Consideraciones sobre el análisis espectral dinámico

Por

JULIO G. VILLALON

Profesor Ordinario de Matemática Actuarial en la Facultad
de Económicas de Bilbao

I. Introducción

La fundamentación del análisis espectral de procesos estocásticos evotivos, radica en el hecho de la inadmisibilidad de la hipótesis de estacionaridad en los modelos fielmente representativos del mundo real. Por tal motivo, nos ha parecido interesante centrar la atención en el estudio de tales procesos teniendo en cuenta que a ellos no les es aplicable el instrumental clásico que que se utiliza bajo la hipótesis de estacionaridad.

Por otra parte, es preciso observar que una seria cronología evolutiva representa una pluralidad de datos mutables con el tiempo y la hipótesis de estacionaridad introducida por comodidad, en orden a la simplicidad del trabajo, mutila la información contenida en ellas. Es, pues, fundamental, trata de lograr el mayor avance en la línea de los procesos estocásticos evolutivos, ya que evidentemente aún no existe un criterio de unicidad para el tratamiento de esta problemática. Una de las causas determinantes de esta situación es que los contrastes sobre la hipótesis de estacionaridad se reducen a unos resultados negativos, es decir, a rechazar tal hipótesis sin penetrar en la naturaleza misma de la evolución.

Para realizar este estudio, comenzamos por considerar tres concreciones de procesos estocásticos evolutivos. Señalamos que para lograr un análisis espectral dinámico correcto se debe determinar el espectro del proceso sobre un semientorno del instante considerado.

A continuación, establecemos el concepto de proceso estocástico oscilatorio en base a la expresión de su función de covarianza y resaltamos la generalización que representa con respecto a la clase de procesos estocásticos estacionarios de segundo orden. Se define el espectro de potencia evolutivo en cada instante estudiando su interpretación física. Hacemos una somera mención del efecto del filtro sobre los procesos estocásticos de esta categoría. Detalladamente, establecemos los conceptos de familia de funciones semiestacionarias, procesos estocásticos semi-estacionarios y sus bandas características, para terminar este apartado con el estudio de la determinacion de los procesos evolutivos.

En el apartado dedicado a la inferencia del modelo, se estudia la estimación del modelo, sugiriendo la posibilidad de mejorar ésta a base de introducir funciones de ponderación que cumplan ciertas condiciones a la vez que realizando un suavizado con respecto al tiempo y a la frecuencia de la misma. En segundo lugar, hacemos referencia a la resolución del problema de la predicción de procesos estocásticos evolutivos por medio del uso de filtros digitales complementarios con una extrapolación de los resultados obtenidos por este procedimiento en cada frecuencia.

Filanizamos el trabajo, indicando su aplicación a los procesos estocásticos evolutivos de parámetro discreto.

II. Modelización espectral dinámica

En la extensión del modelo estocástico prescindiendo de la hipótesis de estacionaridad, se requiere que su correspondiente función espectral pertenezca a un espacio definido por una interpretación física pragmática y representativa. Esta es una condición fundamental que debe cumplir los modelos basados en los procesos estocásticos evolutivos.

Para el estudio que vamos a realizar a continuación, es preciso tener en cuenta los siguientes tipos de procesos estocásticos evolutivos:

1) Sea $\{X_t, t \in T\}$ un proceso estocástico tal que

$$E\{X_t\} = A(t)$$
$$\mathrm{Var}\{X_t\} = \sigma^2$$
$$\mathrm{Cov}\{X_{t+h} \cdot X_t\} = B(|h|)$$

Tal proceso es evolutivo en media y tras una eliminación de la tendencia secular de sus datos observados, su realización muestral coincide con la de un proceso estacionario por lo que su estudio resultaría trivial.

2) Sea $\{X_t, t \in T\}$ un proceso estocástico tal que

$$E\{X_t\} = a$$
$$\mathrm{Var}\{X_t\} = \sigma^2(t)$$
$$\mathrm{Cov}\{X_{t_1} \cdot X_{t_2}\} = B(t_1, t_2)$$

Tal proceso, es evolutivo de segundo orden.

Toda combinación de ambas clases de procesos, da lugar a un tipo de proceso evolutivo más general.

