# «Estudio general de los sistemas financieros estáticos y dinámicos en los seguros sociales»

INDICE

# «Estudio general de los sistemas financieros estáticos y dinámicos en los seguros sociales»

Por el Dr. UBALDO NIETO DE ALBA
Catedrático de Teoría Matemática del Seguro
de la Universidad de Madrid

## INTRODUCCION

El presente trabajo contiene una exposición sistemática de la matemática de los seguros sociales siguiendo la Línea de Kaiser, expuesta especialmente en su trabajo "Equations fonctionnelles des mathematiques sociales" (III Conferencia Internacional S. S. Madrid, 1962).

Nuestra idea básica ha sido la de traducir todas las variables que influyen sobre el sistema (Grado de capitalización, renovación de la población, evolución de las pensiones) en variables de capitalización.

En este sentido nos aproximamos más a las aportaciones de Wünsche (en los trabajos citados en la Bibliografía) admitiendo su misma descomposición para las funciones de población y salarios. Pero, a diferencia de éste, nuestros resultados no exigen hipótesis concretas sobre dichas funciones de renovación y evolución de los salarios.

De esta forma llegamos a una discusión más actuarial de los sistemas dinámicos y estáticos.

Este mismo análisis lo hacemos extensivo para las Reservas matemáticas, tanto para derechos en formación como para derechos en disfrute.

La última parte del trabajo está dedicada a las Reservas en base de tasas de evolución global y su análisis. Tanto en esta parte como en la relativa a las funciones conexas recuperamos nuevamente la línea de Kaiser.

## 1.—ESPACIO DEMO-SOCIAL

Es el que contiene, según Kaiser (1) las variables básicas. Estas son:

— Tiempo físico ...................... t

— Edad (tiempo actuarial)......... X

— Salarios ............................ $u = G(t, \xi)$

Teniendo en cuenta la necesidad de plantear los problemas de adaptación será conveniente considerar lo que llamaremos variable de adaptación $\eta$.

Este autor llama espacio demo-social (anteriormente le llamó espacio bio-econométrico) a (t, X, u). Cuyo campo de variación es:

*a)* $0 \leqslant t < \infty$. Siendo $t = 0$ el comienzo del régimen.

*b)* $X_0 \leqslant X \leqslant \omega$. Con $X_0 \leqslant X \leqslant X_1$ para las cotizaciones $X_1 < X \leqslant \omega$ para las pensiones.

*c)* $0 \leqslant u < \infty$. Salario de una persona considerada en el momento t y a una edad $\xi$.

La variable de adaptación $\eta$ varía:

*d)* $0 \leqslant \eta \leqslant 1$. Para $\eta = 0$ no hay adaptación y para $\eta = 1$ esta es del 100 por 100.

---

(1) KAISER, E.: *Equations fonctionnelles des Mathématiques Sociales*. Ass. Inst. S. S. III C. I. Madrid. 1962.

Considerando el espacio (X, t) se pueden distinguir las siguientes rectas:

— Rectas horizontales, en las cuales se sitúan los fenómenos de renovación. Para $x = x_0$ es la entrada en el régimen obligatorio y para $x = x_1$ el paso de cotizante a pensionista.

— Rectas verticales, que caracterizan las comunidades de presentes.

— Rectas diagonales, cada una de las cuales comprende la comunidad formada por una generación (personas nacidas en el mismo instante).

— Rectas de una comunidad de riesgos creada en el momento t:

Activos:

$$\tau_1 = t + \sigma_1(\xi - x_0)$$

$$x_0 \leqslant \xi \leqslant x_1$$

Pasivos:

$$\tau_2 = t - \sigma_1(x_1 - x_0) + \sigma_2(\xi - x_1)$$

$$x_1 < \xi < \omega$$

siendo $\sigma_1$ y $\sigma_2$, respectivamente, las tangentes de los ángulos $0 \leqslant \theta_1 \leqslant \frac{\pi}{4}$, $0 \leqslant \theta_2 \leqslant \frac{\pi}{1}$, con el sentido positivo del eje X.

## 2.—FUNCIONES DEMO-SOCIALES

Las más importantes funciones que intervienen en una comunidad de riesgos son:

$L_{\xi,\tau}$ = Colectivo considerado en el momento $\tau$ a la edad $\xi$.

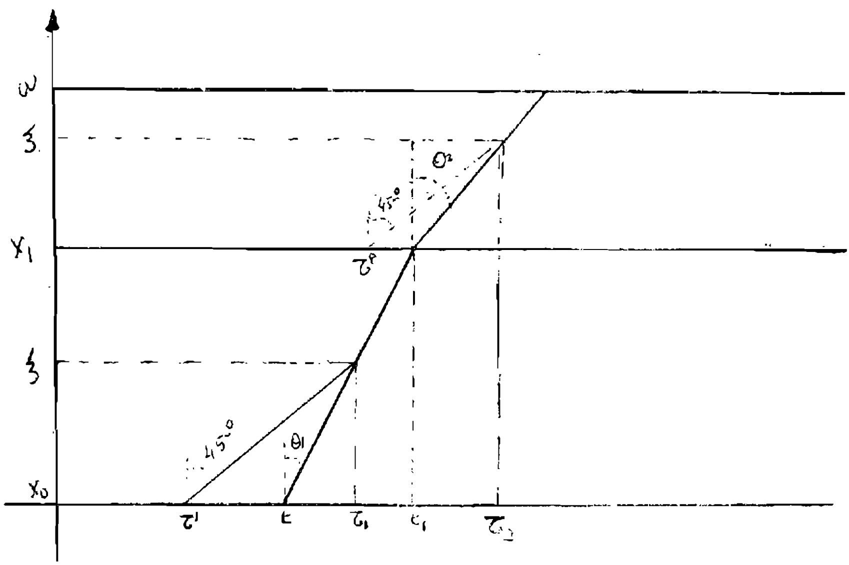
$L_{\xi,\tau_1}$ = Activos o cotizantes.
$L_{\xi,\tau_2}$ = Pasivos o pensionistas.

$G_{\xi, \tau_1}$ = Salario medio de un activo a la edad $\xi$ en el momento $\tau_1$.

$G^{(\xi - X_1, \eta)}_{X_1, \tau - (\xi - X_1)}$ = Prestación a un pensionista que vive en $\tau_2$ con edad $\xi$ (que se inició cuando cumplió la edad $X_1$ en el momento $\tau_2$ — — ($\xi$ — $X_1$). Todo ello con adaptación de ($\xi$ — $X_1$) veces los salarios variables en sí, teniendo en cuenta un grado de adaptación $0 \leqslant \eta \leqslant 1$.

## 3.—REPRESENTACION GRAFICA

En el siguiente sistema de ejes coordenados aparece la representación gráfica de una comunidad de riesgos creada en el momento t a la edad $X_0$.



