La diversificación de una Cartera de Valores

Por

Dr. EUGENIO PRIETO PEREZ

Catedrático de la Universidad Autónoma de Madrid

1. ANALISIS Y GESTION DE CARTERAS DE VALORES

La problemática de la dirección financiera está sujeta a un interesante proceso de evolución, caracterizado por un enfoque analítico cada vez más acusado y del que apenas si había vestigios importantes hace veinte años.

En los textos de teoría de las finanzas que siguen esta tendencia, prácticamente no se abordan los aspectos institucionales y descriptivos, pues se pone el acento en los razonamientos de tipo económico y, en la elaboración de conceptos y modelos que puedan ser utilizados eficazmente en la toma de decisiones.

Una de las características del nuevo enfoque es la simplicidad de las hipótesis de partida y la formulación de los fenómenos en términos medibles, elaborando modelos adecuados para realizar predicciones o para la toma de decisiones. Los modelos en tanto que son esquemas simplificados que interpretan un fenómeno financiero, consideran solamente las regularidades y aspectos característicos verdaderamente fundamentales de aquél.

Dentro de esta línea la teoría del análisis y gestión de carteras de valores, debe integrar, al menos, las cuestiones siguientes:

— Análisis de valores.
— Análisis y selección de carteras.
— La gestión de una cartera.

a las que nos referiremos brevemente.

1.1. *Análisis de valores.*

El fin último del análisis y valoración de valores es llegar a determinar la función de distribución de la rentabilidad de un cierto valor.

Representado por ξ la variable aleatoria tanto de rendimiento de un cierto título valor T, se trata de determinar

$$F(x) = P_r(\xi < x); \qquad \forall \times \in R$$

Conocida *F(x)* la rentabilidad esperada vendría dada por:

$$\mu = E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot dF(x)$$

y la varianza

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 \cdot dF(x)$$

En general se toma *la varianza como medida del riesgo.* El riesgo se define como la *posibilidad de una pérdida.* Ahora bien, nuestras *exigencias van más allá de una definición y concretamente en el análisis de valores necesitamos una medida para el mismo;* en consecuencia, y dado que los títulos valores son apreciados por sus rendimientos, y, que un rendimiento inferior a la *rentabilidad esperada es decepcionante,* o lo que es lo mismo, podemos postular que:

«$\forall\ x < \mu$ el inversor sufre pérdidas».

Suele denominarse semivarianza del rendimiento a

$$\int_{-\infty}^{\mu} (x - \mu)^2 \cdot dF(x)$$

y a la raíz cuadrada

$$\sqrt{\int_{-\infty}^{\mu} (x - \mu)^2 \, dF(x)}$$

semidesviación y, evidentemente, es una medida del riesgo financiero.

Como es sabido, la varianza es una medida de la dispersión de la totalidad de la distribución de probabilidad, o sea,

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot dF(x)$$

Su raíz cuadrada σ, es la *desviación típica.*

Para distribuciones de probabilidad simétricas sería *equivalente un análisis del riesgo de los títulos valores que se base en la varianza* a *otro que se base en la semivarianza.*

Por esta razón se utiliza la varianza como medida del riesgo. Las razones de la preferencia son claras:

— Nos son más familiares los métodos estadísticos que operan con la varianza.

— Se puede admitir la simetría de la distribución de probabilidad de los rendimientos.

Nos proponemos ahora la cuestión de la elección por un individuo entre dos clases de títulos T_1 y T_2, caracterizados respectivamente, por:

	Rendimiento esperado	Desviación típica
T_1 :	μ_1	σ_1
T_2 :	μ_2	σ_2

A tal efecto, podemos razonar en los siguientes términos:

El inversor considerado asocia a cada combinación (μ, σ) una utilidad $u = U(\mu, \sigma)$ de modo que si:

$$\begin{aligned} U(\mu_1, \sigma_1) > U(\mu_2, \sigma_2) \quad &\Rightarrow \quad T_1 \succ T_2 \\ U(\mu_1, \sigma_1) = U(\mu_2, \sigma_2) \quad &\Rightarrow \quad T_1 \sim T_2 \\ U(\mu_1, \sigma_1) < U(\mu_2, \sigma_2) \quad &\Rightarrow \quad T_1 \prec T_2 \end{aligned}$$

La función $U(\mu, \sigma)$ se conoce con el nombre de función de utilidad. Esta nos da a conocer las preferencias del inversor que la adopta. La representación gráfica de una función de utilidad $U(\mu, \sigma)$ suele hacerse a través de un mapa de *curvas de indiferencia.* Una curva de indiferencia es el lugar geométrico de los puntos (μ, σ) que proporcionan la misma utilidad a un cierto inversor. La figura 1 proporciona las curvas de indiferencia de la función de utilidad $u = U(\mu, \sigma)$ correspondientes a índices de utilidad $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Definición

Se denominan utilidades marginales de la función de utilidad $U(\mu, \sigma)$, respecto de μ y σ respectivamente, a:

$$\frac{\partial U}{\partial \mu} \quad \text{y} \quad \frac{\partial U}{\partial \sigma}$$

Cuando es $(\partial U/\partial \sigma) < 0$, *diremos que el inversor tiene* un comportamiento caracterizado *por la aversión al riesgo,* término que significa que *prefiere el título valor de menor riesgo* (desviación típica o varianza) *entre los de igual rentabilidad* (μ).

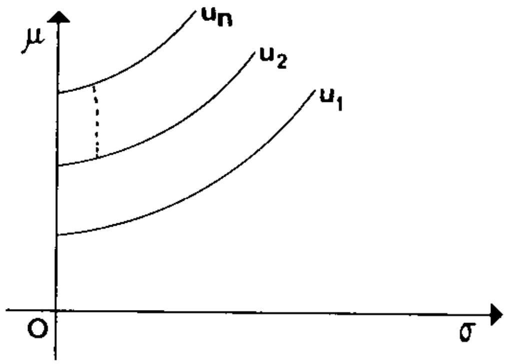


Figura 1
Mapa de curvas de indiferencia de la función de utilidad $u = U(\mu, \sigma)$

Si fuera $(\partial U/\partial \sigma) > 0$, *el comportamiento del inversor es de preferencia por el riesgo.*

1.2. *Análisis y selección de carteras.*

Una cartera de valores es algo más que la suma de los distintos títulos que la constituyen. En efecto, en ella se contempla a cada título no aisladamente, sino en relación con los demás que integran la cartera. A continuación procederemos al análisis de las características de una cartera, en relación con la *rentabilidad y el riesgo.*

a) *Correlación entre el rendimiento de los títulos valores.* Sean los títulos $T_1, T_2, \ldots, T_n$, a los que podemos asociar, respectivamente, las variables rendimientos:

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$$

En general entre

$$\xi_i \text{ y } \xi_j, \qquad i \neq j, \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

existe un cierto grado de dependencia, que mediremos a través del coeficiente de correlación.