3) Sea $\{X_t^{(i)}, t \in T\}$ una sucesión de procesos estocásticos estacionarios cualesquiera al menos de segundo orden, T_i un subespacio paramétrico tal que

$$\cup T_i = T$$

y $\mathcal{C}_{ti}(t)$, la función indicatriz de t_i. Entonces, la expresión

$$X_t = \sum_i X_t^{(i)} \mathcal{C}_i(t)$$

genera un proceso estocástico evolutivo.

Ahora bien, si nos referimos a la clase de procesos estocásticos señalados en el apartado 3), una información muestral sobre $\cup t_i$ nos permitirá realizar alguna inferencia sobre el espectro de $\{X_t\}$. En caso de conocer t_i, para todo i, permitiría estimar la función espectral de $\{X_t^{(i)}\}$ para todo i. Cuando i fuera un número real nace la noción de "espectro dinámico" y si bien en este caso no sería posible una estimación puntual del espectro, bajo la restricción de que la variación de éste con el tiempo fuera poco sensible, sería posible lograr una estimación del promedio espectral de $\{X_t\}$ sobre un entorno completo de cualquier instante.

Hemos de señalar, que diversos autores han tratado ya el tema que nos ocupa partiendo de definiciones distintas del espectro dinámico. Nosotros consideramos que lo correcto sería la determinación del espectro del proceso sobre un semientorno del instante en consideración.

Considerando un proceso estocástico complejo $\{X_t, t \in T\}$ perteneciente a la clase definida en el apartado 2). Sea la familia $\mathcal{F}$ de funciones con dominio real y contradominio complejo, indicada por elementos pertenecientes al espacio paramétrico T y una función medida definida sobre el dominio de la frecuencia que permiten que la función de autocovarianza del proceso $B(t_1, t_2)$, sea expresable de la forma

$$B(t_1, t_2) = \int_R B_{t_1}(\omega) B_{t_2}(\omega)\, d\mu(\omega) \qquad [2.1]$$

donde $B(\omega) \in \mathcal{F}$.

Por otra parte, la finitud de $\sigma^2(t)$, exige para $\mathcal{F}$ la condición de clase de funciones de cuadrado integrable con respecto a la medida μ y por ello, ya se ha demostrado por algunos autores que el proceso $\{X_t\}$ es representable por la relación

$$X_t = \int_R B_t(\omega)\, d\,M(\omega) \qquad [2.2]$$

tal que para todo $\omega_1 \neq \omega_2$ se cumple

$$E\,|\,d\,M(\omega_1)\, d\,\overline{M(\omega_2)}\,| = 0$$

y

$$E\,|\,d\,M(\omega)\;d\,\overline{M(\omega)}\,| = d\,\mu(\omega) \qquad [2.3]$$

Como vemos, la medida $\mu(\omega)$ sustituye a la función espectral que aparece en los procesos estocásticos estacionarios, de tal forma que la condición de continuidad absoluta para un espectro evolutivo, implica la misma para la medida $\mu(\omega)$ según una medida de Lebesgue.

Dado que hemos eliminado la hipótesis de estacionaridad, no nos es posible definiar a $\mathfrak{F}$ como una familia de funciones complejo-exponenciales. Por tal motivo, para tartar de mantener la noción de frecuencia en el análisis de los procesos evolutivos, hemos de considerar componentes con morfismo evolutivo en las que intervenga la frecuencia.

Así, $\mathfrak{F}$, se dirá constituye una familia de funciones oscialtoria si $B_t(\cdot) \in \mathfrak{F}$, puede expresarse en cada punto por medio de la relación

$$B_t(\omega) = N_t(\omega) \exp [i \theta(\omega) t] \qquad [2.4]$$

donde θ es única y $N_t(\omega)$ es una transformada Fourier de una función de distribución tal que el valor absoluto de su diferencial tiene un extremo superior en el origen.

Un proceso estocástico se dirá "oscilatorio", si su función de covarianza puede expresarse por medio de una integral de funciones oscilatorias sobre el dominio frecuencia.