Comunidad de riesgos creados en t a la edad $X_0$

Activos:

$$c = \sigma_1(\xi - X_0) = (\tau_1 - t)$$

$$\tau_1 = t + \sigma_1(\xi - X_0)$$

Pasivos:

$$\hat{c} = \sigma_2(\xi - X_1) = (\tau_2 - t_1)$$
$$\tau_2 = t_1 + \sigma_2(\xi - X_1)$$

Como

$$\sigma_1(X_1 - X_0) = t_1 - t$$
$$\tau_2 = t + \sigma_1(X_1 - X_0) + \sigma_2(\xi - X_1)$$

Toda persona considerada en:

*a)* $(\xi, \tau_1)$ ha entrado en el régimen obligatorio a la edad $X_0$ en el instante $\tau^1$:

$$\xi - X_0 = \tau_1 - \tau^1$$

$$\tau^1 = \tau_1 - (\xi - X_0) = t + \sigma_1(\xi - X_0) - (\xi - X_0) =$$
$$= t + (\xi - X_0)(\sigma_1 - 1)$$

*b)* $(\xi, \tau_2)$ ha entrado a ser pensionista en $\tau^p$ a la edad $X_1$:

$$\tau^p = \tau_2 - (\xi - X_1)$$

## 4.—CLASIFICACION DE LOS SISTEMAS FINANCIEROS

Siguiendo a Kaiser (1), se tiene:

1. Sistemas financieros de una dimensión:

*a)* Sistemas de reparto $(\sigma_1, \sigma_2) = (0, 0)$.
*b)* Sistema de capitalización $(\sigma_1, \sigma_2) = (1, 1)$.

---

(1) KAISER, E.: *Equations Fonctionnelles des Mathématiques Sociales*. Ass. Inst. S. S. III Conferencia de Madrid, 1962.

*c)* Sistemas mixtos:

Reparto de valores actuales de pensiones $(\sigma_1\ \sigma_2) = (0, 1)$.
Reparto de valores finales de cotizaciones $(\sigma_1, \sigma_2) = (1, 0)$.

2. Sistemas financieros bidimensionales.—Si en vez de considerar los activos y pasivos (aportaciones y prestaciones) sobre las rectas $c$ y $\hat{c}$ respectivamente, se consideran sobre paralelogramos extendidos a un intervalo de tiempo h, tendremos los sistemas bidimensionales.

Estos sistemas, a su vez, se pueden clasificar para cada $(\sigma_1, \sigma_2)$.

*a)* Sistemas a intervalos $(t, t + h)$ limitados:

— Cotización media para las comunidades iniciales.
— Cotización media para las comunidades de renovación.
— Cotización media para las comunidades mixtas.

*b)* Sistemas a intervalos ilimitados $(h \to \infty)$:

— Cotización media general para las comunidades de renovación.
— Cotización media general para las comunidades mixtas.

## 5.—ECUACION DE EQUILIBRIO

Consideremos una comunidad de riesgos constituida en el momento *t* a la edad $X_0$ y para un sistema financiero $(\sigma_1, \sigma_2)$. La ecuación de equilibrio financiero será:

$$\int_c \pi^{(\sigma_1, \sigma_2, \eta)}_{(\tau_1, \xi)} L_{\xi, \tau_1} G_{\xi, \tau_1} e^{-\int_t^{\tau_1} \delta(r)dr} d\xi =$$

$$= \int_{\hat{c}} L_{\xi, \tau_2} G^{(\xi - X_1, \eta)}_{X_1, \tau_2 - (\xi - X_1)} e^{-\int_t^{\tau_2} \delta dr} d\xi$$

en donde la tasa de cotización $\pi^{(\sigma_1, \sigma_2, \eta)}$ aparece como una función desconocida en una ecuación integral de Fredholm de primera especie y de núcleo degenerado.

La solución media viene dada por:

$$\pi^{(\sigma_1,\sigma_2,\eta)}_{(t, X_0)} \int_{X_0}^{X_1} L_{\xi, \tau_1} G_{\xi, \tau_1} e^{-\int_t^{\tau_1} \delta dr} d\xi =$$

$$= \int_{X_1}^{\omega} L_{\xi, \tau_2} G^{(\xi - X_1, \eta)}_{X_1, \tau_2 - (\xi - X_1)} e^{-\int_t^{\tau_2} \delta dr}$$

Siguiendo a Wünsche (1) escribiremos:

$$L_{\xi, \tau_1} = \zeta[\tau_1 - (\xi - X_0)] \frac{l_\xi}{l_{X_0}}$$

$$G_{\xi, \tau_1} = g_\xi \cdot \varphi(\tau_1)$$

$$G^{(\xi - X_1, \eta)}_{X_1, \tau_2 - (\xi - X_1)} = \varphi^{(\xi - X_1, \eta)}_{[\tau_2 - (\xi - X_1)]}$$

en donde:

$\zeta_{(t)}$ = Función de renovación de la población.

$g_\xi$ = Función de salarios según la edad.

$\varphi_{(t)}$ = Función de evolución de los salarios en el tiempo.

$\varphi^{(k, \eta)}_{(t-k)}$ = Renta de vejez que ha comenzado en $t - k$ con $g_{X_1} \cdot \varphi(t - k)$, y en el momento t ha sufrido una adaptación de k veces $\eta$ ($0 \leqslant \eta \leqslant 1$).

---

(2) WÜNSCHE, G.: *Entwicklung und Voranschätzung des Reservebedarfs zur finanzierung flexibler Pensionsrenten.* XVII C. I. Actuarios. 1964.

Es decir:

$$\varphi^{(k,\,\eta)}_{(t-k)} = \varphi\left[t - (1-\eta)\,k\right] \begin{cases} \varphi^{(k,\,0)}_{(t-k)} = \varphi(t-k) \\ \varphi^{(k,\,1)}_{(t-k)} = \varphi(t) \end{cases}$$

con fines de simplificación también se supondrá $gx_1 = 1$.

Con arreglo a lo que precede se tiene la siguiente ecuación de equilibrio:

$$\pi^{(\sigma_1,\,\sigma_2,\,\eta)}_{(t,\,X_0)} \int_{X_0}^{X_1} \zeta[\tau_1 - (\xi - X_0)]\; g_\xi \cdot \varphi(\tau_1)\, \frac{l_\xi}{l_{X_0}}\, e^{-\int_t^{\tau_1} \delta dr}\, d\xi =$$

$$= \int_{X_1}^{\omega} \zeta[\tau_2 - (\xi - X_0)]\; \varphi^{(\xi - X_1,\,\eta)}_{[\tau_2 - (\xi - X_1)]}\, \frac{l_\xi}{l_{X_0}}\, e^{-\int_t^{\tau_2} \delta dr}\, d\xi$$

La integral del primer término de la igualdad se puede escribir:

$$\int_{X_0}^{X_1} g_\xi \cdot \frac{l_\xi}{l_{X_0}}\, e^{\ln \zeta + \ln \varphi - \int_t^{\tau_1} \delta dr}\, d\xi = \int_{X_0}^{X_1} g_\xi \cdot \frac{l_\xi}{l_{X_0}} \cdot e^{-\Psi(t,\,X_0,\,\xi)}\, d\xi$$

en donde se tiene, como factor logarítmico de actualización:

$$\Psi(t, X_0, \xi) = (\tau_1 - t)\delta - \ln \zeta[\tau_1 - (\xi - X_0)] - \ln \varphi(\tau_1) =$$

$$= \sigma_1(\xi - X_0)\delta - \ln \zeta[t + (\sigma_1 - 1)(\xi - X_0)] -$$

$$- \ln \varphi[t + \sigma_1(\xi - X_0)]$$

Considerando a Z como variable de capitalización será:

$$\Psi'^{(t,\,X_0,\,Z)}_{Z} = \sigma_1\delta - \frac{\zeta'[t + (\sigma_1 - 1)(Z - X_0)]}{\zeta[t + (\sigma_1 - 1)(Z - X_0)]}\,(\sigma_1 - 1) -$$

$$- \frac{\varphi'[t + \sigma_1(Z - X_0)]}{\varphi[t + \sigma_1(Z - X_0)]} \cdot \sigma_1 =$$

$$= \delta\sigma_1 - \nu(\sigma_1 - 1) - \Psi\sigma_1 = \rho_1(t, X_0, Z)$$

Es decir:

$$\int_{X_0}^{X_1} g_\xi \cdot \frac{l_\xi}{l_{X_0}} e^{-\Psi(t, X_0, \xi)} d\xi =$$

$$= \int_{X_0}^{X_1} \varphi_{(t)} g_\xi \cdot \frac{\zeta_{(t)} l_\xi}{l_{X_0}} e^{-\int_{X_0}^{\xi} \rho_1(t, X_0, Z) dZ} d\xi =$$

$$= \bar{a}^{(\rho_1)}_{X_0 : \overline{X_0 - X_1}|}$$

En general, se trata de leyes de capitalización no escin dibles.