Si denotamos por ρ_{ij} el coeficiente de correlación entre ξ_i y ξ_j tenemos:

$$\rho_{ij} = \frac{\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j)}{\sigma_i \cdot \sigma_j} = \frac{E[(\xi_i - \mu_i)(\xi_j - \mu_j)]}{\sigma_i \cdot \sigma_j} \qquad [1]$$

El coeficiente de correlación cumple la propiedad:

$$-1 < \rho_{ij} < 1$$

Cuando $\rho_{ij} = +1$, los rendimientos de T_i y T_j se hallan correlacionados rígida y positivamente; se mueven en la misma dirección y al mismo tiempo.

Si $\rho_{ij} = 0$, los rendimientos de T_i y T_j no están correlacionados, no muestran tendencia alguna a seguir el uno al otro.

Si $\rho_{ij} = -1$, los rendimientos de los títulos T_i y T_j varían rígida y negativamente.

En lo que sigue denotaremos por σ_{ij} a la $\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j)$
De [1] se deduce:

$$\sigma_{ij} = \rho_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j$$

Nótese que si $i = j$, es $\sigma_{ij} = \sigma_i^2$

b) *Descripción matemática de una cartera de valores.*—En la teoría de carteras se describe *por el rendimiento de sus componentes* y por la composición de la misma que se recoge matemáticamente mediante un vector

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

en donde

$$\lambda_i \,(i = 1, 2, \ldots, n)$$

es la proporción que en la cartera participan los títulos T_i, esto es, representa el peso o nivel de participación del título T_i en el valor total de la cartera. Evidentemente se verifica:

$$0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1; \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

Suponiendo que la cartera está constituida por

Títulos:	T_1	T_2	...	T_n
Participación:	λ_1	λ_2	...	λ_n
Rentabilidad esperada:	μ_1	μ_2	...	μ_n
Desviación típica:	σ_1	σ_2	...	σ_n

y representando por μ y σ respectivamente el rendimiento esperado y la desviación típica de la cartera $\mathcal{C}$ encontramos que:

— Al rendimiento de la cartera podemos asociarle la variable aleatoria

$$\xi = \lambda_1 \cdot \xi_1 + \lambda_2 \cdot \xi_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \xi_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \xi_i$$

y en consecuencia

$$\mu = E(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot E(\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \mu_i$$

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= E(\xi - \mu)^2 = E[(\lambda_1 \cdot \xi_1 + \lambda_2 \cdot \xi_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \xi_n) - (\lambda_1 \cdot \mu_1 + \lambda_2 \cdot \mu_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \mu_n)]^2 = \\
&= E\,[\lambda_1 (\xi_1 - \mu_1) + \lambda_2 \cdot (\xi_2 - \mu_2) + \ldots + \lambda_n \cdot (\xi_n - \mu_n)]^2 = \\
&= E\left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j (\xi_i - \mu_i)(\xi_j - \mu_j)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \cdot \lambda_j \cdot \sigma_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \cdot \lambda_j \cdot \rho_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \cdot \sigma_i^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \cdot \lambda_j \cdot \sigma_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \cdot \sigma_i^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \cdot \lambda_j \cdot \rho_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma
\end{aligned}$$

En resumen:

— El rendimiento esperado de una cartera es la media ponderada de los rendimientos esperados de los n componentes de la misma.

— La varianza de una cartera es la medida del riesgo de la misma y viene dada por la suma ponderada de las n varianzas (peso de ponderación los correspondientes λ_i), más las $n^2—n$ covarianzas. La desviación típica de la cartera de títulos es:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \cdot \sigma_i^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \cdot \lambda_j \cdot \rho_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j}$$

Debido a la dependencia entre las variables aleatorias asociadas al rendimiento de los títulos, puestas de manifiesto a través de las covarianzas y al hecho de que la varianza de la cartera dependa de ellas el interés *porque un determinado título T_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ forme o no parte de una cartera* $\mathcal{C}$ dependerá no sólo de μ_i y σ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sino también de las relaciones de dependencia con los distintos componentes de la cartera.

La Teoría de la Inversión en ambiente de certeza *señala que un inversor que pretenda maximizar su utilidad deberá invertir todos sus recursos en aquel activo que le proporcione el mayor tanto de rendimiento* (1). *Como veremos esta proposición deja de ser cierta en un ambiente de riesgo, en donde lo único que puede maximizar el inversor es la utilidad esperada, no lo que realmente obtendrá puesto que es desconocido.*

La utilidad esperada de una cartera $\mathcal{C}$, admitiremos que será una función de μ y σ, o sea:

$$u = U(\mu, \sigma)$$

c) *Carteras eficientes.*

Siguiendo a Harry Markowitz diremos que *una cartera de valores* $\mathcal{C}$ *es eficiente* cuando para un *rendimiento esperado* μ *dado, corresponde varianza,* σ^2 *mínima o bien, cuando su rentabilidad es máxima para una varianza dada* (2). El objetivo de un análisis de carteras —afirman J. C. Francis y S. H. Archer— es la determinación *del conjunto de las eficientes.* Existen diferentes procedimientos para su determinación, a algunas de las cuales nos referiremos a continuación.

El problema a resolver consiste en hallar la cartera de *mínima varianza* sujeta a las condiciones siguientes:

— Que la *rentabilidad esperada* de la cartera sea una prefijada μ^*. Esta condición se formula matemáticamente así:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \mu_i = \mu^*$$

— Que se verifique

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \qquad \text{con} \qquad \lambda_i > 0; \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

(1) Véase, por ejemplo, E. Prieto Pérez: «Teoría de la Inversión». I.C.E. Ediciones 1973.

(2) Véase H. Markowitz: «Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments». J. Wiley, 1959.

Este es un problema de programación cuadrática cuya solución es un vector $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ que determina la cartera eficiente para el nivel de rendimiento μ^*. Resolviendo el problema de programación cuadrática anterior $\forall\ \mu^* \varepsilon\ I(a, b)$, en donde I es el campo de variación de μ^*. Evidentemente, la operatividad de este procedimiento es escasa cuando no se disponen de un *ordenador y de los correspondientes programas ya confeccionados para el desarrollo del algoritmo de la programación cuadrática* (3).

