Operaciones actuariales de sobrevivencia compuesta

Por

AGUSTIN SANS Y DE LLANOS

Miembro titular del Instituto de Actuarios
Director Técnico de las Compañías de Seguros del "Grupo Sanjurjo 50"

La, al parecer, inevitable casuística que se presenta dentro de las operaciones de supervivencia compleja, bien se trate de rentas, bien sea de seguros, surge ante la dificultad de resolver directamente las expresiones integrales a que conducen cada problema en particular.

Verdad es que la aplicación de las fórmulas de integración aproximada (Euler-Woolhouse, Lubbock, Simpson) soslaya aquella dificultad; pero entendemos que tales fórmulas son sólo imprescindibles cuando aparezcan funciones difícilmente integrables, que, como veremos, no es siempre el caso que nos ocupa.

Se presentan, pues, seguidamente, dos ensayos en busca de la máxima unificación posible dentro del capítulo de las combinaciones actuariales de supervivencia; intentos, de los cuales, el primero es fundamentalmente teórico, al paso que, en el segundo, se ha impreso un sesgo eminentemente práctico.

I

PLANTEAMIENTO DEL CASO GENERAL DEL SEGURO DE SUPERVIVENCIA

Supongamos que n cabezas

$$(x_1),\ (x_2)\ \ldots\ (x_n) \qquad [1]$$

conciertan un seguro tal que la suma asegurada a pagar en el intervalo $(h, h+dh)$ dependa de h, y de la situación del grupo [1] respecto a la supervivencia, en el momento h, de los elementos que lo integran. En estas condiciones, el compromiso probable del asegurador estará caracterizado por la función

$$f(h;\ t_1, t_2, \ldots t_n) \cdot dh \qquad [2]$$

que representa la suma asegurada que se ha de pagar en el intervalo $(h, h+dh)$, en la hipótesis de que $(x_1), (x_2), \dots (x_n)$ fallezcan en las épocas $t_1, t_2, \dots t_n$, respectivamente. Es claro que esta función, así definida debe ser independiente de t_i para $t_i > h$, de tal forma que, si todas las t_i son mayores que h, la función [2] sólo dependerá de h, representando, entonces, la suma asegurada a pagar en $(h, h+dh)$ si todas las cabezas viven en el momento h.

Por consiguiente, considerando una fuerza de interés δ, la esperanza matemática de [2] será la prima única del seguro,

$$A = (-1)^n \cdot \int_0^\infty e^{-\delta h} \cdot dh \int_0^\infty \dots \int_0^\infty f(h;\ t_1 \dots t_n) \prod_{i=1}^{n} \frac{dl_{x_i+t_i}}{l_{x_i}} \qquad [3]$$

que, en virtud de

$$-\frac{dl_{x_i+t_i}}{l_{x_i}} = \frac{l_{x_i+t_i}}{l_{x_i}} \cdot \mu_{x_i+t_i} \cdot dt_i \qquad [4]$$

se puede expresar en la forma

$$A = \int_0^\infty e^{-\delta h} \cdot dh \int_0^\infty \dots \int_0^\infty f(h;\ t_1, \dots t_n) \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{l_{x_i+t_i}}{l_{x_i}} \cdot \mu_{x_i+t_i} \cdot dt_i \qquad [5]$$

Este resultado, en teoría, es perfectamente general, bastando proyectar sobre la función $f(h;\ t_1, \dots t_n)$ distintas hipótesis. He aquí algunos ejemplos sencillos.

Renta temporal por n *años.* $\bar{a}_{x\,\overline{n|}}$

$$f(h;\ t) = \begin{cases} 1 \text{ para } h < n, \text{ y } t > h. \\ 0 \text{ para todo otro valor.} \end{cases}$$

Renta diferida n *años.* $n/\bar{a}_x$

$$f(h;\ t) = \begin{cases} 1 \text{ para } n \leqslant h < t. \\ 0 \text{ para todo otro valor.} \end{cases}$$

Renta reversible sobre dos cabezas. $\bar{a}_{\overline{xy}}$

$$f(h;\ t_1, t_2) = \begin{cases} 1 \text{ para } t_1 \leqslant h \text{ y } t_2 > h. \\ 1 \text{ para } t_1 > h \text{ y } t_2 > 0. \\ 0 \text{ para todo otro valor.} \end{cases}$$