La integral correspondiente a las prestaciones será:

$$\int_{X_1}^{\omega} \zeta[\tau_2 - (\xi - X_0)] \; \varphi^{(\xi - X_1, \eta)}_{[\tau_2 - (\xi - X_1)]} \frac{l_\xi}{l_{X_0}} e^{-\int_t^{\tau_2} \delta dr} d\xi =$$

$$= \int_{X_1}^{\omega} \frac{l_\xi}{l_{X_0}} e^{-\Psi\rho(t, X_0, \xi)} d\xi$$

siendo $\Psi_\rho$ el factor logarítmico de actualización de las prestaciones. Es decir:

$$\Psi_\rho = \delta(\tau_2 - t) - \ln \zeta[\tau_2 - (\xi - X_0)] -$$

$$- \ln \varphi[\tau_2 - (1 - \eta)(\xi - X_1)] =$$

$$= \delta[\sigma_1(X_1 - X_0) + \sigma_2(\xi - X_1] -$$

$$- \ln \zeta[t + \sigma_1(X_1 - X_0) + \sigma_2(\xi - X_1) - (\xi - X_0)] -$$

$$- \ln \varphi[t + \sigma_1(X_1 - X_0) + (\sigma_2 + \eta - 1)(\xi - X_1)]$$

Ahora podemos escribir:

$$\Psi_\rho(t, X_0, \xi) = \delta\sigma_1(X_1 - X_0) - \ln \zeta[t + (\sigma_1 - 1)(X_1 - X_0)] -$$

$$- \ln \varphi[t + \sigma_1(X_1 - X_0)] +$$

$$+\int_{X_1}^{\xi}\left\{\delta\sigma_2-\frac{\zeta'[t+\sigma_1(X_1-X_0)+\sigma_2(Z-X_1)-(Z-X_0)}{\zeta}(\sigma_2-1)-\right.$$

$$\left.-\frac{\varphi'[t+\sigma_1(X_1-X_0)+(\sigma_2+\eta-1)}{\varphi}(\sigma_2+\eta-1)\right\}dZ=$$

$$=\Psi(t, X_0, X_1)+\int_{X_1}^{\xi}\rho_2(t, X_0, Z)dZ$$

siendo:

$$\rho_2(t, X_0, Z)=\delta\sigma_2-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_2-1)-\frac{\varphi'}{\varphi}(\sigma_2+\eta-1)=$$

$$=\delta\sigma_2-\nu(\sigma_2-1)-\Psi(\sigma_2+\eta-1)$$

La integral de las prestaciones se puede escribir:

$$\int_{X_1}^{\omega}\frac{l_\xi}{l_{X_0}}e^{-\Psi\rho}\,d\xi=\frac{l_{X_1}}{l_{X_0}}e^{-\Psi(t, X_0, X_1)}\int_{X_1}^{\omega}\frac{l_\xi}{l_{X_1}}e^{-\int_{X_1}^{\xi}\rho_2(t, X_0, Z)dZ}d\xi$$

Nuevamente han surgido leyes de capitalización no escindibles.

La ecuación de equivalencia se puede escribir así:

$$\pi_{(X_0, t)}^{(\sigma_1, \sigma_2, \eta)}\;\bar{a}^{(\rho_1)}_{X_0:\overline{X_1-X_0}|}={}_{X_1-X_0}E^{(\rho_1)}_{X_0}\cdot\bar{a}^{(\rho_2)}_{X_1}$$

es decir:

$$\pi_{(X_0, t)}^{(\sigma_1, \sigma_2, \eta)}=\frac{{}_{X_1-X_0}E^{(\rho_1)}_{X_0}\bar{a}^{(\rho_2)}_{X_1}}{\bar{a}^{(\rho_1)}_{X_0:\overline{X_1-X_0}|}}$$

Para un sistema bidimensional (intervalos limitados) tendremos, como cuota media:

$$\pi_{(X_0, h)}^{(\sigma_1, \sigma_2, \eta, h)}\int_{t}^{t+h}\bar{a}^{(\rho_1)}_{X_0:\overline{X_1-X_0}|}\,e^{-\int_t^{\tau}\delta dr}\,d\tau=$$

$$= \int_t^{t+h} {}_{X_1-X_0}E_{X_0}^{(\rho_1)} \bar{a}_{X_0}^{(\rho_2)} e^{-\int_t^\tau \delta dr} d\tau =$$

$$= \int_t^{t+h} \pi_{(X_0,\, \tau)}^{(\sigma_1,\, \sigma_2,\, \eta)} \cdot \bar{a}_{X_0\, :\, \overline{X_1-X_0}|}^{(\rho_1)} e^{-\int_t^\tau \delta dr} d\tau$$

es decir:

$$\pi_{(X_0,\, t)}^{(\sigma_1,\, \sigma_2,\, \eta,\, h)} =$$

$$= \int_t^{t+h} h_{(\tau)}^{(\rho_1)} \cdot \pi_{(X_0,\, \tau)}^{(\sigma_1,\, \sigma_2,\, \eta)} e^{-\int_t^\tau \delta dr} d\tau$$

siendo:

$$h_{(\tau)}^{(\rho_1)} = \frac{e^{-\int_t^\tau \delta dr} \cdot \bar{a}_{X_0\, :\, \overline{X_1-X_0}|}^{(\rho_1)}}{\int_t^{t+h} e^{-\int_t^\tau \delta dr} \cdot \bar{a}_{X_0\, :\, \overline{X_1-X_0}|}^{(\rho_1)} d\tau}$$

## 6.—DISCUSION DE RESULTADOS.—MODELOS ESTATICOS Y DINAMICOS

Teniendo en cuenta los tantos instantáneos de capitalización:

$$\rho_1(t, X_0, Z) = \delta\sigma_1 - \nu(\sigma_1 - 1) - \Psi\sigma_1 \qquad X_0 < Z < X_1$$

$$\rho_2(t, X_0, Z) = \delta\sigma_2 - \nu(\sigma_2 - 1) - \Psi(\sigma_2 + \eta - 1) \quad X_1 < Z < \omega$$

Con respecto a $\nu$ puede suceder:

Tasa de renovación de la población positiva: $\nu > 0$.
Tasa de renovación de la población negativa: $\nu < 0$.
Estacionaridad absoluta: $\nu = 0$.

Representando $\Psi$ la tasa de crecimiento de los salarios y dado el comportamiento de los mismos dentro de la economía lo normal es que $\Psi > 0$. Para $\Psi = 0$ se tiene la estabilidad absoluta en el nivel de salarios.

Cuando $\nu$ y $\Psi$ son constantes estamos ante el modelo de estacionaridad relativa. En este caso también serán constantes $\rho_1$ y $\rho_2$ con lo cual se tendrán leyes de capitalización escindibles.

