TRABAJOS DE COLABORACION

Los seguros de vida optimos

Por

KARL BORCH (*)

1. INTRODUCCION

1.1. La literatura actuarial tiene poco que ofrecer a una persona que pretenda contratar su Seguro de Vida de la mejor manera posible. La postura tradicional del actuario consiste en considerar que es el propio individuo quien debe evaluar su situación y decidir qué clase de cobertura quiere. Entonces al actuario le puede decir cuánto le va a costar este seguro, y, en algunos casos, puede que sugiera distintas formas de pago.

En la literatura sobre Seguros en general, podemos encontrar amplias discusiones acerca de la cuantía del Seguro de Vida que debería tener la gente en distintas situaciones. Una gran parte de esta literatura está orientada hacia el futuro cliente, y, por lo tanto, es de una índole no matemática, a menudo contiene matices éticos. Parte de esta literatura es de una alta calidad técnica, sobre todo en lo que se refiere a las ventajas fiscales, que se derivan de los Seguros de Vida en distintos países. Otra parte de dicha literatura es más bien trivial, y, a menudo, el verdadero mensaje se reduce a predicar economía y frugalidad.

1.2. El Seguro de Vida tiene cierta relación con la Economía, puesto que se trata esencialmente de un ahorro. Se renuncia a consumir, en el momento actual, con el objeto de proveer para la vejez, o, para los que dependen de uno, al fallecer. Si una persona desea saber hasta qué punto debe reducir su consumo actual al objeto de proveer para el futuro, recibirá todavía menos ayuda de la Teoría económica que de los actuarios. La Teoría económica está basada en la "soberanía del consumidor", y deja a la discreción del individuo el decidir cómo debe valorar sus necesidades actuales, en relación con la ne-

---

(*) El autor agradece a Denis Moffet, las muchas discusiones mantenidas sobre este asunto.

Traducción del inglés de don Antonio Pardo-Vivero López.

cesidad de proveer para futuras contingencias. No obstante, en dicha Teoría uno estudia la manera de hacer esta valoración, ya que dicha información es esencial al construir modelos generales para predecir el Ahorro y la Inversión en la Economía global.

1.3. Puesto que el Seguro de Vida es una forma de ahorrar, tiene que competir con otras modalidades de ahorro. El creciente interés en la Teoría de la Selección de Carteras, durante las dos últimas décadas, ha llamado mucho la atención sobre el Seguro. Obviamente, las pólizas del Seguro de Vida deben tener un lugar en una cartera óptima. La prominencia de este lugar dependerá claramente de la naturaleza de las distintas inversiones, y esto conduce a varios problemas interesantes. Durante los últimos años estos problemas han sido estudiados por varios autores, entre otros por Fischer (2) y Richard (5). Sin embargo, es conveniente comenzar nuestra discusión considerando algunos modelos más antiguos.

2. EL MODELO AHORRO-CONSUMO MAS SENCILLO

2.1. Estos modelos datan de las escuelas neo-clásicas y fueron estudiados en detalle por Marshall (4) y por Fisher (3), que dedicó su libro a Böhm-Bawerk (1), "quien puso los cimientos sobre los cuales he intentado construir". El propósito de estos estudios fue el de determinar las relaciones teóricas entre los ahorros y los tipos de interés en la Economía. La notación utilizada por estos autores parece pesada al lector moderno, y, en lo que sigue, utilizaremos una notación que se debe a Yaari (6), (7).

2.2. El elemento dado, en los modelos que vamos a estudiar, es la corriente de los ingresos del consumidor, $y(t)$, que es una función del tiempo t. El problema está en determinar el flujo óptimo, $c(t)$, para sus gastos destinados al consumo. Es conveniente referirse a la función $c(t)$, como a un *plan de consumo.*

Cualquier plan que puede ser llevado a cabo, para una determinada corriente de ingresos, será llamado un plan factible.

Si el consumidor no puede pedir dinero prestado, ni tampoco ahorrarlo para consumo futuro, los planes de consumo factibles se definirán mediante la desigualdad,

$$c(t) \leqslant y(t)$$

Esto supone, simplemente, que el consumidor no puede, en ningún momento gastar más de lo que gana. Entre estos planes, el plan $c(t)=y(t)$, aparecerá como el plan óptimo, bajo el supuesto usual de no-saturación, es decir, si suponemos que el consumidor prefiere gastar sus ingresos en el consumo, en vez de permitir que se despilfarren.