El modelo de H. Markowitz exige disponer de la información siguiente:

— Rendimientos esperados de los distintos valores:

$$\mu_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

— Varianzas y covarianzas de los rendimientos:

$$\sigma_{ij} \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

Esta información puede obtenerse a partir de datos históricos o bien estimados subjetivamente. «Si los datos históricos son exactos y se espera que las condiciones futuras se asemejen a las del período en que se obtuvieron —escribe J. C. Francis y S. H. Archer— pueden constituir la mejor estimación del futuro» (4). Ahora bien, si no se dan estas condiciones y las estimaciones subjetivas proceden de expertos, estas pueden ser preferibles a las que procedan de los datos históricos.

El problema planteado puede resolverse recurriendo al método de los multiplicadores de Lagrange. En efecto, la función de Lagrange correspondiente al problema a resolver, sin tener en cuenta las restricciones de no negatividad $(\lambda_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n)$ es:

$$\psi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \cdot \lambda_j \cdot \sigma_{ij} + \theta_1 \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \mu_i - \mu^* \right] + \theta_2 \cdot \left[\sum_{i=j}^{n} \lambda_i - 1 \right]$$

en donde θ_1 y θ_2 son los denominados multiplicadores de Lagrange. El problema se reduciría a minimizar ψ.

(3) Los programas son accesibles al público. Llevan el título de Portfolio Selection Program y concretamente está descrito en el manual de I. B. M. titulado Portfolio Selection for I. B. M. 1.401. También existe el programa para la I. B. M. 7.090.

(4) Véase J. C. Francis y S. E. Archer: «Análisis y Gestión de Carteras de Valores». I. C. E. Ediciones 1977.

Las condiciones necesarias de máximo o mínimo son:

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1} = 2\lambda_1 \cdot \sigma_{11} + 2\lambda_2 \cdot \sigma_{12} + \ldots + 2\lambda_n \cdot \sigma_{1n} + \mu_1 \theta_1 + \theta_2 = 0 \\
\dfrac{\partial \varphi}{\partial \lambda_2} = 2\lambda_1 \cdot \sigma_{21} + 2\lambda_2 \cdot \sigma_{22} + \ldots + 2\lambda_n \cdot \sigma_{2n} + \mu_2 \theta_1 + \theta_2 = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\dfrac{\partial \varphi}{\partial \lambda_n} = 2\lambda_1 \cdot \sigma_{n1} + 2\lambda_2 \cdot \sigma_{n2} + \ldots + 2\lambda_n \cdot \sigma_{nn} + \mu_n \theta_1 + \theta_2 = 0 \\
\dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta_1} = (\lambda_1 \cdot \mu_1 + \lambda_2 \cdot \mu_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \lambda_n \cdot \mu_n) - \mu^* = 0 \\
\dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta_2} = (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \lambda_n) - 1 = 0
\end{array}\right\} \qquad [1]$$

El sistema [1] tiene $(n+2)$ ecuaciones y otras tantas incógnitas. Este sistema puede escribirse en forma matricial así:

$$A \cdot X = b \qquad [2]$$

en donde

$$A = \begin{bmatrix}
2\sigma_{11} & 2\sigma_{12} & \ldots & 2\sigma_{1n} & \mu_1 & 1 \\
2\sigma_{21} & 2\sigma_{22} & \ldots & 2\sigma_{2n} & \mu_2 & 1 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
2\sigma_{n1} & 2\sigma_{n2} & \ldots & 2\sigma_{nn} & \mu_n & 1 \\
\mu_1 & \mu_2 & \ldots & \mu_n & 0 & 0 \\
1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mu^* \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si el determinante de A es distinto de cero ($|A| \neq 0$), tiene matriz inversa y si la denotamos por A^{-1} nos permitirá escribir:

$$X = A^{-1} \cdot b \qquad [3]$$

que nos proporciona la solución. Esta nos da los pesos de ponderación $\lambda_i (i = 1, 2, \ldots, n)$, en función de μ^* en la forma:

$$\lambda_i = c_i + d_i \cdot \mu^*; \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad [4]$$

Puede demostrarse que la solución es *un mínimo*. Aquí no entraremos en esta cuestión. Los que esten interesados en la demostración pueden consultar el trabajo de A. D. Martin: «MATHEMATICAL PROGRAMMING OF PORTFOLIO SELECTIONS». Management Science, 1955.

EJEMPLO:

Sean los valores T_1 y T_2 cuyas características se indican:

	Rentabilidad esperada	Desviación típica
T_1:	μ_1	σ_1
T_2:	μ_2	σ_2

La covarianza entre la rentabilidad de T_1 y T_2 es σ_{12}.

En este caso, tendríamos:

$$\varphi = \lambda_1^2 \cdot \sigma_1^2 + \lambda_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 2\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \sigma_{12} + \\ + \theta_1 \cdot [\lambda_1 \cdot \mu_1 + \lambda_2 . \mu_2 - \mu^*] + \theta_2 \cdot [\lambda_1 + \lambda_2 - 1]$$

Para obtener los valores de λ_1 y λ_2 que minimizan φ, basta resolver el sistema:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1} &= 2\lambda_1 \cdot \sigma_1^2 + 2\lambda_2 \cdot \sigma_{12} + \theta_1 \cdot \mu_1 + \theta_2 = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_2} &= 2\lambda_1 \cdot \sigma_{12} + 2\lambda_2 \cdot \sigma_2^2 + \theta_1 \cdot \mu_2 + \theta_2 = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_1} &= \lambda_1 \cdot \mu_1 + \lambda_2 \cdot \mu_2 - \mu^* = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_2} &= \lambda_1 + \lambda_2 - 1 = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2\sigma_1^2 & 2\sigma_{12} & \mu_1 & 1 \\ 2\sigma_{12} & 2\sigma_2^2 & \mu_2 & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu^* \\ 1 \end{bmatrix}$$