La generalización que constituye el proceso oscilatorio, queda reflejada en el hecho de que cuando $N_t(\omega)=1$ y $\theta(\omega)=\omega$, la familia de funciones oscilatorias se confunde con la de complejo-exponenciales por medio de la cual se expresa un proceso estocástico estacionario de segundo orden.

Para un proceso estocástico oscilatorio y una familia de funciones oscilatorias anteriormente establecidas, definimos el espectro de potencia evolutivo en el momento t por

$$dF_t(\omega) = |\overline{N_t(\omega)} \cdot N_t(\omega)| \, d\mu(\omega) \qquad [2.5]$$

Cuya interpretación física es la del contenido del proceso en un entorno del momento en consideración.

Un proceso estocástico evolutivo, también puede considerarse como el resultante de un proceso estacionario a través de un filtro variante con el tiempo.

Teniendo en cuenta que la relación existente entre el espectro del filtrado de un proceso estacionario y el de éste, viene dada para cada frecuencia por

$$dF^{(y)}(\omega) = |\mathfrak{L}(\omega)|^2 \, dF^{(x)}(\omega) \qquad [2.6]$$

donde $\mathfrak{L}(\omega)$ es la transformada Fourier del filtro considerado. Esta propiedad no se verifica exactamente cuando se trata de espectros evolutivos de procesos de la misma categoría.

Sea ahora una familia $\mathfrak{F}$ de funciones oscilatorias dada por

$$B_t(\omega) = N_t(\omega) \exp(i\,\omega\, t) \qquad [2.7]$$

y utilizando la función de distribución que define $N_t(\omega)$, asociamos a cada familia un número que es equivalente a la medida de la banda de frecuencia de tal función de distribución denotada por

$$W_{\mathfrak{F}}(\omega) = \int_R |V|\,|d\,T_\omega(V)| \qquad [2.8]$$

Planteado el problema en estos términos, podemos decir que una familia $\mathfrak{F}$ de funciones oscilatorias tal que

$$W_{\mathfrak{F}}(\omega) < \infty; \qquad \forall\, \omega \in R \qquad [2.9]$$

se denomina "semi-estacionaria" y un proceso estocástico "semi-estacionario" es aquél que puede expresarse por medio de una función oscilatoria semiestacionaria.

Por otra parte, se denomina banda característica de un proceso semiestacionario $\{X_t\}$al extremo superior de las bandas carcterístics de la clse de familias de funciones oscilatorias semiestacionarias, entendiendo por estas últimas, los inversos de los extremos superiores de sus respectivas medidas de banda de frecuencia y tal banda característica puede considerarse como la mayor región sobre la que el proceso evolutivo de variación poco sensible puede ser considerado como "casi estacionario".

Consideremos ahora, una subclase de familias funcionales tales que sus bandas características coinciden con la del proceso y una familia de funciones perteneciente a tal subclase, en términos de cuyos elementos podemos expresar el proceso $\{X_t\}$. Entonces, la [2.6] para frecuencias desfasadas será una aproximación válida, siempre que la anchura de banda del filtro sea relativamente pequeña con respecto a la banda característica del proceso. Esto es, siempre que la transformada Fourier de $N_t^*(\omega)$ sea una función-δ respecto a la transformada del filtro, entendiendo por tal función-δ de orden ε respecto a otra función $t(y)$, aquella función $s(y)$ que cumpla la relación

$$\left| \int_R t(y)\cdot s(y+h)\,dy - S(h)\int_R t(y)\,dy \right| < \varepsilon \qquad [2.10]$$

Por otra parte, un filtro $\varphi(v)$ fuera de cuadrado integrable y normado, se verificaría la relación siguiente

$$2\pi \int_R |\varphi(v)|^2\,dv = \int_R |\mathfrak{L}(\omega)|^2\,d\,\omega = 1 \qquad [2.11]$$

y la medida de la anchura de este filtro está denotada por $W_\varphi(\omega)$, entonces cuando $\mathfrak{F}$ es una familia semiestacionaria con anchura característica $W_{\mathfrak{F}}$ en todo instante y para cada frecuencia la contribución a la oscilación es una pseudo-función δ cuyo orden coincide con la relación existente entre las anchuras de banda del filtro y de la familia.