2.3. Para llegar a unos modelos menos triviales, hemos de suponer que el consumidor tiene algunas posibilidades de transferir dinero de un momento en el tiempo a otro, es decir, que puede redistribuir sus ingresos a lo largo del tiempo. El supuesto más sencillo, de este tipo, es que el consumidor puede pedir prestado o ahorrar cualquier cantidad al mismo tipo de interés. Para un plan de consumo arbitrario, sus ahorros acumulados en el momento t serán entonces:

$$S(t) = e^{\delta t} \int_0^t e^{-\delta s} \{y(s) - c(s)\} \, ds$$

donde δ es la tasa instantánea de interés.

Es natural suponer que existen algunas restricciones sobre las posibilidades que tiene el consumidor para pedir dinero prestado. Una restricción de este tipo podría ser la condición.

$$S(T) \geqslant 0 \qquad [1]$$

que dice que el consumidor ha de ser solvente en el momento T. Podemos interpretar, T, como su "horizonte de planificación" o el de sus acreedores.

Una condición más severa podría ser:

$$S(t) \geqslant 0 \quad \text{para} \quad 0 \leqslant t \leqslant T \qquad [2]$$

Si se impone esta condición, no se permite nunca que el consumidor tenga deudas, y no es necesario suponer que los tipos de interés son los mismos, para pedir prestado y para ahorrar.

Cualquiera de las condiciones [1] o [2], dará una serie de planes de consumo factibles, y, es evidente que [2] dará el conjunto más estricto.

2.4. No es necesario suponer que, $y(t)$ y $c(t)$, son flujos continuos. Podemos definir, $Y(t)$ y $C(t)$, como los ingresos y los consumos acumulados hasta el momento t. Los ahorros acumulados en el momento t, serán entonces:

$$S(t) = e^{\delta t} \left\{ \int_0^t e^{-\delta s} \, dY(s) - \int_0^t e^{-\delta s} \, dC(s) \right\}$$

Se gana poco con esta generalización trivial, y, por consiguiente, no se utilizará en la presente discusión.

2.5. Para seleccionar el plan óptimo, necesitamos un orden de preferencia en el conjunto de planes de consumo factibles, y es conveniente si tal ordenación puede representarse mediante un factor funcional de utilidad, es decir, haciendo una proyección desde el conjunto de planes factibles a la línea real.

Tratándose de Teorías económicas uno normalmente supone que la utilidad asignada a un plan de consumo arbitrario viene dada por una expresión de la forma:

$$u(c) = \int_0^T e^{-\gamma t} u[c(t)]\, dt \qquad [3]$$

Aquí γ representa la "impaciencia" del consumidor, es decir, su preferencia por el consumo inmediato más que diferido en el período de planificación. Para la función de utilidad instantánea, $u(c)$, uno normalmente supone:

$$u'(c) > 0 \quad \text{y} \quad u''(c) < 0$$

La expresión [3], contiene claramente una serie de "supuestos heroicos", y, el mérito principal de los modelos de este tipo, consiste en conducir a problemas que pueden resolverse por métodos matemáticos, relativamente sencillos.

2.6. Hemos llegado, ahora, al problema de maximizar [3], sujeto a alguna condición, tal como [1] o [2], que conservará el maximando finito.

De la definición de ahorros acumulados, $S(t)$, deducimos:

$$S'(t) = \delta s(t) + y(t) - c(t)$$

o

$$c(t) = y(t) + \delta S(t) - S'(t)$$

Sustituyendo esto en [3], llegamos al problema de maximizar:

$$\int_0^T e^{-\gamma t} u\, [y(t) + \delta S(t) - S'(t)]dt$$

Esta expresión es de la forma:

$$\int_0^T F[t, x(t), x'(t)]dt$$

Así que el problema se reduce a un problema del cálculo de variaciones. La solución del problema tiene que satisfacer la Ecuación de Euler:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)$$

2.7. En nuestro problema, la Ecuación de Euler reviste la forma siguiente:

$$\delta\, e^{-\gamma t} u'[c(t)] + \frac{d\,[e^{-\gamma t}\, u'(c(t))]}{dt} = 0$$

que se reduce a,

$$c'(t) = (\gamma - \delta)\, \frac{u'[c(t)]}{u''[c(t)]} \qquad [4]$$

o,

$$u'[c(t)] = K\, e^{(\gamma-\delta)t} \qquad [4']$$

Aquí, K es una constante arbitraria y positiva que tiene sentido porque la solución del problema sigue siendo la misma, si la función de utilidad se multiplica por una constante positiva.