Renta de supervivencia. $\bar{a}_{x/y}$

$$f(h;\ t_1, t_2) = \begin{cases} 1 \text{ para } t_2 \leqslant h < t_1. \\ 0 \text{ para todo otro valor.} \end{cases}$$

Renta $\bar{a}_{x/\overline{n}|}$

$$f(h;\, t) = \begin{cases} 1 \text{ para } t \leqslant h < n. \\ 0 \text{ para todo otro valor.} \end{cases}$$

Sin embargo, el camino iniciado —que se hace altamente espinoso al pasar a casos menos elementales—, no resuelve la cuestión práctica, con lo que queda enmarcado el campo de lo teórico, toda vez que, a lo sumo, sirve de comprobación de resultados harto conocidos.

II

RENTAS DE SUPERVIVENCIA SOBRE DOS CABEZAS

Siendo (x) la cabeza asegurada, e (y) la beneficiaria, fijaremos nuestra atención en el siguiente caso general: Si la cabeza (x) fallece dentro de un intervalo dado $(k, k+r)$ la cabeza (y) disfrutará de una renta temporal por m años, pero pagadera a partir de los n años del fallecimiento de (x). Enunciado así el problema, el valor actual del compromiso probable del asegurador (que representamos por $R(x/y)$), vendrá dado por la integral:

$$R(x/y) = -\frac{1}{l_x\, l_y} \cdot \int_k^{k+r} e^{-\delta t} \cdot l_{y+t} \cdot {}_{n/m}\bar{a}_{y+t} \cdot dl_{x+t} \qquad [6]$$

en la que δ es la fuerza de interés, y k, r, n y m, parámetros positivos que expresan temporalidades absolutas, y, por tanto, independientes entre sí y con la sola condición de que $r \neq 0$.

Para calcular esta integral la pondremos en la forma

$$R(x/y) = -\frac{1}{l_x} \cdot \int_k^{k+r} {}_tE_y \cdot {}_{n/m}\bar{a}_{y+t} \cdot dl_{x+t} \qquad [7]$$

o, lo que es igual,

$$R(x/y) = -\frac{1}{l_x} \cdot \int_k^{k+r} {}_{t+n/m}\bar{a}_y \cdot dl_{x+t} \qquad [8]$$

Ahora bien, observando que

$${}_{t+n/m}\bar{a}_y = \int_{t+n}^{t+n+m} v^{\xi} \cdot {}_{\xi}p_y \cdot d\,\xi \qquad [9]$$

y, mejor aún, descomponiendo esta renta interceptada en diferencia de dos rentas temporales,

$${}_{t+n/m}\bar{a}_y = \int_0^{t+n+m} v^{\xi} \cdot {}_{\xi}p_y \cdot d\,\xi - \int_0^{t+n} v^{\xi} \cdot {}_{\xi}p_y \cdot d\,\xi \qquad [10]$$

el cálculo de [6] lo haremos integrando por partes. Será, por tanto:

$$R(x/y) = -\frac{1}{l_x}\left[\left(l_{x+t}\ {}_{t+n/m}\bar{a}_y\right)_k^{k+r} - \int_k^{k+r} l_{x+t}\, d\left({}_{t+n/m}\bar{a}_y\right)\right] =$$

$$= \frac{l_{x+k}}{l_x}\cdot {}_{k+n/m}\bar{a}_y - \frac{l_{x+k+r}}{l_x}\cdot {}_{k+n+r/m}\bar{a}_y + \int_k^{k+r} {}_tp_x \cdot d\left({}_{t+n/m}\bar{a}_y\right) \qquad [11]$$

con lo que todo queda reducido a determinar el valor de la integral

$$\int_k^{k+r} {}_tp_x \cdot d\left({}_{t+n/m}\bar{a}_y\right) \qquad [12]$$

Para ello bastará diferenciar con relación a t la función [10], o sea,

$$d\left({}_{t+n/m}\bar{a}_y\right) = v^{t+n+m}\cdot {}_{t+n+m}p_y \cdot dt - v^{t+n}\cdot {}_{t+n}p_y \cdot dt \qquad [13]$$

expresión que la pondremos en la forma

$$\left(v^{n+m}\cdot {}_{n+m}p_y \cdot v^t \cdot {}_tp_{y+n+m} - v^n \cdot {}_np_y \cdot v^t \cdot {}_tp_{y+n}\right) dt \qquad [14]$$

de modo que la integral [12] se transforma en

$${}_{n+m}E_y \cdot \int_k^{k+r} v^t \cdot {}_tp_x \cdot {}_tp_{y+n+m}\cdot dt - {}_nE_y \cdot \int_k^{k+r} v^t \cdot {}_tp_x \cdot {}_tp_{y+n}\cdot dt \qquad [15]$$