El sistema proporciona:

$$\lambda_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2\sigma_{12} & \mu_1 & 1 \\ 0 & 2\sigma_2^2 & \mu_2 & 1 \\ \mu^* & \mu_2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2\sigma_1^2 & 2\sigma_{12} & \mu_1 & 1 \\ 2\sigma_{12} & 2\sigma_2^2 & \mu_2 & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{\mu^* \cdot \begin{vmatrix} 2\sigma_{12} & \mu_1 & 1 \\ 2\sigma_2^2 & \mu_2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2\sigma_{12} & \mu_1 & 1 \\ 2\sigma_2^2 & \mu_2 & 1 \\ \mu_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2\sigma_1^2 & 2\sigma_{12} & \mu_1 & 1 \\ 2\sigma_{12} & 2\sigma_2^2 & \mu_2 & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}} = c_1 + d_1 \cdot \mu^*$$

siendo

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2\sigma_{12} & \mu_1 & 1 \\ 2\sigma_2^2 & \mu_2 & 1 \\ \mu_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta}; \qquad d_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2\sigma_{12} & \mu_1 & 1 \\ 2\sigma_2^2 & \mu_2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

en donde Δ es el determinante del sistema;

$$\lambda_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2\sigma_1^2 & 0 & \mu_1 & 1 \\ 2\sigma_{12} & 0 & \mu_2 & 1 \\ \mu_1 & \mu^* & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} =$$

$$= \frac{-\mu^* \cdot \begin{vmatrix} 2\sigma_1^2 & \mu_1 & 1 \\ 2\sigma_{12} & \mu_2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2\sigma_1^2 & \mu_1 & 1 \\ 2\sigma_{12} & \mu_2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = c_2 + d_2 \cdot \mu^*$$

Siendo

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2\,\sigma_1^2 & \mu_1 & 1 \\ 2\,\sigma_{12} & \mu_2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} \; ; \qquad d_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2\,\sigma_1^2 & \mu_1 & 1 \\ 2\,\sigma_{12} & \mu_2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

Si los datos fueran:

$$\begin{array}{lll} \mu_1 = 0{,}05\,; & \mu_2 = 0{,}15\,; & \\ & & \sigma_{12} = 0 \\ \sigma_1 = 0{,}2\;\;; & \sigma_2 = 0{,}4\;\;; & \end{array}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0{,}08 & 0 & 0{,}05 & 1 \\ 0 & 0{,}32 & 0{,}15 & 1 \\ 0{,}05 & 0{,}15 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\lambda_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0{,}05 & 1 \\ 0 & 0{,}32 & 0{,}15 & 1 \\ \mu^* & 0{,}15 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0{,}08 & 0 & 0{,}05 & 1 \\ 0 & 0{,}32 & 0{,}15 & 1 \\ 0{,}05 & 0{,}15 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}} = 1{,}5 - 10 \cdot \mu^*$$

$$\lambda_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0{,}08 & 0 & 0{,}05 & 1 \\ 0 & 0 & 0{,}15 & 1 \\ 0{,}05 & \mu^* & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0{,}08 & 0 & 0{,}05 & 1 \\ 0 & 0{,}32 & 0{,}15 & 1 \\ 0{,}05 & 0{,}15 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}} = -0{,}50 + 10 \cdot \mu^*$$

Efectivamente se verifica que:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = (1{,}5 - 10 \cdot \mu^*) + (-0{,}50 + 10 \cdot \mu^*) = 1$$

Para $\mu^* = 0{,}07$, la cartera eficiente tendría la composición siguiente:

$$\lambda_1 = 0{,}8\,; \qquad \lambda_2 = 0{,}2$$

Al hacer variar μ^* se obtienen el *conjunto de las carteras* eficientes, que se representa en la figura 2.

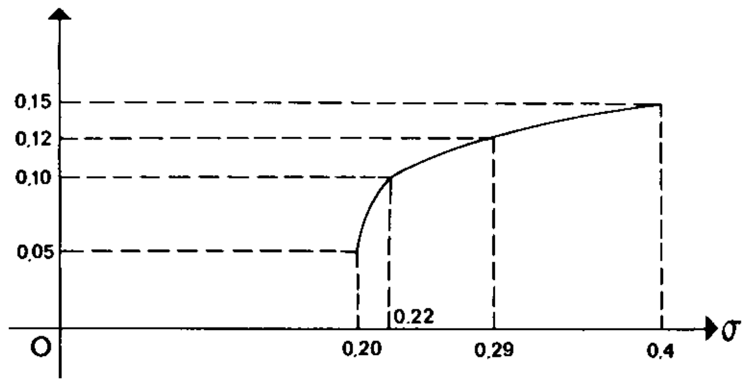


Figura 2

Para

$\mu^* = 0{,}05$	es	$\lambda_1 = 1;$	$\lambda_2 = 0$
$\mu^* = 0{,}10$	es	$\lambda_1 = 0{,}5;$	$\lambda_2 = 0{,}5$
$\mu^* = 0{,}12$	es	$\lambda_1 = 0{,}30;$	$\lambda_2 = 0{,}70$
$\mu^* = 0{,}15$	es	$\lambda_1 = 0;$	$\lambda_2 = 1$

Nótese que:

$$\lambda_1 = 1{,}5 - 10 \cdot \mu^* < 0; \qquad \forall\, \mu^* > 0{,}15$$
$$\lambda_2 = -0{,}5 + 10 \cdot \mu^* < 0; \qquad \forall\, \mu^* < 0{,}05$$

EL CASO DE QUE NO SE CUMPLAN LAS RESTRICCIONES $\lambda_i \geqslant 0$

Este algoritmo presenta el inconveniente de que, para ciertos valores del parámetro μ^* algunos componentes del vector $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, son negativos, es decir, no se cumplen las restricciones $\lambda_i \geqslant 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) (5).

(5) Las soluciones que incluyan componentes negativos carecen de realismo. En muchos casos *la legislación vigente* prohibe este tipo de carteras (carteras con apalancamiento).

Una manera de salvar este inconveniente es la siguiente:

Se dan valores crecientes al parámetro μ^* hasta que para un cierto μ_0 una componente de $\vec{\lambda}$ sea nula. Supongamos que sea λ_s En este punto se interrumpe el análisis y se procede a eliminar la fila y la columna s-ésima en la matriz A y el elemento s-ésimo en los vectores X y b. Sean A_1, X_1 y b_1 las matrices reducidas. La nueva ecuación matricial que permite generar carteras eficientes será, por tanto:

$$X_1 = A_1^{-1} \cdot b_1 \qquad [3']$$

A partir de [3'], *seguimos dando valores a* μ^* *superiores a* μ_0 *y generando carteras eficientes en las que no interviene el activo s-ésimo. Este conjunto de* carteras eficientes corta al *conjunto eficiente original, allí donde el peso para el valor de* μ^* *para el cual el título* T_S *fue eliminado.* Por tanto, el análisis continúa. *Aplicando reiteradamente este procedimiento, se obtendrán carteras eficientes en las que la participación en ellas de los títulos que la integran son positivos o nulos.*

d) *Carteras cuasi-eficientes.*

Entendemos por carteras cuasi-eficientes aquellas que, sin ser eficientes, se encuentran muy próximas a la frontera delimitada por las carteras eficientes. Existen métodos simplificados que generan conjuntos de carteras cuasi-eficientes. Estos métodos sacrifican precisión a cambio de simplificar considerablemente los cálculos.