De [4] se deduce que $c(t)$ será constante si $\gamma=\delta$, es decir, si la tasa de impaciencia es igual al tipo de interés. Si $\gamma>\delta$, $c(t)$ será monótona decreciente, y, si $\gamma<\delta$, $c(t)$, será monótona creciente.

2.8. Puede ser útil dar un ejemplo sencillo para ilustrar los resultados arriba mencionados.

Sea $u(c)=\log c$. La ecuación diferencial [4] se convierte entonces, en:

$$c'(t)=(\delta-\gamma)c(t)$$

con la solución:

$$c(t) = K\, e^{(\delta-\gamma)t}$$

La constante de integración, $K=c(0)$, tiene que determinarse de modo que se satisfaga la condición [1] con estricta igualdad, es decir, hemos de tener:

$$\int_0^T e^{-\delta t}\, y(t)\, dt = \int_0^T e^{-\delta t}\, c(t)\, dt = K \int_0^T e^{-\gamma t}\, dt$$

Permítasenos suponer, además, que $y(t)=y$, es constante, para $0\leqslant t\leqslant T$.

Si, en este raso, $\delta>\gamma$, tendremos $c(t)<y$, al comienzo del período, y, $c(t)>$ y, al final del mismo. Este plan también será factible, si la condición, más severa [2], se impone.

Si, por otro lado, $\delta<\gamma$, tenemos: $c(t)>y$, al comienzo del período, y, este plan no es factible bajo la condición [2]. El Plan factible óptimo será entonces: $c(t)=y$. En este caso la introducción de facilidades de crédito relajaría la condición [2] y permitiría que el consumidor adoptase un mejor plan de consumo.

3. MODELOS CON INCERTIDUMBRE Y SEGURO

3.1. En un mundo de certidumbre completa no hay razones que aconsejen negar crédito a un consumidor, siempre que sus ingresos futuros sean suficientes para amortizar la deuda con intereses. Sin embargo, cuando existe la posibilidad de que el flujo de los ingresos pueda ser truncado, en un momento dado, puede ocurrir que los acreedores impongan la condición estricta (2) y que no permitan que el consumidor tenga deudas.

Para formular esta idea de una manera sencilla, supongamos que existe el flujo de ingresos, $y(t)$, pero que en cualquier momento puede reducirse a cero, durante el resto del período de planificación. Sea $\pi(t)$, la probabilidad de que el flujo de los ingresos se mantenga inalterado en el momento t. Tenemos $\pi(0)=1$.

Para interpretar esto, de un modo concreto, podemos pensar en situaciones en las cuales se dejan de percibir los ingresos, porque el consumidor sufre una incapacidad permanente o se encuentra en paro. La razón tradicional de ahorrar es la de hacer una reserva para tales acontecimientos.

3.2. El problema del consumidor tiene que reformularse ahora y es natural suponer que maximizará la utilidad esperada:

$$\int_0^T e^{-\gamma t} \cdot \{\pi(t)u(c(t)+y(t)) + (1-\pi(t))u(c(t))\}dt,$$

sujeta a algunas condiciones, tales como [1] o [2].

Al igual que en el apartado 2.6, podemos encontrar una ecuación diferencial que los ahorros acumulados pueden satisfacer, resolviendo un problema según el Cálculo de Variaciones.

Esta solución del problema parece ineficiente, ya que puede conducir a una acumulación de ahorros que no se "necesitarán", si se mantiene el flujo de los ingresos, hasta el momento T, es decir, hasta el final del período de planificación. Entonces, puede ocurrir que la introducción de los seguros ayude al consumidor, lo mismo que le ayudaron las facilidades de crédito en el párrafo 2.8.

3.3. Para simplificar las cosas, supondremos que entrega todos sus ingresos, $y(t)$, a una Compañía de Seguros. A cambio recibe un flujo, $c(t)$, que puede consumir.

El principio de equivalencia implica que hemos de tener:

$$\int_0^T \pi(t)\, y(t)\, e^{-\delta t}\, dt = \int_0^T c(t)\, e^{-\delta t}\, dt$$

Esta condición, que define los planes de consumo factibles, desempeña el mismo papel que la condición [1], en la sección anterior.

La Reserva del Seguro, por el método prospectivo, en el momento t, es:

$$V(t) = e^{\delta t} \int_t^T c(s) e^{-\delta s} ds - e^{\delta t} \int_0^T \pi(s) y(s) e^{-\delta s} ds$$

Para cualquier contrato de seguro uno normalmente requiere que la Reserva sea no negativa, es decir, que:

$$V(t) \geqslant 0 \qquad [7]$$

Obviamente esto equivale a la condición [2] y las condiciones [2] y [7] se imponen normalmente por razones similares.