Se aprecia en seguida que esta diferencia es precisamente

$${}_{n+m}E_y \cdot {}_{k/r}\bar{a}_{x:y+n+m} - {}_nE_y \cdot {}_{k/r}\bar{a}_{x:y+n} \qquad [16]$$

Así, pues, y en definitiva, la integral $R(x/y)$ vale:

$$\boxed{{}_kp_x \cdot {}_{k+n/m}\bar{a}_y - {}_{k+r}p_x \cdot {}_{k+n} + {}_{r/m}\bar{a}_y + {}_{n+m}E_y \cdot {}_{k/r}\bar{a}_{x:y+n+m} - {}_nE_y \cdot {}_{k/r}\bar{a}_{x:y+n}} \qquad [17]$$

Esta fórmula, aparte de su fácil aplicación, resuelve todos los casos de rentas de supervivencia sobre dos cabezas —(x) asegurada; (y) beneficiaria—, bastando dar a los parámetros de temporalidad valores adecuados.

En este sentido, el símbolo ∞ tiene la interpretación habitual de edad extrema. Veamos algunos ejemplos:

1.º *Renta de supervivencia ordinaria.*

Corresponde a $k=0$; $r=\infty$; $n=0$; $m=\infty$.

$$\bar{a}_{x/y} = \bar{a}_y - \bar{a}_{xy}$$

2. *Renta vitalicia a favor de* (y), *si sobreviene* n *años a la muerte de* (x).

Se obtiene haciendo $k=0$; $r=\infty$; $m=\infty$.

$$n/\bar{a}_y - {}_nE_y \cdot \bar{a}_{x,\,y+n}$$

3. *Renta temporal por* m *años, a favor de* (y), *al fallecimiento de* (x).

En este caso $k=0$; $r=\infty$; $n=0$.

$$\bar{a}_{\overline{ym|}} - \bar{a}_{xy} + {}_mE_y \cdot \bar{a}_{x,\,y+n}$$

4. *Renta vitalicia a favor de* (y), *si* (x) *fallece en el intervalo* $(k, k+r)$.

Basta hacer $n=0$; $m=\infty$.

$${}_kp_x \cdot {}_k/\bar{a}_y - {}_{k+r}p_x \cdot {}_{k+r}/\bar{a}_y - {}_k/\bar{a}_{\overline{xy\,r|}}$$

Cuando el intervalo sea el $(0, r)$ queda

$$\bar{a}_y - {}_rp_x \cdot {}_r/\bar{a}_y - \bar{a}_{\overline{xy\,r|}}$$

5. *Renta a favor de* (y), *si* (x) *fallece después de* r *años.*

Haremos $m=\infty$; $n=0$; $k=0$.

$${}_rp_x \cdot {}_r/\bar{a}_y - {}_r/\bar{a}_{xy}$$

6. *Renta a favor de* (y), *como máximo hasta* n, *si* (x) *fallece en* (0, n).

Como se sabe esta renta vale

$$/_n\bar{a}_{x/y} = /_n\bar{a}_y - /_n\bar{a}_{xy}$$

Sin embargo, como comprobación, y, sobre todo porque su cálculo por el método seguido hasta ahora conduce, indirectamente, a una interesante ecuación, la plantearemos en la forma

$$/_n\bar{a}_{x/y} = -\frac{1}{l_x} \cdot \int_0^n v^t \cdot {}_tp_y \cdot dl_{x+t} \cdot \bar{a}_{y+t:\overline{n-t|}}$$

que integramos por parte directamente,

$$/_n\bar{a}_{x/y} = -\frac{1}{l_x} \cdot \left[(v^t \cdot {}_tp_y \cdot \bar{a}_{y+t:\overline{n-t|}} \cdot l_{x+t})_0^n - \int_0^n l_{x+t} \cdot d({}_tE_y \cdot \bar{a}_{y+t:\overline{n-t|}}) \right]$$

precisa, entonces, calcular la derivada

$$\frac{d\,(\bar{a}_{y+t:\overline{n-t}|})}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{l_{x+t}} \cdot \int_0^{n-t} v^{\xi} \cdot l_{y+t+\xi} \cdot d\,\xi\right] =$$