Entre los modelos de este tipo, el más conocido es el Modelo diagonal de Sharpe (6), que pasamos a exponer.

MODELO DIAGONAL DE SHARPE

El modelo de H. Markowitz que acabamos de exponer presenta importantes problemas de estimación de los datos básicos y también de cálculo. Por esta razón H. Markowitz ha sugerido que la relación entre títulos pueda ser representada por correlacionarse cada título con algún índice, y entonces derivar las covarianzas implícitamente de esta nueva relación. Por ejemplo. el rendimiento de un título individual T puede expresarse así:

$$\xi_T = a_1 + b_1 \cdot I + u_1$$

(6) Véase William F. Sharpe: «A Simplified Model for Portfolio Analysis». Management Science, 1963

donde

$$\begin{aligned} \xi_T &= \text{Variable aleatoria rendimiento del título } T \\ a_1, b_1 &= \text{Parámetros} \\ I &= \text{Nivel del índice} \\ u_1 &= \text{Variable aleatoria residual.} \end{aligned}$$

De manera análoga, el rendimiento de otro título T' puede expresarse así mismo:

$$\xi_{T'} = a_2 + b_2 \cdot I + u_2$$

Admitiremos varios supuestos en relación con u_1, u_2 e I. En efecto, admitiremos que:

— Las covarianzas entre las variables residuales y entre el índice y cada una de las variables residuales son cero, o sea:

$$\text{cov}\,(u_1, u_2) = 0; \qquad \text{cov}\,(u_1, I) = 0; \qquad \text{cov}\,(u_2, I) = 0$$

— La esperanza matemática de las variables residuales es nula:

$$E\,(u) = 0$$

En estas condiciones resulta:

$$\begin{aligned} E\,(\xi_T) &= a_1 + b_1 \cdot E\,(I) \\ E\,(\xi_{T'}) &= a_2 + b_2 \cdot E\,(I) \\ D^2\,(\xi_T) &= b_1^2\,\text{var}\,(I) + \text{var}\,(u_1) \\ D^2\,(\xi_{T'}) &= b_2^2\,\text{var}\,(I) + \text{var}\,(u_2) \end{aligned}$$

Finalmente, la covarianza entre las variables ξ_T y $\xi_{T'}$ correspondientes a los rendimientos de los títulos T y T', viene dada por:

$$\text{cov}\,(\xi_T; \xi_{T'}) = b_1 \cdot b_2 \cdot \sigma_1^2$$

De acuerdo con cuanto antecede la formulación del problema de cartera podría hacerse así:

El rendimiento de la cartera vendría dado por:

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \xi_i$$

que puede reescribirse así:

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot (a_i + b_i \cdot I + u_i) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \xi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (a_i + u_i) + \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot b_i \right) I \qquad [5]$$

El primer término del segundo miembro de [5] indica el rendimiento de la inversión formada por n títulos, de los cuales el i-ésimo tiene un rendimiento:

$$\xi_i = a_i + u_i; \qquad E(\xi_i) = a_i; \qquad \mathrm{var}(\xi_i) = \sigma^2$$

El segundo término del segundo miembro de [5] puede ser considerado como el rendimiento de una inversión en el índice. Haremos

$$\lambda_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot b_i$$

Entonces

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot (a_i + u_i) + \lambda_{n+1} \cdot (a_{n+1} + u_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \cdot (a_i + u_i)$$

en donde

$$E(I) = a_{n+1} \qquad \text{e} \qquad I = a_{n+1} + u_{n+1}$$

siendo u_{n+1}, una varible residual $N(0, \sigma_{n+1})$.

El rendimiento esperado de la cartera viene dado por

$$\mu = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \cdot a_i$$

y la varianza de la cartera por

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^2 \cdot \sigma_i^2$$

Nótese que

$$\sigma_i^2 = \sigma^2; \qquad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sigma_i^2 = \sigma^2_{n+1} \qquad \text{para} \qquad i = n + 1$$

La denominación de modelo DIAGONAL cobra sentido al considerar que ahora la matriz de varianzas y covarianzas es:

$$\begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma^2_{n+1} \end{bmatrix}$$

La inversa de una matriz diagonal es mucho más sencilla de obtener, que si no lo es.

El problema de la cartera eficiente consiste pues, en minimizar

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^2 \cdot \sigma_i^2 + \theta_1 \cdot \left[\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \cdot \mu_i - \mu^* \right] +$$

$$+ \theta_2 \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i - 1 \right] +$$

$$+ \theta_3 \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot b_i - \lambda_{n+1} \right]$$

Como hemos señalado la aportación de William F. Sharpe es importante, porque simplifica extraordinariamente los cálculos ya que:

1.° No es necesario el cálculo de las covarianzas entre los rendimientos de los diferentes valores.

2.° Al ser la matriz de varianzas y covarianzas diagonal, se requieren muchas menos operaciones para invertirla.

Sharpe señala que un ordenador IBM 7090 necesita, aproximadamente treinta y tres minutos para seleccionar un conjunto de carteras eficientes entre 100 valores diferentes. El mismo problema se resolvería en medio minuto cuando se emplea el modelo diagonal. Otra ventaja y, esta estimamos que mucho más importante, es que la capacidad de memoria de un ordenador IBM-7090, permite para un modelo no diagonal, seleccionar carteras entre como máximo 249 valores, pues bien, con el modelo diagonal podría seleccionar carteras entre 2.000 valores.

MODELOS DE INDICES MULTIPLES

Con las palabras de J. C. Francis y S. H. Archer, podríamos decir que «entre la sencillez del modelo diagonal de Sharpe de un solo índice y el modelo de Markowitz de las covarianzas completas encontramos una amplia gama de otros posibles. Pueden emplearse dos, tres, cuatro o más índices. En efecto, el modelo de Markowitz que utiliza la matriz de varianzas-covarianzas completa sin ninguna simplificación, hace uso de cada título como índice. Como es lógico, cuanto mayor sea el número de índices utilizados menos sencillo es el modelo y más costoso su cálculo» (7).