3.4. Ahora, el problema del consumidor, es:

$$\max \int_0^T e^{-\gamma t} u [c(t)] dt \qquad [8]$$

sujeto a la condición [6], o, a la condición más estricta [7].

Según la definición de Reserva, encontramos:

$$V'(t) = \delta V(t) + \pi(t) y(t) - c(t)$$

Podemos utilizar esto para sustituir por $c(t)$, y plantear un problema en el Cálculo de Variaciones.

Para comparar los dos problemas [5] y [8], observamos que los ingresos esperados en el momento t son $E\{y(t)\} = \pi(t) y(t)$.

Luego el primer problema puede escribirse así:

$$\max \int_0^T e^{-\gamma t} E\{u(\delta s - s' + y)\} dt \qquad [5']$$

y el segundo, así:

$$\max \int_0^T e^{-\gamma t} u\{\delta v - v' E[y(t)]\} dt \qquad [8']$$

Formalmente los dos problemas son idénticos, y tendrán soluciones idénticas, siempre que las condiciones más estrictas [2] y [7], no se hagan efectivas.

Como hemos supuesto que $u(c)$ es cóncava, se deduce de la desigualdad de Jensen, que tenemos:

$$E\{u(y)\} < u(E\{y\}),$$

de modo que el problema [8] da una utilidad más elevada que el problema [5].

3.5. Hemos introducido los seguros de una forma algo artificial. Una manera más convencional sería suponer que el consumidor está de acuerdo en pagar una corriente de primas, $p(t)$, en tanto existe un flujo de ingresos.

A cambio percibe un flujo para gastos, $c(t)$ si cesa la corriente $y(t)$. Entonces, el problema consiste en determinar un contrato de Seguro, que hará posible llevar a cabo el mejor plan de consumo.

Al igual que antes, el problema, formalmente, consiste en maximizar,

$$\int_0^T e^{-\gamma t} u\,[c\,(t)]\,dt$$

Según este plan los ahorros acumulados, en el momento t, serán:

$$S\,(t) = e^{\delta t} \int_0^t \{y\,(s) - c\,(s) - p\,(s\,\}\,e^{-\delta s}\,ds$$

Bajo el contrato de Seguro, la Reserva según el método retrospectivo, en el momento t, será:

$$V(t) = e^{\delta t} \int_0^t \pi\,(s)\,p\,(s)\,e^{-\delta s}\,ds - e^{\delta t} \int_0^t [1 - \pi\,(s)]\,c\,(s)\,e^{-\delta s}\,ds$$

Diferenciando estas dos ecuaciones, y eliminando $p(t)$, obtenemos una expresión, para $c(t)$, que puede ser sustituida en el maximando. Entonces, el problema reviste una forma familiar. Si no imponemos otras condiciones, sobre $S(t)$ y $V(t)$, más que las condiciones sencillas de los límites, tales como:

$$S(0) = S(T) = 0$$

y

$$V(0) = V(T) = 0,$$

el problema puede resolverse mediante el Cálculo de Variaciones clásico.

Se puede demostrar que bajo los planes óptimos, $c(t)+p(t)=y(t)$, es decir, $S(t)=0$, de modo que todo el ahorro tiene lugar al acumular las Reservas en la Compañía de Seguros. Este resultado no debe sorprender, ya que los seguros no dan lugar a ningún ahorro que no se vaya a necesitar.

3.6. Se determina la prima mediante el principio de equivalencia, es decir, según la ecuación $V(T)=0$, o,

$$\int_0^T \pi\,(t)\,p\,(t)\,e^{-\delta t}\,dt = \int_0^T \{1 - \pi\,(t)\}\,c\,(t)\,e^{-\delta t}\,dt$$

Cualquier función, $p(t)$, que satisfaga esta ecuación representa un plan factible de primas, aunque normalmente se requiere también que $V(t) \geqslant 0$.

En contratos de seguro convencionales, la función $p(t)$, normalmente, tiene una forma sencilla, por ejemplo $p(t)=p=$ constante. En tales casos la diferencia, $y(t)-p(t)-c(t)$, se ahorrará, o, si es negativa tendrá que cubrirse mediante los ahorros acumulados. Por lo tanto, un plan de pago de primas inflexible puede obligar al consumidor a ahorrar en la forma convencional.