Sea $\{\varphi(v)\}$ un filtro que cumple la [2.11] y para el que está definido W_φ y $\mathfrak{L}_{t,\lambda}(\omega)$ su transformada Fourier generalizada por medio de una familia semiestacionaria $\mathfrak{F}$, cuya anchura característica es $B_{\mathfrak{F}}$ y si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\{\varphi(v)\}$ tal que

$$W_\varphi < \varepsilon W_F$$

se verifique que

$$|N_t(\lambda)|\,|\mathfrak{L}_{t,\lambda}(\omega) - L(\omega)| < \varepsilon \qquad [2.12]$$

para todo, t, λ y ω_r.

Para un proceso semiestacionario $\{X_t\}$ y un filtro dotado de las propiedades señaladas anteriormente, podemos definir un proceso $\{Y_t\}$ de la siguiente forma

$$Y_t = \int_R \varphi(v)\, X_{t-v} \exp[-i\,\omega_0)\, t - v)]\, dv \qquad [2.13]$$

la que se puede expresar

$$Y_t = \int_R \mathfrak{L}_{t,\,\omega+\omega_0}(\omega)\, N_t^*(\omega + \omega_0) \exp(i\,\omega\, t)\, d\, Z^*(\omega + \omega_0) \qquad [2.14]$$

en virtud de la representación de X_t por medio de un miembro de la subclase funcional que tiene su misma banda característica y donde $\mathfrak{L}^k_{t,\lambda}(\omega)$ representa la transformada Fourier del filtro con respecto al citado miembro.

En virtud de las características de $Z^*(\omega)$, podemos expresar el valor cuadrático medio del proceso en la forma siguiente:

$$E\,|\,Y_t^2\,| = \int_R |\,\mathfrak{L}^*_{t,\,\omega+\omega_0}(\omega)\,|^2\,|\,N_t^*(\omega + \omega_0)\,|^2\, d\,\mu^*(\omega + \omega_0) \qquad [2.15]$$

Teniendo en cuenta las propiedades exigidas al filtro, resulta la acotación de la transformada del filtro con respecto al miembro de la clase anteriormente apuntada por la transformada del filtro definida en la [2.6], lo que nos permite expresar tal valor cuadrático medio por la relación

$$E\,|Y_t^2| = \int_R |\,\mathfrak{L}(\omega)\,|^2\, d\, F_t^*(\omega + \omega_0) + O(\varepsilon) \qquad [2.16]$$

donde $O(\varepsilon)$ es un infinitésimo equivalente a W_φ / W_x.

Bajo la hipótesis de una continuidad absoluta respecto a una medida de Lebesgue para la medida $\mu^*(\omega)$, podemos definir la "función de densidad espectral evolutiva" en los términos

$$d\, F_t^*(\omega) = f_t^*(\omega)\, d\,\omega \qquad [2.17]$$

lo cual permite obtener la siguiente relación en términos aproximados

$$E \mid Y_t^2 \mid \simeq \int_B \mid \mathfrak{L}(\omega) \mid^2 f_t^*(\omega + \omega_0)\, d\omega \qquad [2.18]$$

Teniendo en cuenta que la relación anterior, depende únicamente de una relación de orden entre las medidas de las anchuras características del filtro y de la familia, se puede prescindir de la hipótesis de la coincidencia de esta última con la del proceso y así considerar cualquier familia semiestacionaria $\mathfrak{F}$ para la que se conserve la misma relación de orden, lo cual permite establecer la relación [2.18] en términos de la $f_t(\omega)$. En este caso, la relación en términos exactos sería

$$E \mid Y_t^2 \mid = \int_B \mid \mathfrak{L}_{t,\omega+\omega_0}(\omega) \mid^2 dF_t(\omega + \omega_0) \qquad [2.19]$$

que no es otra cosa que un promedio de $dF_t(\omega)$ respecto a la frecuencia y al tiempo, independiente de la familia mediante la cual representamos el proceso, es decir, representa un promedio de la energía total del proceso contenida en una banda de frecuencias en la región de ω_0 y un entorno del instante en consideración. Un análisis de la [2.19], nos permite decir que "Un conocimiento exacto de $dF_t(\omega)$, como función del tiempo, restringe el de esta misma función como dependiente de la frecuencia y recíprocamente", es decir, que "en un proceso evolutivo, no se pueden obtener simultáneamente una determinación fiel en los dominios tiempo y frecuencia".