Modelos estáticos.—Estaremos ante los mismos cuando supongamos $\nu = \Psi = 0$. Aquí encontramos los sistemas clásicos:

$$
\begin{array}{l}
\rho_1 = \delta\sigma_1 \\
\rho_2 = \delta\sigma_2
\end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
\text{Reparto } (\sigma_1, \sigma_2) = (0, 0) \left\{ \begin{array}{l} \rho_1 = 0 \\ \rho_2 = 0 \end{array} \right. \\
\text{Capitalización } (\sigma_1, \sigma_2) = (1, 1) \left\{ \begin{array}{l} \rho_1 = \delta \\ \rho_2 = \delta \end{array} \right. \\
\text{Reparto Cap. cobertura } (\sigma_1, \sigma_2) = (0, 1) \left\{ \begin{array}{l} \rho_1 = 0 \\ \rho_2 = \delta \end{array} \right.
\end{array}
\right.
$$

Tales modelos exigen unas hipótesis que raramente se dan en la realidad: Estabilidad absoluta en la población y en el nivel de salarios.

Modelos de estacionaridad relativa.—Cuando $\nu$ y $\Psi$ son constantes ya hemos visto que $\rho_1$ y $\rho_2$ son independientes del momento origen de la comunidad. En este caso la tasa normada de cotización $\pi_{x_0, t}^{(\sigma_1, \sigma_2, \eta)}$ es independiente del momento t.

Modelos dinámicos.—Cuando se da entrada a la evolución de la población y de los salarios estaremos ante modelos evolutivos o dinámicos.

Para los tres sistemas antes mencionados se tiene:

1. Sistema de reparto simple $(\sigma_1, \sigma_2) = (0, 0)$:

$$\begin{matrix}\rho_1 = \nu \\ \rho_2 = \nu - \Psi(\eta - 1)\end{matrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta = 0 \begin{cases}\rho_1 = \nu \\ \rho_2 = \nu + \Psi\end{cases} \\ \eta = 1 \begin{cases}\rho_1 = \nu \\ \rho_2 = \nu\end{cases} \end{array}\right.$$

2. Sistema de capitalización $(\sigma_1, \sigma_2) = (1, 1)$:

$$\begin{matrix}\rho_1 = \delta - \Psi \\ \rho_2 = \delta - \Psi\eta\end{matrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta = 0 \begin{cases}\rho_1 = \delta - \Psi \\ \rho_2 = \delta\end{cases} \\ \eta = 1 \begin{cases}\rho_1 = \delta - \Psi \\ \rho_2 = \delta - \Psi\end{cases} \end{array}\right.$$

3. Sistema de reparto de capitales de cobertura $(\sigma_1, \sigma_2) =$
$= (0, 1)$:

$$\begin{matrix}\rho_1 = \nu \\ \rho_2 = \delta - \Psi\eta\end{matrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta = 0 \begin{cases}\rho_1 = \nu \\ \rho_2 = \delta\end{cases} \\ \eta = 1 \begin{cases}\rho_1 = \nu \\ \rho_2 = \delta - \Psi\end{cases} \end{array}\right.$$

## 7.—RESERVAS MATEMATICAS (PARA DERECHOS EN FORMACION Y DISFRUTE)

Situados en un momento k, y para un sistema financiero dado $(\sigma_1, \sigma_2)$ se presenta el problema de cálcular los fondos acumulados hasta ese momento. Tales fondos constituyen las reservas matemáticas del sistema en ese momento. Algún autor, como Féraud (1), les llama también *diferencia actuarial.*

(1) FÉRAUD, L.: "Valeurs actuelles dans les caises de retraites". *Rev. Int. Act. Est.* S. S., n.º 10, 1964.

Con arreglo al gráfico adjunto y para un sistema $(\sigma_1, \sigma_2)$ se tiene la siguiente equivalencia financiera (2):

$$A_0ABB_0 = B_0BCC_0$$

lo cual se puede escribir:

$$A_0EBB_0 - AEB = B_0BFC_0 + BCF$$

El balance técnico que define las reservas matemáticas retrospectivamente será:

$$^{(\sigma_1, \sigma_2)}V_{(K)} = A_0EBB_0 - B_0BFC_0 = AEB + BCF$$

$$= {}^{(\sigma_1)}\overline{V}_{(K)} + {}^{(\sigma_2)}\hat{V}_{(K)}$$

siendo:

$^{(\sigma_1)}\overline{V}_{(K)}$ = Reservas para derechos en formación.

$^{(\sigma_2)}\hat{V}_{(K)}$ = Reservas para derechos en curso.

Para llegar a este mismo resultado por el llamado método prospectivo se puede partir de la ecuación de equilibrio:

$$AA'B'B = BB'C'C$$

que se puede transformar en:

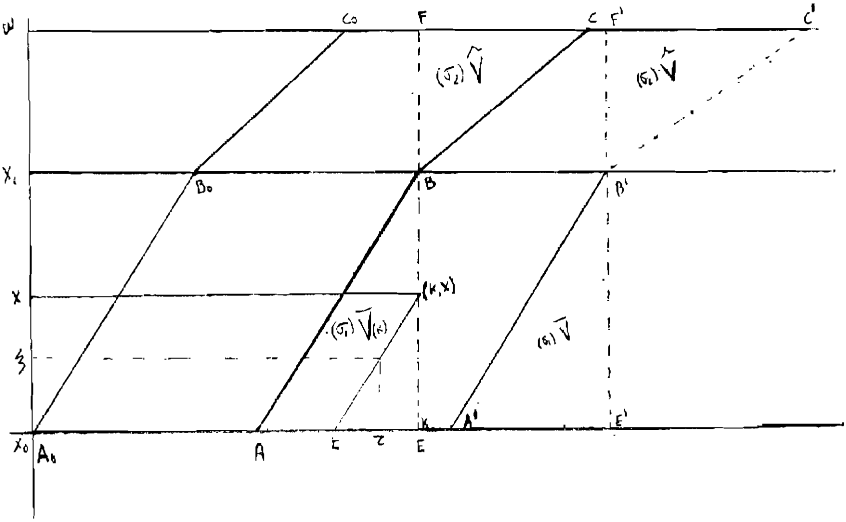
$$AEB + EA'B'B = BB'C'F - BCF$$

el balance técnico que nos da las reservas matemáticas por el método prospectivo es:

$$^{(\sigma_1, \sigma_2)}V_{(K)} = BB'C'F - EA'B'B = AEB + BCF$$

$$= {}^{(\sigma_1)}\overline{V}_{(K)} + {}^{(\sigma_2)}\hat{V}_{(K)}$$

(2) KAISER, E.: Art. citado.