4. SEGUROS DE VIDA

4.1. Ahora vamos a suponer que el flujo de los ingresos deja de existir con la muerte del consumidor. Si suponemos que su necesidad de consumo muere con él, los modelos de la sección anterior ya no tienen aplicación. El límite superior T en la integral de la función-objetivo [3], se interpretó como el horizonte de planificación del consumidor. En efecto, la duración de su vida es un horizonte de planificación muy natural, así que vamos a interpretar T como el momento en que fallece el consumidor. Claramente T es una variable estocástica y su densidad de probabilidad es:

$$f(T) = \frac{l_{x+T}}{l_x} \cdot \mu_{x+T}$$

Donde l_x es el número de vivos y, μ_x, es la tasa instantánea de mortalidad. Realmente no es necesario introducir el símbolo x, que representa la edad del consumidor, pero es conveniente hacerlo, ya que de esta manera se facilita el uso de la notación actuarial.

4.2. La utilidad que se espera del consumo vitalicio se obtiene entonces de [3]:

$$u = \int_0^\infty \left\{ \int_0^T e^{-\gamma t} u[c(t)]\, dt \right\} \frac{l_{x+T}}{l_x} \cdot \mu_{x+T} \cdot dT = \int_0^T e^{-\gamma t} \cdot \frac{l_{x+t}}{l_x} u[c(t)]\, dt$$

Luego el problema consiste en maximizar:

$$\int_0^\infty e^{-\gamma t} \cdot \frac{l_{x+t}}{l_x} u[c(t)]\, dt \qquad [9]$$

sujeto a algunas condiciones.

El principio de equivalencia requiere que el valor descontado de los ingresos esperados debe ser igual al de los desembolsos destinados al consumo, es decir:

$$\int_0^\infty e^{-\delta t} \cdot \frac{l_{x+t}}{l_x} \cdot \{y(t) - c(t)\}\, dt = 0 \qquad [10]$$

Al igual que en el apartado 3.3, podemos suponer que el consumidor está de acuerdo en entregar todos sus ingresos, $y(t)$, a una Compañía de Seguros, para recibir, a cambio, fondos, $c(t)$, para consumir. La Reserva prospectiva de este Contrato de Seguro, es como sigue:

$$V(t) = e^{\delta t} \int_0^\infty e^{-\delta s} \frac{l_{x+s}}{l_{x+t}} \{c(s) - y(s)\}\, ds$$

y encontramos

$$V'(t) = (\delta + \mu_{x+t}) V(t) + y(t) - c(t) \qquad [11]$$

Es normal requerir que la reserva para un contrato de seguro sea no negativa, es decir, que

$$V(t) \geqslant 0 \qquad [12]$$

4.3. Ahora hemos llegado al problema de maximizar [9] sujeto a la condición [12]. Si llevamos a cabo la maximización, sólo bajo la condición más débil [10], podemos determinar $c(t)$ de [11], sustituir en [9], proceder al igual que en la Sección 2, y llegar al mismo resultado. Encontramos que el plan óptimo de consumo, está determinado por la ecuación diferencial:

$$c'(t) = (\gamma - \delta) \cdot \frac{u'[c(t)]}{u''[c(t)]} \qquad [4]$$

Como $u'(c) > 0$, y, $u''(c) < 0$, se deduce que, $c'(t) < 0$, si $\gamma > \delta$.

Esto es el caso de Fischer de impaciencia elevada. El consumidor estará deseando un consumo inmediato, y, su plan óptimo estará representado por una función decreciente $c(t)$.

Este no es un resultado razonable. Desde luego, puede ocurrir que una persona tenga un consumo elevado, pronto en su vida, y que su consumo decrezca luego con regularidad. Sin embargo, es difícil aceptar que un modelo de consumo de este tipo sea el resultado de una planificación deliberada para toda la vida.

El caso $\delta > \gamma$ no parece mucho más razonable, aunque una persona puede tal vez planificar de tal modo que disfrute un consumo creciente a lo largo de toda su vida. Para ilustrar estas cuestiones, estudiaremos un caso especial sencillo.

4.4. Al igual que en el apartado 2.8, $u(c) = \log c$. La ecuación diferencial que determina $c(t)$ tiene entonces la solución:

$$c(t) = c(o)\, e^{(\delta - \gamma)t}$$

Además, vamos a suponer que $y(t) = y$, para $0 \geqslant t \geqslant n$ e $y(t) = 0$, para $n < t$. Este es el caso típico de la pensión para la vejez.