Podría pensarse que un modelo de índices múltiples dará lugar a la obtención de una cartera *cuasi-eficiente* más próxima a la *cartera eficiente*, que si se emplea un modelo de *un solo índice*. En este caso, la mayor precisión lograda podría compensar un *mayor gasto*, sin embargo, los estudios empíricos realizados no permiten llegar a esta conclusión.

En los modelos de índices múltiples se hace uso de varios índices, pero, el rendimiento de cada título de la cartera se supone relacionada sólo con uno de ellos. A continuación, consideramos un modelo con dos índices.

Supongamos que los títulos T_i $(i=1, 2, \dots, m)$ están relacionados con el índice I_1 y que los títulos restantes $(i=m+1, m+2, \dots, n)$, lo están con el índice I_2. Así, pues,

$$\xi_i = \begin{cases} a_i + b_i \cdot I_1 + u_i & \text{si} \quad i \leqslant m \\ a_i + b_i \cdot I_2 + u_i & \text{si} \quad i > m \end{cases}$$

La varianza del i-ésimo título es:

$$\sigma_i^2 = b_i^2 \cdot \sigma^2_{n+1} + \sigma_u^2 \qquad \text{si} \quad i \leqslant m$$
$$\sigma_i^2 = b_i^2 \cdot \sigma^2_{n+2} + \sigma_u^2 \qquad \text{si} \quad i > m$$

siendo

σ^2_{n+1} = varianza del índice I_1

σ^2_{n+2} = varianza del ídice I_2

σ_u = varianza de la variable residual u.

Las covarianzas serán:

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} b_i\, b_j\, \sigma^2_{n+1} & \text{si} \quad i \leqslant m \quad \text{y} \quad j \leqslant m \\ b_i\, b_j \operatorname{cov}(I_1, I_2) & \text{si} \quad \begin{cases} i \leqslant m & \text{y} \quad j > m \\ i > m & \text{y} \quad j \leqslant m \end{cases} \\ b_i\, b_j\, \sigma^2_{n+2} & \text{si} \quad i > m \quad \text{y} \quad j > m \end{cases}$$

(7) J. C. Francis y S. H. Archer, obra citada.

Con el símbolo, cov (I_1, I_2) representamos la covarianza entre I_1 e I_2. Si esta covarianza entre los índices es *cero,* los *resultados se reducen a los del modelo diagonal simple.* En efecto, bastaría hacer:

$$\lambda_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot b_i$$

$$\lambda_{n+2} = \sum_{j=m+1}^{n} \lambda_i \cdot b_i$$

Con lo que, la esperanza matemática de rendimientos de la cartera, vendrá dada por:

$$\mu = \sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i \cdot \mu_i$$

en donde

$$\mu_{n+1} = E(I_1) \qquad \text{y} \qquad \mu_{n+2} = E(I_2)$$

La varianza de la cartera es:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i^2 \cdot \sigma_i^2$$

Para hallar el conjunto de las *carteras eficientes,* se exige minimizar la función de Lagrange:

$$\begin{aligned}\varphi = \sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i^2\, \sigma_i^2 + \theta_1 & \left[\sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i\, \mu_i - \mu^*\right] + \\ & + \theta_2 \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot 1\right] + \\ & + \theta_3 \cdot \left[\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, b_i - \lambda_{n+1}\right] + \\ & + \theta_3 \cdot \left[\sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i\, b_i - \lambda_{n+2}\right]\end{aligned}$$

La ventaja del modelo diagonal se conserva. Sin embargo no puede asegurarse que el modelo de índices múltiples sea superior desde el ángulo de *la eficiencia* de la cartera al modelo diagonal de un solo índice (8).

e) *Carteras cuasi-eficientes cuando existen restricciones legales.*

Con frecuencia las legislaciones nacionales exigen a los Fondos de Inversión *que en un solo valor no* pueden invertir más del α por 100 del total de sus recursos. En estos casos, el problema de la cartera óptima se puede formular así:

Denotemos por $\lambda_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ la proporción del total de recursos invertida en el activo T_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. La exigencia anterior implica que

$$\lambda_i \leqslant \alpha; \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Esta restricción complica enormemente los cálculos, de modo que, el método de resolución de Lagrange ya no es aplicable y en consecuencia el conjunto de las carteras eficientes, sólo puede obtenerse reçurriendo a la programación cuadrática paramétrica. William F. Sharpe en un trabajo titulado: «A Linear Programming Algorithm for Mutual Fund Portfolio Selection» (9), aborda el problema mediante un modelo simplificado, que proporciona magníficos resultados y es muy operativo, ya que el problema termina reduciéndolo a un problema de Programación lineal.

Consideremos ahora una cartera $\mathcal{C}$ tal que incluya m títulos $(m < n)$, de modo que

$$\begin{array}{lll} \lambda_i = 1/m; & \forall\, T_i \in \mathcal{C} & \\ \lambda_i = 0; & \forall\, T_i \notin \mathcal{C}; & i = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

Para simplificar la exposición admitiremos que los T_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ se han ordenado y los que están incluidos en $\mathcal{C}$ ocupan los primeros lugares, o sea:

$$\begin{array}{ll} \lambda_i = 1/n; & \forall\, i = 1, 2, \ldots, m \\ \lambda_i = 0; & \forall\, i = m+1, m+2, \ldots, n \end{array}$$

Al expresar el rendimiento del título T_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ en función del índice del mercado I, tenemos:

$$\xi_i = a_i + b_i \cdot I + u_i$$

---

(8) Véase el trabajo de K. J. Cohen y J. A. Pogue: «An Empirical Evaluation of Alternative Selection Models». Journal of Business, 1967.

(9) Publicado en Management Science, marzo 1967.