Reservas matemáticas para pensiones o derechos en formación.—Estos serán:

$$ {}_{(\sigma_1)}\overline{V}_{(K)} = \int_{X_0}^{X_1}\int_{c(t,\,X)} \pi_{(X_0,\,t)} L_{\xi,\,\tau} G_{\xi,\,\tau}\, e^{\int_{\tau}^{K}\delta dr}\, d\xi dx $$

$$ = \int_{X_0}^{X_1}\int_{X_0}^{X} \pi_{(X_0,\,t)} L_{\xi,\,\tau} G_{\xi,\,\tau}\, e^{\int_{\tau}^{K}\delta dr}\, d\xi dx $$

en donde

$$ c(t, X) = K - \tau = \sigma_1(X - \xi) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_0 \leqslant \xi \leqslant X \\ t \leqslant \tau \leqslant K \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} X_0 \leqslant X \leqslant X_1 \\ t_0 \leqslant t \leqslant K \end{array} \right. \quad t_0 = A $$

Teniendo en cuenta:

$$ \int_{X_0}^{X} L_{\xi,\,\tau} G_{\xi,\,\tau}\, e^{\int_{\tau}^{K}\delta dr}\, d\xi = \int_{X_0}^{X} \frac{g_\xi l_\xi}{l_{X_0}}\, e^{+\Psi_1} d\xi $$

$$\Psi_1 = \delta(K - \tau) + l\zeta[\tau - (\xi - X_0)] + l\varphi(\tau) =$$

$$= \delta\sigma_1(X - \xi) + l\zeta[K - \sigma_1(X - \xi) - (\xi - X_0)] +$$

$$+ l\varphi[K - \sigma_1(X - \xi)]$$

$$= \int_{\xi}^{X} [\delta\sigma_1 - \nu(\sigma_1 - 1) - \Psi\sigma_1] dz + l\zeta[K - (X - X_0)] +$$

$$+ l\varphi(K)$$

$$= \int_{\xi}^{X} \rho_1 dz - \int_{X_0}^{X} \nu dz + l\zeta(K) + l\varphi(K)$$

Por tanto,

$$^{(\sigma_1)}\overline{V}_K = \int_{X_0}^{X_1} \pi_{(X_0,\, t)}\, e^{-\int_{X_0}^{X} \nu dz} \cdot \zeta_{(K)}\varphi_{(K)} \cdot \int_{X_0}^{X} \frac{g_\xi l_\xi}{l_{X_0}}\, e^{\int_{\xi}^{X} \rho_1 dz}\, d\xi$$

Las reservas relativas en el momento K serán:

$$^{(\sigma_1)}\overline{\gamma}_K = \int_{X_0}^{X_1} \pi_{(X_0,\, t)}\, e^{-\int_{X_0}^{X} \nu dz}\, d_X \cdot \int_{X_0}^{X} \frac{g_\xi l_\xi}{l_{X_0}}\, e^{\int_{\xi}^{X} \rho_1 dz}\, d\xi$$

El análisis de los diferentes casos nos conduce:

1. Modelo estático: Con $\nu = \Psi = 0$ será:

a) Reparto $\sigma_1 = 0$; $^{(\sigma_1)}\overline{\gamma}_K = 0$.
b) Capitalización $\sigma_1 = 1$ y por tanto $\rho_1 = \delta$.

$$^{(\sigma_1)}\overline{\gamma}_K = \int_{X_0}^{X_1} \pi_{(X_0,\, t)}\, d_X \int_{X_0}^{X} \frac{g_\xi l_\xi}{l_{X_0}}\, e^{\delta(X - \xi)} d\xi$$

$$= \int_{X_0}^{X_1} \pi_{(X_0,\, t)}\, e^{\delta(X - X_0)} dx \int_{X_0}^{X} \frac{g_\xi l_\xi}{l_{X_0}}\, e^{-\delta(\xi - X_0)} d\xi$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \pi_{(x_0,\, t)} e^{\delta(x - x_0)} \overline{a}^{(\delta)}_{x_0 : \overline{x - x_0}|} \, dx$$

2. Modelo dinámico.

a) Reparto $\sigma_1 = 0$, $\rho_1 = \nu$.

$$^{(0)}\overline{\gamma}_K = \int_{x_0}^{x_1} \pi_{(x_0,\, t)} e^{-\int_{x_0}^{x} \nu dz} \cdot dx \int_{x_0}^{x} \frac{g_\xi l_\xi}{l_{x_0}} e^{\int_{\xi}^{x} \nu dz} d\xi$$

b) Capitalización $\sigma_1 = 1$, $\rho_1 = \delta - \Psi$.

$$^{(1)}\overline{\gamma}_K = \int_{x_0}^{x_1} \pi_{(x_0,\, t)} e^{-\int_{x_0}^{x} \nu dz} dx \cdot \int_{x_0}^{x} \frac{g_\xi l_\xi}{l_{x_0}} e^{\int_{\xi}^{x} (\delta - \Psi) dz} d\xi$$

3) Modelo de estacionaridad relativa.—En este caso al ser $\nu$ y $\Psi$ constantes se tiene que $\rho_1$ también lo es y por tanto $^{(\sigma_1)}\overline{\gamma}_K$ no depende de K.

a) Para tasas de crecimiento $\nu$ y $\Psi$ constantes se tiene que las reservas relativas $^{(\sigma_2)}\widehat{\gamma}_K$ no dependen de K.

Con ello ya tenemos el análisis de las reservas totales relativas:

$$^{(\sigma,\, \sigma_2)}\gamma_{(K)} = {}^{(\sigma_1)}\overline{\gamma}_{(K)} + {}^{(\sigma_2)}\widehat{\gamma}_{(K)}$$

que para el modelo de estacionaridad relativa no dependen de K, es decir,

$$\frac{d^{(\sigma,\, \sigma_2)}\gamma_{(K)}}{dK} = 0$$

b) Reservas para derechos o pensiones en curso.—Con arreglo a lo que precede, estas reservas vienen dadas por:

$$^{(\sigma_2)}\widehat{V}_K = \int_{x_1}^{\omega} \left( \int_{\hat{c}} L_{\xi,\, \tau} \cdot G^{(\xi - x_1,\, \eta)}_{x_1[\tau - (\xi - x_1)]} e^{-\int_{K}^{\tau} \delta dr} d\xi \right) dx$$

siendo

$$\hat{c} \equiv \tau - K = \sigma_2(\xi - X)$$

con

$$X \leqslant \xi < \omega$$

También escribiremos

$$_{(\sigma_2)}\hat{V}_K = \int_{X_1}^{\omega}\int_{X}^{\omega} L_{[(X-\xi)-\alpha]X} \, G^{(\xi - X_1, \eta)}_{\alpha \, \xi} \, e^{-\int_K^{\tau} \delta dr} \, d\xi dx$$

$$= \int_{X_1}^{\omega} d_X \int_{X}^{\omega} \zeta[\tau - (\xi - X_0)] \, \frac{l_\xi}{l_{X_0}} \cdot$$

$$\cdot \varphi[\tau - (1 - \eta)(\xi - X_1)] g_\xi \, e^{-\delta(\tau - K)} d\xi$$

$$= \int_{X_1}^{\omega} d_X \int_{X}^{\omega} \frac{g_\xi l_\xi}{l_{X_0}} \, e^{-\Psi_\rho(K, X, \xi)} \, d\xi$$

siendo

$$\Psi_\rho(K, X, \xi) = \delta(\tau - K) - \ln \zeta[\tau - (\xi - X_0)] -$$

$$- \ln \varphi[\tau - (1 - \eta)(\xi - X_1)]$$

$$= \delta\sigma_2(\xi - X) - \ln \zeta[K + \sigma_2(\xi - X) - (\xi - X_0)] -$$

$$- \ln \varphi[K + \sigma_2(\xi - X) - (1 - \eta)(\xi - X_1)]$$

$$= \int_X^{\xi} [\delta\sigma_2 - \nu(\sigma_2 - 1) - \Psi(\sigma_2 + \eta - 1)] \, dz -$$

$$- l\zeta[K - (X - X_0)] -$$

$$- l\varphi[K - (1 - \eta)(X - X_1)]$$

$$= \int_X^{\xi} \rho_2(K, X, Z) dz - l\zeta[K - (X - X_0)] -$$

$$- l\varphi[K - (1 - \eta)(X - X_1)]$$

$$= \int_{X}^{\xi} \rho_2(K, X, Z)dz + \int_{X_0}^{X} \nu dz + \int_{X_1}^{X} \Psi(1 - \eta)dz -$$

$$- l\zeta_{(K)} - l\varphi_{(K)}$$

por tanto,

$$^{(\sigma_2)}\hat{V}_K = \int_{X_1}^{\omega} \zeta_{(K)}\varphi_{(K)} \frac{l_X}{l_{X_0}} e^{-\int_{X_0}^{X} \nu dz} \cdot e^{-\int_{X_1}^{X} \Psi(1 - \eta)dz} \cdot a_X^{(\rho_2)} \cdot d_X$$