El valor inicial, $c(0)$, se determina mediante [10], es decir:

$$y \int_0^n e^{-\delta t} \cdot \frac{l_{x+t}}{l_x}\, dt = c(o) \int_0^\infty e^{-\gamma \cdot t} \cdot \frac{l_{x+t}}{l_x}\, dt$$

La prima a pagar, correspondiente a este plan de pensiones, es:

$$p(t) = y - c(t) \qquad \text{para} \qquad 0 \geqslant t \geqslant n$$

Bajo la condición [12], el plan será factible, únicamente si $c(0)<y$. En este caso, puede ser óptimo consumir todos los ingresos, pronto en la vida, teniendo la intención de empezar a pagar un plan de pensiones, en fecha posterior.

Es difícil aceptar que el plan de consumo que hemos encontrado sea superior al plan más convencional, con $c(t)=c=$constante. El nivel factible de consumo constante vendrá determinado por:

$$y\,\bar{a}_{x:\overline{n|}} = c\,\bar{a}_x$$

y se pagará, mediante la prima constante $p=y-c$, hasta el momento n.

Las paradojas con las que nos hemos encontrado, se deben a nuestros supuestos, algo arbitrarios, acerca de la función de utilidad. Sin embargo, no vamos a estudiar las funciones de utilidad que conduzcan a unos resultados más razonables. En su lugar, hablaremos de una paradoja más real.

4.5. Vamos a suponer que el consumidor no tiene ingresos en la primera parte del período de planificación. Entonces, puede que pida dinero prestado para su consumo, y que asegure el préstamo mediante un Seguro de Vida. Sean, $c(t)$ y $p(t)$ las funciones que representan el consumo y el pago de las primas, respectivamente.

En el momento t, la deuda acumulada del consumidor, será:

$$S(t)=c^{\delta t}\int_0^t \{c(s)+p(s)\}\,e^{-\delta s}\,ds \qquad [13]$$

La prima ha de ser suficiente para financiar un Seguro de Vida de capital asegurado, $S(t)$, pagadero si el consumidor fallece en el momento t. El principio de equivalencia da entonces la relación,

$$\int_0^t p(s)\,\frac{l_{x+s}}{l_x}\cdot e^{-\delta s}\cdot ds = \int_0^t S(s)\cdot\frac{l_{x+s}}{l_x}\,\mu_{x+s}\cdot e^{-\delta\cdot s}\,ds$$

Vemos que esta ecuación se satisface mediante $p(t)=S(t)\mu_{x+t}$. Esto corresponde a un seguro de riesgo puro, o, a un contrato "temporal renovable". La Reserva correspondiente a este seguro es cero, de modo que la condición de no negatividad [12] se satisface.

Sustituyendo la expresión para $p(t)$, en [13], obtenemos:

$$S(t)=e^{\delta t}\int_0^t \{c(s)+\mu_{x+s}\,S(s)\}\,e^{-\delta s}\,ds$$

Diferenciando, obtenemos la ecuación diferencial:

$$S'(t) = (\delta + \mu_{x+t})\, S(t) + c(t)$$

Que tiene la solución:

$$S(t) = \int_0^t c(s)\, e^{-\int_s^t (\delta + \mu_{x+r})\, dr}\, dx$$

o, en notación actuarial,

$$S(t) = \int_0^t \frac{D_{x+s}}{D_{x+t}} \cdot c(s)\, ds$$

4.6. En el problema discutido más arriba no hay límites obvios, ni para $c(t)$ ni para t. De aquí que, una persona sin ningunos ingresos en prespectiva podrá mantener un nivel de consumo, arbitrariamente elevado, durante cualquier período de tiempo finito, si se le permite jugar al "juego del seguro" que hemos esbozado.

Aparentemente, nadie pierde en este juego. La Compañía de Seguros recibirá las primas, y pagará el importe correspondiente al fallecimiento del consumidor. Al prestamista se le devolverá el importe prestado con intereses compuestos, cuando se produzca el fallecimiento del consumidor. No pueden existir dificultades obvias de tipo institucional. Por ejemplo, no debe haber ningún reparo, de tipo legal, si el prestamista contrata un seguro sobre la vida del consumidor, paga las primas, y luego las añade, con intereses, al préstamo.