$$= \frac{l_{y+t}\,\dfrac{d}{dt}\left[\displaystyle\int_0^{n-t} v^{\xi} \cdot l_{y+t+\xi} \cdot d\,\xi\right] - l_{y+t} \cdot \displaystyle\int_0^{n-t} v^{\xi} \cdot l_{y+t+\xi} \cdot d\,\xi}{l^2_{\ y+t}} =$$

$$= -\frac{l'_{y+t}}{l_{y+t}} \cdot \int_0^{n-t} v^{\xi} \cdot \frac{l_{y+t+\xi}}{l_{y+t}} \cdot d\,\xi + \int_0^{n-t} v^{\xi} \cdot \frac{dl_{y+t+\xi}}{l_{y+t}}\,dt - v^{n-t} \cdot \frac{l_{y+n}}{l_{y+t}} =$$

$$= \mu_{y+t} \cdot \bar{a}_{y+t:\overline{n-t}|} - \bar{A}_{y+t:\overline{n-t}|} - {}_{n-t}E_{y+t} =$$

$$= \mu_{y+t} \cdot \bar{a}_{y+t:\overline{n-t}|} - \bar{A}_{y+t:\overline{n-t}|} = \mu_{y+t} \cdot \bar{a}_{y+t:\overline{n-t}|} - (1 - \delta \cdot \bar{a}_{y+t:\overline{n-t}|})$$

Resulta, por tanto, que

$$\boxed{\frac{d\,(\bar{a}_{y+t:\overline{n-t}|})}{dt} = (\mu_{y+t} + \delta) \cdot \bar{a}_{y+t:\overline{n-t}|} - 1} \qquad [18]$$

de tal forma que, sustituyendo esta relación en la expresión de $/_n a_{x/y}$ se llega, previas operaciones, a

$$/_n\bar{a}_{x/y} = /_n\bar{a}_y - /_n\bar{a}_{xy}$$

Evidentemente, es más rápido acudir a la transformación

$$v^t \cdot {}_tp_y \cdot \bar{a}_{y+t:\overline{n-t}|} = {}_{t/}\bar{a}_{y:\overline{n-t}|}$$

por cuanto la derivada de ${}_{t/}\bar{a}_{y:\overline{n-t}|}$ es más facil de obtener que la de $\bar{a}_{y+t:\overline{n-t}|}$. Pero al seguir la marcha indicada se obtiene la ecuación [18], que relaciona la renta $\bar{a}_{y+t:\overline{n-t}|}$ con su derivada, las fuerzas de interés y mortalidad, y que permite, si se desea, el estudio analítico de la citada renta.

$$\frac{d\,(\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|})}{dt} = (\mu_{k+t} + \delta) \cdot \bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|} - \mu_{x+t}$$

basta poner

$$\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|} = 1 - \delta \cdot \bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$$

III

RENTAS DE SUPERVIVENCIA SOBRE TRES CABEZAS

Al convertirse la marcha a seguir en una cuestión mecánica, nos limitaremos a presentar los siguientes casos generales:

Caso 1.º Dos cabezas aseguradas (x) e (y), y una beneficiaria, (z).

a) Renta a favor de (z), temporal por m años y pagadera n años después de la *disolución* del grupo (x, y), si ésta ocurre en $(k, k+r)$.

Representándola por $J(xy/z)$, su valor actual es:

$$J(xy/z) = -\frac{1}{l_x\, l_y\, l_z} \cdot \int_k^{k+r} v^t \cdot l_{z+t} \cdot {}_{n/m}\bar{a}_{z+t} \cdot (l_{x+t} \cdot dl_{y+t} + l_{y+t} \cdot dl_{x+t}) =$$

$$= -\frac{1}{l_x\, l_y\, l_z} \cdot \left[\int_k^{k+r} v^t \cdot l_{z+t} \cdot l_{x+t} \cdot {}_{n/m}\bar{a}_{z+t} \cdot dl_{y+t} + \int_k^{k+r} v^t \cdot l_{z+t} \cdot l_{y+t} \cdot {}_{n/m}\bar{a}_{z+t} \cdot dl_{x+t} \right] \qquad [19]$$

Aparece así la renta $J(xy/z)$ como suma de dos expresiones integrales análogas, pero que no requiere más que el cálculo de una de ellas.