Las reservas relativas serán:

$$^{(\sigma_2)}\hat{\gamma}_K = \int_{X_1}^{\omega} \frac{l_X}{l_{X_0}} e^{-\int_{X_0}^{X} \nu dz - \int_{X_1}^{X} \Psi(1-\eta)dz} \cdot \bar{a}_X^{(\rho_2)} d_X =$$

$$= \int_{X_1}^{\omega} {}_{X_1 - X_0}E_{X_0}^{(\nu)} \cdot {}_{X - X_1}E_{X_1}^{(\nu + \Psi(1-\eta))} \bar{a}_X^{(\rho_2)} d_X$$

El análisis es ahora, el siguiente:

1. Modelo estático.—Siendo $\nu = \Psi = 0$ se tiene:

a) Reparto $\sigma_2 = 0$

$$^{(0)}\hat{\gamma}_K = 0$$

b) Capitalización $\sigma_2 = 1$. Será:

$$^{(1)}\hat{\gamma}_K = \int_{X_1}^{\omega} \frac{l_X}{l_X} \bar{a}_X^{(\delta)} d_X$$

2. Modelos dinámicos.—También distinguiremos:

a) Sistema de reparto ($\sigma_2 = 0$). Según sea la adaptación de las pensiones se tiene:

Para $\eta = 0$ será $\rho_2 = \nu + \Psi$, luego:

$$ {}^{(0)}\hat{\gamma}_{(K)} = \int_{x_1}^{\omega} {}_{x_1 - x_0}E^{(\nu)}_{x_0} \cdot {}_{x - x_1}E^{(\nu+\Psi)}_{x_1} \cdot \bar{a}^{(\nu+\Psi)}_{x} d_x = $$

$$ = \int_{x_1}^{\omega} {}_{x_1 - x_0}E^{(\nu)}_{x_0} \cdot {}_{x - x_1}/\bar{a}^{(\nu-\Psi)}_{x_1} \cdot d_x $$

Para $\eta = 1$ será $\rho_2 = \nu - \Psi$, luego:

$$ {}^{(0)}\hat{\gamma}_{(K)} = \int_{x_1}^{\omega} {}_{x_1 - x_0}E^{(\nu)}_{x_0} \cdot {}_{x - x_1}E^{(\nu)}_{x_1} \cdot \bar{a}^{(\nu-\Psi)}_{x} d_x $$

$$ = \int_{x_1}^{\omega} {}_{x - x_0}E^{(\nu)}_{x_0} \cdot \bar{a}^{(\nu-\Psi)}_{x} d_x $$

b) Sistema de Capitalización ($\sigma_2 = 1$).—Según sea la adaptación de las pensiones.

Para $\eta = 0$ será $\rho_2 = \delta$, luego:

$$ {}^{(1)}\hat{\gamma}_{(K)} = \int_{x_1}^{\omega} {}_{x_1 - x_0}E^{(\nu)}_{x_0} \cdot {}_{x - x_1}E^{(\nu+\Psi)}_{x_1} \cdot \bar{a}^{(\delta)}_{x} d_x $$

Para $\eta = 1$ será $\rho_2 = \delta - \Psi$, luego:

$$ {}^{(1)}\hat{\gamma}_{(K)} = \int_{x_1}^{\omega} {}_{x_1 - x_0}E^{(\nu)}_{x_0} \cdot {}_{x - x_1}E^{(\nu)}_{x_1} \cdot \bar{a}^{(\delta-\Psi)}_{x} d_x = $$

$$ = \int_{x_1}^{\omega} {}_{x - x_0}E^{(\nu)}_{x_0} \cdot \bar{a}^{(\delta-\Psi)}_{x} d_x $$

## 8.—TASAS DE EVOLUCION GLOBAL

1. Para la población.—Para un momento $\tau$ definiremos:

$$\overline{L}_{\tau} = \int_{X_0}^{\omega} L_{\xi,\tau}\, d\xi =$$

$$= \int_{X_0}^{X_1} L_{\xi,\tau}\, d\xi + \int_{X_1}^{\omega} L_{\xi,\tau}\, d\xi$$

y como una tasa de evolución global:

$$\overline{\nu}_{(\tau)} = \frac{d \log \overline{L}_{\tau}}{d\tau}$$

con lo cual

$$\overline{L}_{\tau} = \overline{L}_{X_0}\, e^{\int_{X_0}^{\tau} \overline{\nu}(\tau) d\tau}$$

Relación con la función $\zeta(t)$:

$$\overline{L}_{\tau} = \int_{X_0}^{\omega} \zeta[\tau - (\xi - X_0)] \frac{l_{\xi}}{l_{X_0}}\, d\xi$$

derivando con respecto a $\tau$ será:

$$\frac{d\overline{L}_{\tau}}{d\tau} = \int_{X_0}^{\omega} \frac{d\zeta_{\xi}}{d\tau} \cdot \frac{l_{\xi}}{l_{X_0}}\, d\xi = \int_{X_0}^{\omega} \zeta \cdot \left[\frac{d \log \zeta}{d\tau}\right] \cdot \frac{l_{\xi}}{l_{X_0}}\, d\xi$$

siendo

$$\overline{\nu}_{(\tau)} = \frac{\dfrac{d\overline{L}_{\tau}}{d\tau}}{\overline{L}_{\tau}} =$$

$$= \frac{\displaystyle\int_{x_0}^{\omega} \zeta \left( \frac{d \log \zeta}{d\tau} \right) \cdot \frac{l_\xi}{l_x}\, d\xi}{\displaystyle\int_{x_0}^{\omega} \zeta \cdot \frac{l_\xi}{l_{x_0}}\, d\xi} =$$

$$= \frac{d \log \overline{\zeta}}{d\tau}$$

2) Para los salarios:

$$\overline{G}_\tau = \int_{x_0}^{x_1} G_{\xi,\,\tau}\, d_\xi$$

$$\overline{\Psi}_{(\tau)} = \frac{d \log \overline{G}_\tau}{d\tau}$$

siendo

$$\overline{G}_\tau = \overline{G}_{x_0}\, e^{\int_{x_0}^{\tau} \overline{\Psi}(\tau) d\tau}$$

Por el mismo camino se puede demostrar:

$$\overline{\Psi}_{(\tau)} = \frac{\partial \log \overline{\varphi}}{\partial \tau}$$

## 9.—RESERVAS GLOBALES

Reservas matemáticas en base de tasas de evolución global.—Utilizando las notaciones siguientes:

$\pi_t^{(0,\,0)}$ = Prima que cubre las prestaciones en el momento t.

$\pi_t^{(\sigma_1,\,\sigma_2,\,\eta)}$ = Prima que se ingresa en el momento t con arreglo al sistema $(\sigma_1, \sigma_2)$ y la adaptación $\eta$.