Yaari (7) reconoce la paradoja, pero la descarta con el supuesto de que "la compañía rehusará emitir un Seguro de Vida, después de llegar el consumidor a una determinada edad." Esto es correcto, pero el límite de edad oscila entre los 70 y los 90 años, en la mayoría de los países, de modo que esto no constituye una explicación muy satisfactoria. Para un hombre que tenga entre 20 y 23 años de edad, le puede parecer atractivo medio siglo de consumo sin restricciones, aún si tiene que sobrevenir el día de la verdad.

4.7. Fisher (2) no habla explícitamente de la paradoja, pero reconoce la legitimidad de "los préstamos para consumo anticipando una mejora en las condiciones financieras". No obstante, de su libro se desprende claramente que Fisher hubiera intentado explicar la paradoja mediante argumentos macroeconómicos. Nadie puede consumir más allá de sus ingresos, a no ser que haya alguien que esté dispuesto a ahorrar una parte de sus ingresos y prestarlos al consumidor impaciente. En el mundo de Fisher los consumidores que deseen jugar al "juego del seguro" tal vez no encuentren prestamistas.

No obstante, esto no constituye una explicación completa. La tasa de interés debería lograr un equilibrio entre la demanda de los prestatarios y la oferta de los prestamistas, pero está claro que un tipo de interés elevado no detendría a un consumidor que deseara jugar. Un incremento en el tipo de interés sólo echaría fuera del mercado a aquellos que desean pedir prestado con el objeto de hacer inversiones. Por consiguiente, el apoyo del Seguro de Vida para préstamos a consumidores tiene que crear algo de presión inflacionaria, simplemente porque hace posible un consumo que, de otra manera, tendría que posponerse.

La paradoja real tras estas observaciones puede ser que las Compañías de Seguros, cuya propia existencia está amenazada por la inflación, contribuyen a la inflación vendiendo Seguros Temporales para cubrir préstamos, lo cual puede acelerar el consumo. No hablaremos más de esta cuestión, toda vez que parece merecer un artículo por separado. No obstante, puede ser de interés mencionar que Fisher observa que "tales préstamos se otorgan quizá más a menudo en Gran Bretaña" ((2), pág. 358), un país que tiene las instituciones del Seguro más desarolladas en el Mundo, y también, una tasa de inflación nada envidiable.

5. EL SEGURO PARA BENEFICIO DE LOS SOBREVIVIENTES

5.1. Hasta aquí hemos considerado el Seguro de Vida tan sólo como un medio para suavizar un flujo de ingresos oscilante e inseguro. La solución a los problemas considerados hizo cierto que el consumidor no dejase ahorros a su fallecimiento. Sin embargo, se hacen muchos Seguros de Vida al objeto explícito de dejar un activo líquido como "legado" a los herederos. Por lo tanto hemos de llegar a la conclusión de que algunas personas asignan utilidad a tal legado.

Para incorporar este elemento en el modelo, podemos suponer que el plan de seguros-consumo de la persona consiste en dos elementos:

(i) Un plan de consumo para su vida, $c(t)$;

(ii) Una cantidad, $B(t)$, pagadera a las herederos del consumidor, si muere en el momento t.

Con los recursos dados, es decir, cuando se da el flujo de los ingresos, $y(t)$, un grupo de pares $\{c(t), B(t)\}$ aparecerá como factible. El primer problema, entonces, consiste en establecer una preferencia ordenando un conjunto de tales pares.

Dados los supuestos que hemos hecho anteriormente, es natural suponer que la utilidad asignada a un par arbitrario, es:

$$\int_0^\infty e^{-\gamma t} \cdot \frac{l_{x+t}}{l_x} u\,[c\,(t)]\,dt + \int_0^\infty \beta\,(t)\frac{l_{x+t}}{l_x} \cdot \mu_{x+t} \cdot w\,[B\,(t)]\,dt \qquad [14]$$

Aquí hemos escrito $\beta(t)$ mejor que $e^{-\beta t}$, porque parece algo artificial el suponer que los legados deben descontarse a una tasa constante. La función $w(B)$ representa la utilidad de un legado B. La expresión [14] es la función-criterio de Yaari, en notación actuarial.