El rendimiento de la cartera $\mathcal{C}$ vendrá dado por:

$$\xi = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \xi_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot (a_i + b_i \cdot I + u_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot (a_i + u_i) + \left(\sum_{i=1}^{m} b_i \cdot \lambda_i \right) \cdot I \qquad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \qquad \xi = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (a_i + u_i) + \lambda_{m+1} \cdot (a_{m+1} + u_{m+1})$$

con sólo hacer

$$\lambda_{m+1} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot b_i; \qquad I = a_{m+1} + u_{m+1}$$

El rendimiento esperado y varianza de la cartera respectivamente, son:

$$\mu = E(\xi) = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i \cdot a_i$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i^2 \cdot \sigma_i^2$$

Tal y como realiza William F. Sharpe (10) consideremos el riesgo originado por las características de los títulos, o sea:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 \cdot \sigma_i^2 = \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2 = \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2}{m} \right)$$

La expresión entre paréntesis representa el valor medio de las varianzas de los m títulos incluidos en la cartera Sin embargo para la cartera considerada en su conjunto, el riesgo es solamente una m-ésima parte. Como señala W. F. Sharpe «esta es una consecuencia importante. Si se poseen 20 títulos, cada uno con idéntica cantidad en dólares (o sea, $m = 20$) *el riesgo de la cartera originado por las características de los títulos constitutivos de la misma será solamente el 5 por 100 del que se asocia al título medio. El prin-*

(10) Véase William F. Sharpe: «A linear Programming Algorithm for Mutual Fund Portfolio Selection» o también en su libro «Teoría de Cartera y del Mercado de Capitales». Edic. Deusto, 1974.

cipio no es nuevo: la diversificación puede reducir en gran parte el riesgo originado por sucesos no correlacionados pero aleatorios».

«Lo contrario también es válido. La diversificación *per se*, aporta pocas ventajas cuando los sucesos están altamente correlacionados» (11).

Partiendo de que

$$\sigma^2 = \lambda^2_{m+1} \cdot \sigma^2_{m+1} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 \cdot \sigma_i^2 = \lambda^2_{m+1} \cdot \sigma^2_{m+1} + \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2}{m} \right)$$

vemos que, cuanto más deversificada es una cartera más pequeño es

$$\frac{1}{m} \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2}{m} \right)$$ en términos absolutos.

Por otra parte

$$\lambda_{m+1} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot b_i = \frac{\sum_{i=1}^{m} b_i}{m}$$

esto es, λ_{m+1} es el promedio de los valores b_i de los títulos constitutivos de la cartera.

Así pues, para una cartera bien diversificada podríamos admitir que:

$$\sigma^2 \simeq \lambda^2_{m+1} \cdot \sigma^2_{m+1} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sigma = \lambda_{m+1}\, \sigma_{m+1} \qquad [6]$$

Evidentemente, todo inversor puede imponer restricciones a $\lambda\, (\underline{\alpha} < \lambda < \bar{\alpha})$ que aseguren un cierto grado de diversificación. Cuando los límites $\underline{\alpha}$ y $\bar{\alpha}$ estén bien elegidos, λ_{m+1} *puede con pleno sentido usarse como una medida del riesgo,* pues, como indica [6], σ, es λ_{m+1} veces la desviación típica del índice del Mercado I.

Resumiendo, en el supuesto de que el modelo diagonal de un solo índice sea adecuado y los límites superiores e inferiores para los pesos de los títulos en la cartera sean suficientemente restrictivos, se puede tomar $\lambda_{m+1} = \beta$, como una *medida del riesgo. A* β *la denominaremos sensibilidad de la cartera.*

Entonces en las condiciones indicadas puede sustituirse la desviación típica por la sensibilidad de la cartera para medir el riesgo de ésta. En este caso, el problema de la obtención de carteras eficientes se reduciría a:

(11) Véase «Teoría de Cartera y del Mercado de Capitales», pág. 160.

Conocidos μ_i y b_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$

se trata de hallar

$$\min \beta = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot b_i$$

sujeto a las restricciones:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \mu_i = \mu^*$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

$$\underline{\alpha}^i \leqslant \lambda_i \leqslant \bar{\alpha}_i; \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

El caso más sencillo es aquél en que la proporción a invertir no puede ser superior a α o sea $\lambda_i < \alpha$ al que hicimos referencia.

El problema de la obtención de carteras eficientes, en los supuestos que venimos considerando se reduce pues a un problema de programación lineal que se puede resolver en todo caso.

2. TEORIA DEL MERCADO DE CAPITALES

Una vez formulada la teoría de la selección de carteras de H. Markowitz parece obligado preguntarse por las consecuencias que en el mercado bursátil traerá aparejado que todos los inversores se comporten de acuerdo con el modelo de Markowitz. Para dar contestación a esta cuestión se desarrolló la correspondiente Teoría del Mercado de Capitales. Así, pues, ésta es la formulación de las consecuencias matemáticas y económicas que se derivan de la teoría de la selección de carteras.

Denominaremos *inversores eficientes de Markowitz* a los que siguen esta teoría y *admitiremos en lo que sigue que todos los inversores lo son, y así mismo, que el mercado es un mercado perfecto (12) y que éste se encuentra en equilibrio.*

La teoría del mercado de capitales trata de predecir la relación entre las variables importantes en el punto de equilibrio; concretamente buscaremos:

1. La relación entre la rentabilidad esperada y el riesgo de las carteras;
2. La relación entre la rentabilidad esperada y el riesgo de los títulos.

(12) Significa que al tanto por ciento de mercado, r, es posible tomar a préstamo y colocar cualquier cantidad de dinero.

La frontera eficiente del conjunto de oportunidad H está constituida por puntos representativos de carteras que dominan a todas las demás incluidas en H. Las carteras eficientes son denominadas también *carteras eficientes de Markowitz,* en reconocimiento del creador del Análisis de Carteras.

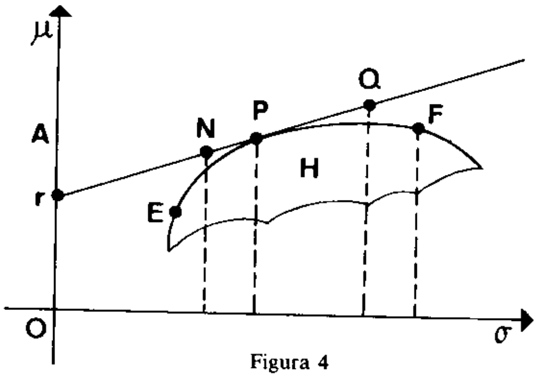


Figura 4

Supongamos ahora que se pueda pedir prestado o prestar cualquier cantidad de dinero al tanto r. En este caso, ya no existe la limitación $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, de modo que si P es para un cierto agente la cartera óptima de entre las que constituyen el conjunto de oportunidad H, la recta $\overline{ANPQ}$ sustituye al segmento $\overline{AP}$, esto es, esta recta representa el conjunto de *carteras que pueden formarse a partir de* A *y* P, *tomando prestado o* prestando dinero al tanto r. La recta $\overline{ANPQ}$ recibe el nombre de LINEA DEL MERCADO DE CAPITALES.