$\delta$ = Tasa de interés.

$\Gamma_t = \overline{L_t} \cdot \overline{G_t}$ = Volumen de cotizaciones en t.

$\gamma_{(K)}^{(\sigma_1, \sigma_2, \eta)}$ = Reservas matemáticas relativas en (O, K).

Para establecer la ecuación diferencial que capta el equilibrio dinámico del sistema es preciso tener en cuenta que las tasas globales de crecimiento de la población y de los salarios juegan el papel de un interés negativo, por tanto:

$$\frac{d\gamma_{(t)}^{(\sigma_1, \sigma_2, \eta)}}{dt} = (\delta - \overline{\nu}_{(t)} - \overline{\Psi}_{(t)})\gamma_{(t)}^{(\sigma_1, \sigma_2, \eta)} + \\ + \pi_t^{(\sigma_1, \sigma_2, \eta)} - \pi_t^{(0, 0)}$$

integrando se tiene:

$$\gamma_{(K)}^{(\sigma_1, \sigma_2, \eta)} = e^{\int_0^K [\delta - \overline{\nu}(\tau) - \overline{\Psi}(\tau)]d\tau} \cdot$$

$$\cdot \left[ \gamma_{(0)}^{(\sigma_1, \sigma_2, \eta)} + \int_0^K e^{-\int_0^t [\delta - \overline{\nu}(\tau) - \overline{\Psi}(\tau)]d\tau} [\pi_t^{(\sigma_1, \sigma_2, \eta)} - \pi_t^{(0, 0)}]dt \right]$$

Cuando $\gamma_{(0)}^{(\sigma_1, \sigma_2, \eta)} = 0$ se tiene:

$$\gamma_{(K)}^{(\sigma_1, \sigma_2, \eta)} = \int_0^K e^{\int_t^K [\delta - \overline{\nu}(\tau) - \overline{\Psi}(\tau)]d\tau} \cdot [\pi_t^{(\sigma_1, \sigma_2, \eta)} - \pi_t^{(0, 0)}]dt =$$

$$= \int_0^K e^{\int_t^K \delta d\tau} \cdot \frac{\Gamma_t}{\Gamma_K} [\pi_t^{(\sigma_1, \sigma_2, \eta)} - \pi_t^{(0, 0)}]dt$$

Para el modelo de estacionaridad relativa será $\gamma^{(\sigma_1, \sigma_2, \eta)}_{(K)}$ constante.

Efectuaremos el siguiente análisis:

1. Modelo estático.—Suponiendo $\bar{\nu} = \bar{\Psi} = 0$ se tiene:

$$\frac{d\gamma^{(\sigma_1, \sigma_2)}_{(t)}}{dt} = \delta\gamma^{(\sigma_1, \sigma_2)} + \pi^{(\sigma_1, \sigma_2)}_t - \pi^{(0, 0)}_t$$

con lo cual la cotización será:

$$\pi^{(\sigma_1, \sigma_2)}_t = \pi^{(0, 0)}_t + \left(\frac{d\gamma^{(\sigma_1, \sigma_2)}}{dt} - d\gamma^{(\sigma_1, \sigma_2)}_{(t)}\right)$$

a) Sistema de reparto: $(\sigma_1, \sigma_2) = (0, 0)$

$$\gamma^{(0, 0)}_{(t)} = 0$$

$$\pi^{(\sigma_1, \sigma_2)}_t = \pi^{(0, 0)}_t$$

Si el sistema comienza con un fondo V (como es corriente en un régimen de pensiones) el cual se mantiene constante, entonces la cotización puede venir disminuida en los intereses del mismo, es decir:

$$\pi^{(0, 0)}_t - \delta V$$

b) Sistema de capitalización $(\sigma_1, \sigma_2) = (1, 1)$.—En este caso se tiene:

$$\pi^{(1, 1)}_t = \pi^{(0, 0)}_t + \left(\frac{\delta\gamma^{(1, 1)}_{(t)}}{dt} - \delta\gamma^{(1,1)}_{(t)}\right) =$$

$$= \pi^{(0, 0)}_t + \pi^S_{(t)}$$

cuyo segundo sumando es la prima de ahorro tal que:

$$\gamma^{(1, 1)}_{(t)} = \int_0^t e^{\delta(t-\tau)}\pi^S_{(\tau)} d_\tau = \int_0^t e^{\delta(t-\tau)}(\pi^{(1, 1)}_{(\tau)} - \pi^{(0, 0)}_{(\tau)}) d\tau$$

Para
$$\frac{d\gamma^{(1,1)}}{dt} = 0$$
será
$$\pi_t^{(1,1)} = \pi_t^{(0,0)} - \delta\gamma_{(t)}^{(1,1)}$$

c) Sistema de reparto de capitales de cobertura $(\sigma_1, \sigma_2) = (0, 1)$.—Tendremos:

$$\pi_{(t)}^{(0,1)} = \pi_t^{(0,0)} + \frac{d\gamma_{(t)}^{(0,1)}}{dt} - \delta\gamma^{(0,1)} =$$
$$= \pi_t^{(0,0)} + \pi_t^{s}$$

el segundo sumando es la prima de ahorro de las pensiones o derechos en disfrute.

$$\therefore \quad \gamma_{(t)}^{(0,1)} = \int_0^t e^{\delta(t-\tau)}\left[\pi_{(\tau)}^{(0,1)} - \pi_\tau^{(0,0)}\right] d\tau$$

Para
$$\frac{d\gamma_{(t)}^{(0,1)}}{dt} = 0$$
será
$$\pi_t^{(0,1)} = \pi_t^{(0,0)} - \delta\gamma_{(t)}^{(0,1)}$$

2. Modelos dinámicos.—En general la descomposición de la cotización será:

$$\pi_t^{(\sigma_1,\sigma_2,\eta)} = \pi_t^{(0,0)} + \left(\frac{d\gamma^{(\sigma_1,\sigma_2,\eta)}}{dt} - \delta\gamma_{(t)}^{(\sigma_1,\sigma_2,\eta)}\right) +$$
$$+ (\bar{\nu}_{(\tau)} + \bar{\Psi}_{(\tau)})\gamma_{(t)}^{(\sigma_1,\sigma_2,\eta)} =$$

=Prima de reparto+Prima de ahorro+Corrección dinámica

a) Sistema de reparto $(\sigma_1, \sigma_2) = (0, 0)$.—Se tiene

$$\pi_t^{\gamma} = \pi_t^{(0,0)} + \frac{d\gamma^{(0,0,\eta)}}{dt} + (\bar{\nu}_{(t)} + \bar{\Psi}_{(t)})\gamma_t^{(0,0,\eta)}$$

Suponiendo que $\frac{d\gamma}{dt} = 0$, y que las cotizaciones vienen dadas, se tiene

$$\gamma_{(t)}^{(0,\,0,\,\eta)} = \frac{\pi^{\gamma} - \pi^{0}}{\bar{\nu}_{(t)} + \bar{\Psi}_{(t)}}$$

Para un modelo de estacionaridad relativa, se puede escribir:

$$V_{(t)} = (\pi^{\gamma} - \pi^{0})\, \bar{a}_{\overline{\infty}|\rho}$$

con

$$\rho = \bar{\nu} + \bar{\Psi}$$

b) Sistema de capitalización $(\sigma_1, \sigma_2) = (1, 1)$.

$$\pi_{(t)}^{(1,\,1)} = \pi_{t}^{(0,\,0)} + \frac{d\gamma^{(1,\,1)}}{dt} - \delta\gamma_{(t)}^{(1,\,1)} +$$

$$+ (\bar{\nu}_{(t)} + \bar{\Psi}_{(t)})\gamma_{(t)}^{(1,\,1)}$$

en el supuesto de que $\frac{d\gamma^{(1,\,1)}}{dt} = 0$, se tiene

$$\pi^{(1,\,1)} = \pi^{(0,\,0)} + (\bar{\nu}_{(t)} + \bar{\Psi}_{(t)} - \delta)\gamma_{(t)}^{(1,\,1)}$$

Para $\bar{\nu} + \bar{\Psi} > \delta$, será $\pi^{(1,\,1)} > \pi^{(0,\,0)}$.