5.2. Con el objto de determinar los pares factibles, una vez más podemos suponer que el consumidor entrega todos sus ingresos, $y(t)$, a una Compañía de Seguros, la cual le da a cambio un par $(c(t), B(t))$. El principio de equivalencia requiere entonces que,

$$\int_0^\infty e^{-\delta t} \cdot \frac{l_{x+t}}{l_x} y\,(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-\delta t} \cdot \frac{l_{x+t}}{l_x} \cdot \{c\,(t) + \mu_{x+t} B\,(t)\}\,dt \qquad [15]$$

La Reserva prospectiva de este contrato de Seguro es:

$$V\,(t) = e^{\delta t} \int_t^\infty e^{-\delta s} \cdot \frac{l_{x+s}}{l_{x+t}} \cdot \{c\,(s) + \mu_{x+s} \cdot B\,(s) - y\,(s)\}\,ds$$

De esto obtenemos,

$$V'\,(t) = \{\delta + \mu_{x+t}\}\,V(t) + y\,(t) - \{c\,(t) + \mu_{x+t} \cdot B\,(t)\}$$

Podemos utilizarlo para encontrar una expresión de $c(t)+\mu_{x+t}B(t)$, y sustituir en [14]. Entonces, el problema de maximizar [14] se reduce a un problema del Cálculo de Variaciones clásico. Se hace más complicado el problema si imponemos la condición natural:

$$V(t) \geqslant 0$$

5.3. No es posible discutir la forma de la solución en detalle, sin hacer algunos supuestos acerca de las funciones $u(c)$, $w(B)$ y $\beta(t)$. Sin embargo, no es fácil decidir qué supuestos debe hacer uno razonablemente, y la literatura a la que nos hemos referido tiene poco que decir acerca de esta cuestión.

Si el objeto del Seguro es el de proveer unos ingresos para la eventual viuda, puede que sea natural poner $B(t)=b\bar{a}_{z+t}$, donde z es la edad de la esposa cuanto se hace el contrato del Seguro. La función $c(t)$ y b tienen que satisfacer [15] y ser determinadas de modo que [14] o alguna otra función-criterio se maximice.

Este arreglo le proporcionará a la viuda, una cantidad de una sola vez, suficiente para comprar una renta vitalicia por un importe b.

5.4. Puede que el arreglo que hemos esbozado sea ineficiente, por dos razones:

(i) Si la viuda no quiere un plan de consumo constante, después del fallecido el marido, tendrá que resolver el problema discutido en la Sección 4, y determinar su propio plan de seguros-consumo óptimo.

(ii) Puede que la esposa muera antes del marido, en cuyo caso se "desperdiciará" el legado de la misma manera que los ahorros convencionales, de los cuales hemos hablado en la Sección 2.

Una forma más general de abordar el tema consistiría en especificar tres planes de consumo $c_1(t)$, $c_2(t)$ y $c_3(t)$ para la pareja, la eventual viuda y el eventual viudo, respectivamente. Entonces, el principio de equivalencia daría los planes factibles, que han de satisfacer la condición:

$$\int_0^\infty y(t)\cdot\frac{D_{x+t}}{D_x}\,dt = \int_0^\infty \{c_1(t) - c_2(t) - c_3(t)\}\,\frac{D_{x+t,\,z+t}}{D_{xz}}\,dt + \\ + \int_0^\infty c_2(t)\,\frac{D_{z+t}}{D_z}\,dt + \int_0^\infty c_3(t)\,\frac{D_{x+t}}{D_x}\cdot dt$$

Luego, hay que determinar la combinación óptima del trío, de modo que alguna función-criterio sea maximizada.

Apenas es realista esperar que una familia pueda especificar sus preferencias para un consumo futuro en la forma de una función-criterio, aún más complicada que [14]. Por consiguiente, el seguro de vida convencional, con su capital asegurado pagadero de una sola vez al fallecimiento, puede tener su utilidad. Teóricamente, es un arreglo ineficiente, pero puede que esto se compense mediante su flexibilidad.

BIBLIOGRAFIA

(1) BÖHM-BAWERK, E.: *Positive Theorie des Kapitals*, Vienna, 1889.

(2) FISCHER, S.: *A Life Cycle Model of Life Insurance Purchasing*, "International Economic Review", 1973, pp. 132-152.

(3) FISHER, I.: *The Theory of Interest*, Macmillan, 1930.

(4) MARSHALL, A.: *Principles of Economics*, Macmillan, 1890.

(5) RICHARD, S. F.: *Optimal Consumption, Portfolio and Life Insurance. Rules for an Uncertain Lived Individual in a Continuous Time Model*, "Journal of Financial Economics", 1975, pp. 187-203.

(6) YAARI, M. E.: *On the Existence of an Optimal Plan in a Continuous Time Allocation Process*, "Econometrica", 1964, pp. 576-590.

(7) YAARI, M. E.: *Uncertain Lifetime, Life Insurance and the Theory of the Consumer*, "Review of Economic Studies" 1965, pp. 137-150.