Para cada familia $\mathfrak{F}$ y una determinada anchura característica del filtro W_φ, se obtiene la máxima determinación en el dominio temporal por medio del valor de la razón por cociente existente entre la medida de la anchura del filtro y la anchura característica de la familia. Por tanto, si nos referimos de nuevo a la clase de familias de funcionales cuya anchura característica coincide con la del proceso y si esta clase fuera degenerada, entonces, su único miembro permite una representación fiel para el proceso $\{X_t\}$. Si la clase de familias funcionales no fuera degenerada, cada elemento permite una fiel determinación para los procesos. En tal caso, si $dF_t^{(i)*}(\omega)$ es el espectro evolutivo con respecto a la correspondiente $\mathfrak{F}_i^k$ para i natural y $\hat{f}_t^{(i)*}$ es el espectro evolutivo suavizado por medio de

$$\hat{f}_t^{(i)*}(\omega_0) = \int_B \mid \mathfrak{L}(\omega) \mid^2 d\, F_t^{(i)*}(\omega + \omega_0) \qquad [2.21]$$

se verifica

$$E(\mid Y_t \mid^2 \mid = \hat{f}_t^{(i)}(\omega_0) + O(\varepsilon), \qquad \forall i \in N$$

donde ε tiene la significación preestablecida.

Para una anchura de filtro determinada y un $O(\varepsilon)$, los espectros evolutivos suavizados para cada familia funcional son idénticos. Por ello, cuande los espectros suavizados son lo máximo que podemos obtener, las representaciones del proceso por cada familia funcional pueden ser consideradas como equivalentes, al menos en la relativo a sus correspondientes espectros.

Cuando la clase en consideración fuera vacía, no existe ninguna representación idónea para el proceso.

II. 2. Inferencia del modelo

Sea la serie cronológica correspondiente a $\{X(t)\}$ obtenida sobre el intervalo $[0, T]$ y por medio de ella vamos a estimar el espectro evolutivo $dF_t(\omega)$ para el mismo intervalo anteriormente considerado, manteniendo las mismas hipótesis respecto a la medida $\mu(\omega)$ y al filtro $\varphi(v)$, el que para toda frecuencia ω_0 toma la forma

$$V_t = \int_{t-T}^{t} \varphi(v)\, X_{t-v} \exp\left[- i\, \omega_0\, (t - v)\, dv\right] \qquad [2.22]$$

De lo expuesto anteriormente, se tiene

$$E\,|V_t|^2 = \int_R |\,\mathfrak{L}(\omega)\,|^2 f_t(\omega + \omega_0)\, d\,W_0) + O(\varepsilon) \qquad [2.23]$$

Cabe destacar aquí una notable diferencia entre los métodos de estimación de un espectro evolutivo y los correspondientes a los espectros de los procesos estacionarios. Para los segundos (G. Villalón, 1967), se ha visto que la anchura de banda de $|\mathfrak{L}(\omega)|^2$, se considera dependiente de la medida del intervalo de observación y que aquélla decrece cuando crece ésta. Sin embargo, para los espectros evolutivos, la anchura de banda anteriormente mencionada está restringida por la relación de orden anteriormente formulada.

En base a lo establecido, podemos decir que $|\mathfrak{L}(\omega)|^2$ es una pseudofunción-δ respecto a $f_t(\omega)$ y, por tanto

$$E\,|V_t| \simeq f_t(\omega_0) \qquad [2.24]$$

por lo que $|V_t|^2$ es un estimador insesgado de $f_t(\omega_0)$.

Sería posible mejorar la estimación de la función de densidad espectral anterior introduciendo funciones de ponderación que cumplan ciertas condiciones a la vez que realizando un suavizado con respecto al tiempo y a la frecuencia de la misma. De etsa forma, se logra que las fluctuaciones muestrales del estimador sean lo suficientemente pequeñas.

Para resolver el problema de la predicción de procesos estocásticos evolutivos, resulta útil el uso del llamado filtro digital complementado con una extrapolación de los resultados obtenidos por este procedimiento en cada frecuencia.