En efecto, si hacemos

$$J(xy/z) = J(x\,\overset{1}{y}/z) + J(x\,\overset{1}{y}/z)$$

la integral $J(x\,\overset{1}{}/z)$ valdrá, integrando por partes:

$$J(x\,\overset{1}{y}/z) = -\frac{1}{l_y} \cdot \int_k^{k+r} v^t \cdot {}_tp_{xz} \cdot {}_{n/m}\bar{a}_{z+t} \cdot dl_{y+t} =$$

$$= ({}_kp_{xy} \cdot {}_{k+n/m}\bar{a}_z - {}_{k+r}p_{xy} \cdot {}_{k+n+r/m}\bar{a}_z) + \int_k^{k+r} {}_tp_y \cdot d\,({}_tp_x \cdot {}_{t+n/m}\bar{a}_z)$$

A su vez esta última integral, recordando que, en virtud de [13], es:

$$d\,({}_tp_x \cdot {}_{t+n/m}a_z) = [{}_tp_x \cdot ({}_{n+m}E_z \cdot v^t \cdot {}_tp_{z+n+m} - {}_nE_z \cdot v^t \cdot {}_tp_{z+n} - ({}_tp_x \cdot {}_{t+n/m}\bar{a}_z \cdot \mu_{x+t})]\, dt$$

se desdobla en:

$$\int_k^{k+r} {}_tp_y \cdot d\,({}_tp_x \cdot {}_{t+n/m}\bar{a}_z) = {}_{n+m}E_z \cdot {}_{k/r}\bar{a}_{x:y:z+n+m} - {}_nE_z \cdot {}_{k/r}\bar{a}_{x:y:z+n} +$$

$$+ \frac{1}{l_x} \cdot \int_k^{k+r} {}_tp_y \cdot dl_{x+t} \cdot {}_{t+n/m}\bar{a}_z$$

Pero obsérvese ahora que esta última integral, cambiada de signo, es precisamente $J(x/z)$; de aquí se sigue que $J(xy/z)$ viene dada por

$$\boxed{{}_{k}p_{xy} \cdot {}_{k+n/m}\bar{a}_{z} - {}_{k+r}p_{xy} \cdot {}_{k+n+r/m}\bar{a}_{z} + {}_{n+m}E_{z} \cdot {}_{k/r}\bar{a}_{x:y:z+n+m} - {}_{n}E_{z} \cdot {}_{k/r}\bar{a}_{x:y:z+n}} \qquad [20]$$

fórmula que presenta una analogía perfecta con la [17], y a la que se hubiese podido llegar directamente considerando al grupo (x, y) como una sola cabeza, consideración tan sólo válida para un grupo finito de cabezas que se extingue al primer fallecimiento.

Si en [20] se hace $k=0,\ r=\infty,\ n=0,\ n=\infty$, resulta

$$\bar{a}_{xy/z} = \bar{a}_{z} - \bar{a}_{xyz}$$

como era de esperar.

b) Renta a favor de (z), temporal por m años, y pagadera en n años después de la *extinción* del grupo (x, y), si ésta ocurre en $(k, k+r)$. Esta renta tiene dos interpretaciones, en cuanto a la extinción:

1-b) Caso en que el último fallecimiento del grupo (x, y) tiene lugar en $(k, k+r)$.

La representamos por $W(\overline{xy}/z)$, siendo su valor actual,

$$W(\overline{xy}/z) = -\frac{1}{l_x\, l_y\, l_z} \cdot \int_{k}^{k+r} v^{t} \cdot l_{z+t} \cdot {}_{n/m}\bar{a}_{z+t} \cdot [(l_x - l_{x+t})\, dl_{y+t} + (l_y - l_{y+t})\, dl_{x+t}] \qquad [21]$$

En este caso, y tras operaciones triviales, el resultado es inmediato:

$$\boxed{W(\overline{xy}/z) = R(y/z) + R(x/z) - J(xy/z)} \qquad [22]$$

Aquí, y sin necesidad de pasar en ella a su forma explícita, haremos dos aplicaciones, a saber:

1) Renta a favor de (z), a la extinción del grupo (x, y).

