguro, habría que computar las anualidades "s" a la tasa del préstamo, pues de otro modo las diferencias sí serían de cierta importancia.

d) *Seguros educacionales:* cuando éstos son la unión de un término fijo y una renta por igual período, lo anterior muestra que les es aplicable la fórmula (A).

e) *Seguros de vida entera:* en el plan ordinario la prima de riesgo reviste mayor importancia respecto a la prima total que en los seguros de vida entera con pagos limitados. Por ello la variación de la prima de ahorro es más fuerte en el primero que en los segundos y de ahí que el plazo de interpolación "m" no convendrá que pase de 20 años para el ordinario y en cambio puede llegar a 30 en el de vida entera con pago de primas limitado a ese plazo.

En estos planes se podrá utilizar la fórmula (A) con "R_o" igual al valor nominal y tomar $R_m = R_{20} = R_o \cdot \ddot{a}_{x+20} : \ddot{a}_x$ para el ordinario de vida y $R_m = (1 - A_{x+m})R_o$ para los de vida entera con pagos limitados a justamente "m" años.

f) *Temporales de monto constante:* para estos planes corresponde utilizar la fórmula (B) si se quiere tomar en cuenta la reserva de ellos, la cual queda reducida a la forma (B").

Si se elige para "ñ" el valor de "t" que hace máxima la expresión

$$t \cdot \ddot{s}_{\overline{m}|} - m \cdot \ddot{s}_{\overline{t}|}$$

el producto de factores que amplifican a $V_{\tilde{n}}$, en la fórmula (B") no superará la unidad. Si coincidiera este valor para "ñ" con el máximo valor de la reserva, se concluirá que la fórmula (B") hace coincidir el capital en riesgo mínimo exacto con el que ella computa, y de ahí intuitivamente se pensaría que las diferencias para otros años "t" serían insignificantes.

El máximo de la expresión $t \cdot \ddot{s}_{\overline{m}|} - m \cdot \ddot{s}_{\overline{t}|}$ se obtiene para

$$i \cdot t = \log_e \frac{e^{im} - 1}{im} > \tfrac{1}{2}\, im$$

o sea para $t > \frac{1}{2}m$. A su vez el máximo de la reserva se encuentra, en general, más allá de "$\frac{1}{2}m$", y por lo tanto será muy factible que se produzca la coincidencia señalada en el párrafo precedente, o que al menos se presente una situación muy cercana a ello.

15

Final

Esta rápida reseña de los problemas actuariales conexos al reaseguro de vida, hace ver que éste no es un tema terminado, como ya ha ocurrido con otros de la matemática actuarial. Queda abierto, pues, el camino para ulteriores investigaciones, tanto en el campo de la determinación del pleno, que se complica, aún más, si se introduce la consideración de los riesgos adicionales dependientes: invalidez y accidentes; como en el campo práctico de la elección del sistema y procedimientos de reaseguro.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

(1) FOSTER, G. T.: "Some observations on Life Reassurance", The Journal of the Institute of Actuaries, Volume LXXII, Part III, N.º 335, Londres, 1945.

(2) JORDAN, CH. W.: "Life Contingencies", Society of Actuaries' Textbook, Chicago, 1962, página 131.

(3) ZILLMER, A.: "Beiträge zur Theorie der Prämien-Reserve", Stettin, 1863.

(4) SMOLENSKY, P.: "Método de reaseguro de vida con liquidación anual", Revista de Ciencias Económicas, julio 1945, Buenos Aires.

(5) ECHEVERRÍA, J. M. DE: "Reaseguro a prima de riesgo por generaciones de contratos"; y BJORAA, S. J.: "Group method in connection with risk premium reinsurance", XIV Congreso Internacional de Actuarios, Madrid 1954.

(6) LASHERAS-SANZ, A.: "Apportation à l'établissement d'une théorie mathématique de la réassurance"; DEITZ, R.: "Problèmes d'actuariat que pose la réassurance sur la vie, spécialement détermination des pleins de conservation", y SAVIGNON, E.: "Sur un système de réassurance algebrique à la prime de risque", Memorias del XIV Congreso Internacional de Actuarios.

(7) LUNDBERG, F.: "Über die Theorie der Rückversicherung", Congreso Internacional de Actuarios, 1909, páginas 877-955.

(8) LAURIN, I.: "An introduction into Lundberg's theory of risk", Skandinavisk Aktuarietidskrift, Upsala, 1930, páginas 84-11.

(9) CRAMER, H.: "On the mathematical theory of risk", Skandia-Fetskrift, Estocolmo, 1930.

(10) SEGERDAHL, C. O.: "On homogeneous random processes and collective risk theory", Upsala, 1939.

(11) ESSCHER, F.: "On the probability function in the collective theory of risk", Skandinavisk Aktuarietidskrift, Upsala, 1932, páginas 175-195.

(12) BAUDEZ, G.: "Le plein dans les compagnies d'assurances", Bulletin de l'Institut des Actuaires Français, Paris, 1939-1943.

(13) USPENSKY, J. V.: "Matemáticas de las probabilidades", Buenos Aires, 1947, página 311; CRAMER, H.: "Mathematical methods of Statistics", Princeton, 1946, páginas 213 y 316.

(14) LAURENT, H.: "Journal des Actuaires Français", Paris, 1873.

(15) LANDRE, C.: "Mathematisch-Technische Kapitel zur Lebensversicherung", Jena, 1901 y 1905.

(16) BOHLMANN, G.: "Congreso Internacional de Actuarios", 1909, página 654.

(17) DUBOURDIEU, J.: "Théorie mathématique du risque dans les assurances de répartition", Paris, 1952, página 136.

(18) MICHALUP, E.: "El reaseguro a prima de riesgo", West-East Insurance Monitor, octubre 1948, New York.

(19) THEPAUT, A.: "Essai de détermination práctique du plein de conservation", Bulletin 205 de l'Institut des Actuaires Français, Paris, 1953.

(20) KERN, E. R.: "La teoría del riesgo y su práctica", Revista de la Facultad de Ciencias Económicas, Nos. 41-42, Buenos Aires, 1952, página 35.

(21) DE FINETTI, B.: "La teoría del rischio e il problema della rovina dei giocatori", Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, Nos. 1-2, Roma, 1939.

(22) MASJUAN, V.: "Reaseguro del capital en riesgo", West-East Insurance Monitor, N.º 12, New York, 1952, y Revista "Seguros", Caracas, 1953.

(23) MICHALUP, E.: "Sobre el reaseguro a prima de riesgo", West-East Insurance Monitor, Nos. 8-9, New York, 1954.

(24) ZAVROTSKY, A.: "Seguro dotal múltiple", Revista de la Universidad de los Andes, N.º 1, Mérida, 1954.

(25) ÅKERBERG, B.: "Some notes on Lidstone's and other aproximations to temporary life annuities when the force of mortality is $(1 + k) \cdot u_{x+t}$", Bulletin N.º 3 de l'Association des Actuaires suisses, Berna, 1955.

(26) RIVAS, E.: "Problemas actuariales en el seguro de rentas", Boletín Bibliográfico N.º 1 del Instituto de Investigaciones de la Facultad de Economía, Universidad Central, Caracas, 1963, páginas 26-28.

(27) MASJUAN, V.: "Nota sobre el seguro de anualidades", Revista Ciencia e Ingeniería, N.º 5, Universidad de los Andes, Mérida, 1958.