Si bien en cada caso concreto, debe aplicarse el procedimiento óptimo, un procedimiento lo suficientemente general sería utilizar una expresión de la siguiente forma:

$$V_{t,\omega} = \mathcal{C}_x(\omega) + d_x(\omega) \cdot t + \sum_{r=1}^{m} \gamma_{x,r}(\omega) V_{t-r,\omega} \qquad [2.25]$$

donde $V_{t,\omega}$ es un estimador del espectro de potencia en la frecuencia ω y en el instante t, siendo $\mathcal{C}_x(\omega)$, $d_x(\omega)$ y $\gamma_{x,r}(\omega)$ constantes. De tal forma que, comenzando por una demodulación compleja de la serie estudiada por medio de un filtro de baja frecuencia, admitiendo la hipótesis de uniformidad sobre $[0, \pi)$ cuando no se tenga conocimiento previo de la serie, mientras que cuando se tenga conocimiento de ella, se debe elegir la demodulación de frecuencias para obtener estimadores cntrados en las frecuencias de mayor importancia. Si existiera algún modelo estacionnal evolutivo en la información, se debería demodular en la frecuencia estacional fundamental y cada uno de los armónicos si se intenta predecir el modelo estacional como parte del proceso. Si por otra parte, quisiéramos deshacernos de la estacionalidad y predecir únicamente la variación evolutiva, se deben elegir las frecuencias de demodulación de forma que eviten las estacionales.

Si bien valiéndonos de promedios móviles se podrían obtener estimadores del espectro evolutivo, también puede realizarse una predicción directa del proceso mediante una extrapolación de cada complejo demodulado con una posterior remodulación y suma de los resultados obtenidos. La extrapolación se logra por medio de la relación [2.25] y la remodulación por medio de

$$\check{X}_{r,t} = \hat{X}_{r,t} \exp(-i\,\omega_r\, t)$$

para luego obtener la predicción por medio de la suma de las partes reales de las remodulaciones efectuadas para un mismo momento.

Finalmente, diremos que todo lo indicado hasta ahora es aplicable a los procesos estocásticos evolutivos de parámetro discreto, ya que tal característica del proceso genera solamente modificaciones instrumentales pero no esenciales.

BIBLIOGRAFIA

BRONN, R. G.: *Smoothing, Rorecasting and Prediction of Discrete Time Series*, Prentice Hall, Inc., New Jersey (1962).

CRAMER, H.: "On some classe of no-stationary processes" Proc. Fourth Berkeley Symposium Math. Statis, and Prob., 2. University of California Press (1960).

GABOR, D.: "Theory of Communication" Journ. Inst. Elect. Eng., 93 (1946).

G. VILLALÓN, J.: "Análisis Espectral de Series temporales en Economía.". Anales del Instituto de Actuarios Españoles (1967).

GODFREY, M. D.: "An Exploratory Study of the Bi-Spectrum of Economic Time Series", Applic. Statis. Vol. XIV, núm. 1 (1965).

GRANGER, C. W. J. and HATANAKA, M.: *Espectral Analysis of Economic Time Series*. Princeton University Press (1964).

PAGE, C. H.: "Instantaneous power Spectra". J. Apply. Phs., 23 (1952).

PRIESTLEY, M. B.: "Basic Consideration in the estimation of spectra" Technometrics., 4 (1962).

TUKEY, J. W.: "An introduction to the mesurement of Spectra" Probability and Statistics (The Harald Cramér Volume) (ed. Ulffl Grenander) Stockholm, Almquistand Wiksell. New York, John Wiley. (1959).

VILLE, J.: "Theorie et applications de la notion de signal analytique", Cables et Transmission, 2 (1948).

WHITTLE, P.: *Prediction and Regulation by Linear Least Squares Methods*, Van Nostrand. N. L. (1963).

WHITTLE, P.: *Prediction an Regulation*. Engligs U. P. London (1963).

WIENER, N.: *The Extrapolation and Interpolation of Stationary Time Series*, Technology Press, M. I. T. (1949).

ZADEH, L. A.: "Time varying networks, I". Proc. IR. E., 49 (1961).