Haremos $k=0,\ r=\infty,\ n=0,\ m=\infty$.

$$\bar{a}_{\overline{xy}/z} = \bar{a}_{z} - \bar{a}_{zx} - \bar{a}_{zy} + \bar{a}_{xyz}$$

2) Si en la renta anterior se supone que $r=r$, queda

$$\bar{a}_{z} - ({}_{r}p_{x} + {}_{r}p_{y} - {}_{r}p_{xy}) \cdot {}_{r/}\bar{a}_{z} - (\bar{a}_{xz\,\overline{r}|} + \bar{a}_{yz\,\overline{r}|} - \bar{a}_{xyz\,\overline{r}|})$$

2-b) Caso en que el primero y último fallecimiento del grupo (x, y) concurran en el intervalo $(k, k+r)$.

Si se representa por $V(\overline{xy}/z)$, su valor es

$$V(\overline{xy}/z) = -\frac{1}{l_x\, l_y\, l_z} \cdot \int_{k}^{k+r} {}_{t}E_{z} \cdot {}_{n/m}\bar{a}_{z+t}\, [(l_{x+k} - l_{x+t})\, dl_{y+t} + (l_{y+k} - l_{y+t})\, dl_{x+t}] \qquad [23]$$

a resolver como en casos precedentes.

Caso 2.º Una cabeza asegurada (x), y dos beneficiadas, (y) y (z).

Comprende dos subcasos, a saber:

a) Renta, temporal por m años y hasta la *disolución* del grupo (y, z), pagadera n años después del fallecimiento de (x), si éste ocurre en el intervalo $(k, k+r)$.

Admitiendo la notación $I(x/yz)$, valdrá

$$I(x/yz) = -\frac{1}{l_x\, l_y\, l_z} \cdot \int_k^{k+r} v^t \cdot l_{y+t} \cdot l_{z+t} \cdot {}_{n/m}\bar{a}_{y+t:z+t}\, dl_{x+t} \qquad [24]$$

que, directamente, puesto que el grupo (y, z) se puede considerar como una sola cabeza nos da para $I(x/yz)$ la expresión:

$$\boxed{\begin{aligned} &{}_kp_x \cdot {}_{k+n/m}\bar{a}_{yz} - {}_{k+r}p_x \cdot {}_{k+n+r/m}\bar{a}_{yz} + \\ &\quad + {}_{n+m}E_{yz} \cdot {}_{k/r}\bar{a}_{x:y+n+m:z+n+m} - {}_nE_{yz} \cdot {}_{k/r}\bar{a}_{x:y+n:z+n} \end{aligned}} \qquad [25]$$

en la que tomando $k=0$, $r=\infty$, $n=0$, $m=\infty$ se obtiene la renta hasta la disolución del grupo (y, z), a partir del fallecimiento de (x), o sea,

$$\bar{a}_{x/yz} = \bar{a}_{yz} - \bar{a}_{xyz}$$

b) Renta temporal por m años y hasta la *extinción* del grupo (y, z), pagadera n años después del fallecimiento de (x), si éste ocurre en $(k, k+r)$, bastando que viva una de las cabezas del grupo beneficiario a la muerte de (x).

Si su valor actual se representa por $F(x/\overline{yz})$, tendremos

$$F(x/\overline{yz}) = -\frac{1}{l_x\, l_y\, l_z} \cdot \int_k^{k+r} v^t \cdot dl_{x+t}\, [l_{y+t} \cdot l_{z+t} \cdot {}_{n/m}\bar{a}_{\overline{y+t:z+t}} + \\ + (l_y - l_{y+t})\, l_{z+t} \cdot {}_{n/m}\bar{a}_{z+t} + (l_z - l_{z+t}) \cdot l_{y+t} \cdot {}_{n/m}\bar{a}_{y+t}] \qquad [26]$$

que se descompone en cinco integrales.

$$\text{(A)} \qquad -\int_k^{k+r} v^t \cdot {}_tp_{yz} \cdot {}_{n/m}\bar{a}_{\overline{y+t:z+t}} \cdot \frac{dl_{x+t}}{l_x}$$

$$\text{(B)} \qquad -\int_k^{k+r} v^t \cdot {}_tp_z \cdot {}_{n/m}\bar{a}_{z+t} \cdot \frac{dl_{x+t}}{l_x} = R(x/z)$$

$$\text{(C)} \qquad \int_k^{k+r} v^t \cdot {}_tp_{yz} \cdot {}_{n/m}\bar{a}_{z+t} \cdot \frac{dl_{x+t}}{l_x}$$

$$\text{(D)} \qquad -\int_k^{k+r} v^t \cdot {}_tp_y \cdot {}_{n/m}\bar{a}_{y+t} \cdot \frac{dl_{x+t}}{l_x} = R(x/y)$$

$$\text{(E)} \qquad \int_k^{k+r} v^t \cdot {}_tp_{yz} \cdot {}_{n/m}\bar{a}_{y+t} \cdot \frac{dl_{x+t}}{l_x}$$