Para $\bar{\nu} + \bar{\Psi} < \delta$, será $\pi^{(1,\,1)} < \pi^{(0,\,0)}$.

Para $\bar{\nu} + \bar{\Psi} = \delta$, será $\pi^{(1,\,1)} = \pi^{(0,\,0)}$.

c) Sistema de reparto de capitales de cobertura $(\sigma_1, \sigma_2) = (0, 1)$.

$$\pi_{t}^{(0,\,1)} = \pi_{t}^{(0,\,0)} + \frac{d\gamma_{(t)}^{(0,\,1)}}{dt} - \delta\gamma_{(t)}^{(0,\,1)} +$$

$$+ (\bar{\nu}_{(t)} + \bar{\Psi}_{(t)})\gamma_{(t)}^{(0,\,1)}$$

en el supuesto de que $\frac{d\gamma^{(0,1)}}{dt} = 0$, se tiene

$$\pi_t^{(0,1)} = \pi_t^{(0,0)} + (\bar{\nu}_{(t)} + \bar{\Psi}_{(t)} - \delta)\gamma_{(t)}^{(0,1)}$$

donde cabe distinguir los tres casos anteriores.

Lo que precede nos lleva a la conclusión de que la afirmación clásica según la cual todos los sistemas financieros, exigen, en media, los mismos ingresos ya no se puede mantener cuando estamos ante modelos de estacionaridad relativa.

Grado de capitalización.—Este concepto ha sido introducido por Coppini (1) y Kaiser (2). Se define como:

$$\chi_t^{(\sigma_1, \sigma_2, \eta)} = \frac{^{(\sigma_1, \sigma_2)}V_{(t)}}{^{(1,1)}V_{(t)}} =$$

$$= \frac{^{(\sigma_1, \sigma_2)}\gamma_{(t)}}{^{(1,1)}\gamma_{(t)}}$$

que naturalmente cumple

$$0 \leqslant \chi_t^{(\sigma_1, \sigma_2, \eta)} \leqslant 1$$

Tomando los valores medios en las ecuaciones de las reservas, se tiene:

$$\chi_t^{(\sigma_1, \sigma_2, \eta)} = \frac{\bar{\pi}_t^{(\sigma_1, \sigma_2, \eta)} - \pi_t^{(0,0,\eta)}}{\bar{\pi}_t^{(1,1,\eta)} - \pi_t^{(0,0,\eta)}}$$

que también nos permite escribir la interesante relación:

$$\pi_t^{(\sigma_1, \sigma_2, \eta)} = \chi_t^{(\sigma_1, \sigma_2, \eta)}\bar{\pi}_t^{(1,1,\eta)} + (1 - \chi_t^{(\sigma_1, \sigma_2, \eta)})\pi_t^{(0,0,\eta)}$$

En el modelo de estabilidad relativa la función $\chi_t$ no depende del tiempo.

---

(1) Coppini, M. A.: *Sul grado di capitalizzazione dei sistemi finanziari in uso nei fondi pensioni.* Roma. 1960.

(2) Kaiser, E.: Art. citado.

Coeficiente de exceso.—Representado por ${}^{(\sigma_1, \sigma_2, \eta)}F_{(t)}$ los fondos relativos necesarios para los gastos no cubiertos por las cotizaciones siguiendo a Kaiser el coeficiente de exceso será:

$$ {}^{(\sigma_1, \sigma_2, \eta)}\varepsilon_{(t)} = \frac{{}^{(\sigma_1, \sigma_2, \eta)}\gamma_{(t)}}{{}^{(\sigma_1, \sigma_2, \eta)}F_{(t)}} = $$

$$ \frac{{}^{(\sigma_1, \sigma_2, \eta)}\gamma_{(t)}\delta}{\pi_t^{(0,\,0)} - \pi_t^{(\sigma_1, \sigma_2, \eta)}} $$

Durante los comienzos del sistema es corriente que $\varepsilon > 1$. Pero cuando se alcanza la plena eficacia del sistema si continúa $\varepsilon > 1$ el exceso se transforma en hipertrofia (Kaiser).

Cuando se trata de un modelo de estabilidad relativa como:

$$ (\delta - \Psi - \nu)\gamma_{(t)} + \pi_t^{(\sigma_1, \sigma_2, \eta)} - \pi_t^{(0,\,0)} = 0 $$

se tiene:

$$ {}^{(\sigma_1, \sigma_2, \eta)}\varepsilon = \frac{\delta}{\delta - \Psi - \nu} $$

que resulta ser independiente del sistema.

Tasa de utilización de los ingresos.—Se define como:

$$ {}^{(\sigma_1, \sigma_2, \eta)}R = \frac{\pi_t^{(0,\,0)}}{\delta\gamma_{(t)} + \pi^{(\sigma_1, \sigma_2, \eta)}} $$

lo cual deberá ser uno a la larga.

Para el modelo de estabilidad relativa se tiene:

$$ {}^{(\sigma_1, \sigma_2, \eta)}R = \frac{1}{1 + \left(1 - \frac{\pi^{(\sigma_1, \sigma_2, \eta)}}{\pi^{(0,\,0)}}\right) \frac{\nu + \Psi}{\delta - \nu - \Psi}} $$

Llegado este momento ya podemos enunciar lo que Kaiser (1) llama el Teorema Central del actuariado social: Para el modelo de estabilidad relativa las reservas y tasas de cotización relativas así como las tres funciones con ellas relacionadas resultan invariantes en el tiempo.

---

(1) KAISER, E.: Art. citado, pág. 47.

# BIBLIOGRAFIA

(Además de los trabajos citados)

AMMETER, H.: *Funding of retirement income.* XVII C. I. Actuarios.

— "Über die Aguivalenz von Finanzierungssystemen in offener Kasse". *Bol. Ass. Act. Suizos,* abril 1963.

COPPINI, M. A.: *Financial systems for pension funds involving wage-variations.* XVI C. I. Actuarios.

HAGSTROEM, K. G.: *National pension schemes: necessity of investement.* XVII C. I. Actuarios.

KAISER, E.: *Variation wirtschaftsstatistischer Rechnungsgrundlagen in der Rentenversicherungs.* XVI C. I. Actuarios.

— "Demographische Aspekte des Gastarbeiterproblems in mathematischer Formulierung". *Bol. Ass. Act. Suizos,* 30 abril 1967.

WÜNSCHE, G.: *Zur Deutung der Umlageprämie in der Pensionsversicherung.* XVI C. I. Actuarios.

— *Zur Vorausschätzung finanzieller Bealustungen durch flexible Pensionsrenten.* III C. I. S. S. Madrid, 1962.

— "Strukturanalyse der Verfahren zur Rentenfinanzierung". *BLATTER,* abril 1964.