Ahora bien, la suma algébrica de las (A), (C) y (E) es

$$\int_k^{k+r} v^t \cdot {}_tp_{yz} \cdot ({}_{n/m}\bar{a}_{z+t} + {}_{n/m}\bar{a}_{y+t} - {}_{n/m}\bar{a}_{\overline{y+t:z+t}}) \cdot \frac{dl_{x+t}}{l_x}$$

que recordando

$${}_{n/m}\bar{a}_{\overline{y+t:z+t}} = {}_{n/m}\bar{a}_{y+t} + {}_{n/m}\bar{a}_{z+t} - {}_{n/m}\bar{a}_{y+t:z+t}$$

se transforma en

$$\int_k^{k+r} v^t \cdot {}_tp_{yz} \cdot {}_{n/m}\bar{a}_{y+t:z+t} \cdot \frac{dl_{x+t}}{l_x}$$

Luego, en estas condiciones, se obtiene

$$F(x/\overline{yz}) = R(x/y) + R(x/z) - I(x/yz) \qquad [27]$$

Haciendo ahora, como siempre, $k=0$, $r=\infty$, $n=0$ y $m=\infty$, deberá resultar la renta (*).

$$\bar{a}_{x/\overline{yz}} = \bar{a}_{x/z} + \bar{a}_{x/y} - \bar{a}_{x/yz} = \bar{a}_{\overline{xyz}} - \bar{a}_x$$

Como caso particular se nos ofrece aquel en que las dos cabezas del grupo (y, z) han de vivir al fallecimiento de (x); si $k=n=0$: $r=m=\infty$ resulta

$$-\frac{1}{l_x} \cdot \int_0^{\infty} v^t \cdot {}_tp_{yz} \cdot \bar{a}_{\overline{y+t:z+t}} \cdot dl_{x+t} = \bar{a}_{\overline{yz}} - \bar{a}_{xyz} - (\bar{a}^1{}_{zx/y} + \bar{a}^1{}_{yx/z})$$

IV

SEGUROS DE SUPERVIVENCIA

Existiendo un paralelismo perfecto entre rentas y seguros de supervivencia, vamos a exponer únicamente el caso de dos cabezas ((x) asegurada, e (y) beneficiaria), dado que en este ensayo no se persigue una exposición exhaustiva.

Deben distinguirse dos grupos o clases de seguros de supervivencia:

a) Pagaderos en caso de vida del beneficiario, si sobrevive al asegurado.

b) Pagaderos al fallecimiento del beneficiario (valga el calificativo), si ha premuerto el asegurado.

En consecuencia, se tiene:

(*) Para esta renta y la siguiente véase Lasheras-Sanz: "Matemática del Seguro", páginas 423 y 424.

Grupo a) El caso general es el de: Seguro pagadero a la cabeza (y), si sobrevive n años a la muerte de (x), con tal que ésta ocurra en el intervalo $(k, k+r)$.

Representando su valor actual por $E(x/y)$, su cálculo es inmediato:

$$\boxed{E\,(x/y) = -\frac{1}{l_x l_y} \cdot \int_k^{k+r} v^t \cdot dl_{x+t} \cdot l_{y+t} \cdot {}_nE_{y+t} = {}_nE_y \cdot {}_{k/r}\bar{A}^1{}_{x:y+n}} \qquad [28]$$

que, para $k=0$ y $r=\infty$, nos da el seguro pagadero a (y) si vive n años después de la muerte de (x):

$${}_nE_y \cdot \bar{A}^1{}_{x:y+n}$$

y, para $k=n=0$, y $r=\infty$, el seguro pagadero a la disolución del grupo (x, y) por la muerte de (x), es decir:

$$\bar{A}^1{}_{xy} = \mu_x \cdot \bar{a}_{xy} - \frac{d\,\bar{a}_{xy}}{dx}$$

Grupo b) Caso general: Seguro, temporal por m años, sobre la cabeza (y), diferido n años a partir del fallecimiento de (x), si éste ocurre en el intervalo $(k, k+r)$.

Lo representaremos por $A(x/y)$, de forma que

$$A\,(x/y) = -\frac{1}{l_x\, l_y} \int_k^{k+r} v^t \cdot l_{y+t} \cdot dl_{x+t} \cdot {}_{n/m}\bar{A}_{y+t} \qquad [29]$$

De aquí, siguiendo el mismo proceso que en el caso de rentas, se pasa a la expresión:

$$\boxed{{}_kp_x \cdot {}_{k+n/m}\bar{A}_y - {}_{k+r}p_x \cdot {}_{k+n+r/m}\bar{A}_y + {}_{n+m}E_y \cdot {}_{k/r}\bar{A}_{\overset{1}{\widehat{y+n+m}}:x} - {}_nE_y \cdot {}_{k/r}\bar{A}_{\overset{1}{\widehat{y+n}}:x}} \qquad [30]$$

En esta fórmula haremos dos aplicaciones:

1) Seguro pagadero a la extinción del grupo (x, y) por la muerte de (y). Corresponde a $k=n=0$, y $r=m=\infty$.

$$\bar{A}^2_{xy} = \bar{A}_y - \bar{A}^2_{xy}$$

2) Seguro pagadero si (x) fallece antes que (y), o bien, si (x) fallece dentro de los m años de la muerte de (y).

Se obtiene haciendo $k=0$; $n=0$ y $r=\infty$ en las expresiones [28] y [30], sumando los resultados. Es decir

$$\bar{A}_{x:\overline{y\,(\overline{m|})}} = \bar{A}^1{}_{x^1y} + ({}_{/m}A_x + {}_mE_x \cdot A_{\overset{1}{\widehat{x+m}}:y} - A^1{}_{x^1y}) = {}_{/m}A_x + {}_mE_x \cdot \bar{A}_{\overset{1}{\widehat{x+m}}:y}$$

V

OBSERVACION

La sencillez que el método de integración, o conjunto de artificios, o, simplemente, aplicación de las más elementales normas de cálculo diferencial, presenta en todos los casos considerados hasta ahora, queda invalidada cuando se aplica a rentas y seguros de supervivencia cuyo pago quede determinado por un orden preestablecido en el fallecimiento de las cabezas que integran el grupo asegurado.

Sea, por ejemplo, el caso más simple: renta a favor de (z) a la disolución del grupo (x, y) por la muerte de (x). Tendremos

$$\bar{a}^{1}{}_{x^1\,y/z} = -\frac{1}{l_x} \cdot \int_0^{\infty} v^t \cdot {}_tp_{yz} \cdot \bar{a}_{z+t} \cdot dl_{x+t} = -\frac{1}{l_x} \int_0^{\infty} {}_tp_y \cdot {}_{t/}\bar{a}_z \cdot dl_{x+t}$$

donde por sucesivas transformaciones se llega a

$$\bar{a}^{1}{}_{x^1\,y/z} = (\bar{a}_z - \bar{a}_{xyz}) - \left(-\frac{1}{l_y} \cdot \int_0^{\infty} v^t \cdot {}_tp_x \cdot {}_z\bar{a}_{z+t} \cdot dl_{y+t}\right)$$

o sea

$$\bar{a}^{1}{}_{xy/z} = \bar{a}_{xy/z} - \bar{a}_{xy/z}$$

resultado que, si bien tiene un sentido actuarial evidente, constituye para nuestro objetivo un auténtico círculo vicioso. Es más; lo sistemático de este resultado ante todos los procedimientos aplicados hace sospechar la imposibilidad de resolver estos casos por integración directa.

No encontramos, por tanto, otra solución que la de aplicar las fórmulas de integración aproximada, ya que las integrales que resultan de sustituir la función de supervivencia por su forma explícita, llevan a expresiones de una complejidad extraordinaria.

Finalmente es de observar que, si bien en todas las fórmulas anteriores figuran rentas y seguros "continuos", son perfectamente aplicables cuando se trate de rentas pre o pospagables, fraccionadas o no, como puede comprobarse fácilmente; mientras que en el caso de los seguros será preciso afectar a las fórmulas del factor $(1+i)^{-\frac{1}{2}}$, si son pagaderos al final del año, respetándolas, en cambio, si son pagaderos al fallecimiento, puesto que, admitiendo la distribución uniforme, se puede reemplazar A por $\bar{A}$ sin error apreciable.