Los inversores *más conservadores prestarán parte de su* dinero, *colocando el resto en* P; *esto ocurre, por ejemplo,* con los inversores que elijan la cartera representada por el punto N de la figura 4. *Los menos conservadores piden préstamos para adquirir títulos* constituyendo una cartera de las características de P; esto ocurre, por ejemplo, con los inversores que elijan la cartera representada por el punto Q de la figura 4.

Nótese que en las *carteras con apalancamiento* (13) *el riesgo es mayor.* En efecto, cuando se pide prestado es λ *negativo;* en consecuencia, si hacemos $\lambda = -l \, (l \geqslant 0)$

$$\sigma = (1 + l)\,\sigma_1 \qquad \Rightarrow \qquad \sigma > \sigma_1$$

Por otra parte, la *línea del mercado de capitales es lineal de ecuación*

$$\mu = r + \left(\frac{\mu_1 - r}{\sigma_1}\right) \cdot \sigma$$

y en consecuencia:

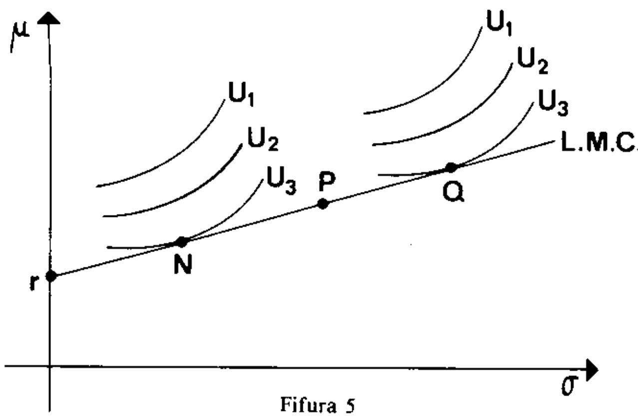
— La ordenada en el origen es r el tanto de interés del mercado de capitales.

(13) Carteras formadas con cantidades tomadas a préstamo.

— *«La pendiente de la línea de mercado —señala W. Sharpe— representa la negociación entre la rentabilidad esperada y el riesgo. La pendiente indica así la rentabilidad esperada que puede obtenerse si se acepta un riesgo adicional. Así mismo, también representa la rentabilidad esperada a la que hay que renunciar para reducir el riesgo. La pendiente puede entenderse, pues, como el precio (medido en la reducción de rentabilidad esperada) de una disminución del riesgo. A este se le llama a menudo (aunque algo inexactamente) el precio del riesgo»* (14).

— Tal y como indica la figura 5, todas las carteras estarán representadas por puntos situados sobre la línea del mercado de capitales (L.M.C.).

Las curvas de indiferencia *U* del inversor, alcanzan su más alto índice justamente para las carteras representadas por los puntos *N* y *Q* y en todos los que están sobre L.M.C.



Fifura 5

— Como señalan J. C. Francis y S. H. Archer (15) la decisión de inversión (la de comprar la cartera, representada por el punto *P*) es independiente de la decisión de financiación (prestar al tanto *r* o pedir prestado al mismo tanto). Cada inversor tendría una cartera modelada a sus preferencias en relación con la rentabilidad y el riesgo, diferenciándose en la manera de financiarla.

— Por último hemos de indicar que no es de esperar que la Línea del Mercado de Capitales (L.M.C.) *permanezca inalterada con el transcurso del tiempo.* En efecto, representa la relación existente entre la rentabilidad esperada (μ) y el riesgo (σ) correspondientes a un cierto período. Los parámetros determinantes de la relación lineal entre μ y σ son determinados por la oferta y la demanda y es bien conocido que éstas varian en el transcurso del tiempo. En este sentido en la Teoría del Mercado de Capitales se opera con estimaciones ex-ante.

(14) Véase W. F. Sharpe: «Teoría de Cartera y del Mercado de Capitales», obra ya citada.
(15) Obra citada, pág. 131.

2.2. *La línea del mercado de títulos*

Para las carteras eficientes se da una relación lineal entre rentabilidad esperada (μ) y el riesgo (σ) de la cartera. Esta relación no se da para carteras ineficientes ni para títulos aislados (16). En consecuencia, habrá que encontrar alguna otra medida del riesgo.

Supongamos un mercado de capitales en equilibrio; esto implica que el exceso de demanda es cero para todos los títulos o sea que todos los títulos del mercado pertenecen a alguien. De lo dicho anteriormente se deduce que todos los inversores desean la cartera representada por el punto *P*, que *se constituye en el punto de equilibrio y que deberá contener todos los títulos negociables en las proporciones* λ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ En situación de equilibrio, es el tanto de interés que iguala la oferta y la demanda de fondos prestables.

Hasta la aparición de los primeros trabajos de W. Sharpe, puede decirse que la *teoría sobre el funcionamiento de los mercados financieros tenía como base la hipótesis de previsión perfecta* (ambiente de certeza). *En este supuesto el tanto de interés del mercado es único* y nace de la confrontación entre la oferta y la demanda. Posteriormente, se introduce la denominada *prima de riesgo,* de modo que el precio de un activo financiero cualquiera tiene dos componentes: *el tanto de interés puro, que corresponde al supuesto de que no existe riesgo y, el precio del riesgo o prima de riesgo.* Como afirma R. Cobbaut, «antes de la aportación de W. Sharpe no existía ninguna teoría de la formación del precio del riesgo y esta es precisamente su aportación esencial» (17).

Evidentemente, si todos los inversores se comportan de acuerdo con la Teoría de la Cartera expuesta, todos desean la cartera *P*, que contiene todos los títulos del mercado en las proporciones:

$$\lambda_i^P = \frac{p_i \cdot q_i}{\sum_{i=1}^{N} p_i \cdot q_i}$$

en donde:

p_i = precio de una participación del título T_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$.

q_i = número de participación del título T_i.

Llamaremos a P *cartera del mercado*. La *rentabilidad y la varianza de la cartera del* mercado, son:

$$\mu_P = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^P \cdot \mu_i$$

$$\sigma_P = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \lambda_i^P \cdot \lambda_j^P \cdot \rho_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j$$

(16) La inversión en un solo título *es una cartera ineficiente.*

(17) Véase R. Cobbaut: «La medida de la Perfomance, de una cartera». Incluido en el libro *La inversión bursátil.* Editorial Moneda y Crédito. Madrid, 1974.

Consideremos ahora la distribución de los fondos entre el título T_i y la cartera del mercado P. Denotaremos por λ_i la proporción invertida en T_i y por λ_P la proporción invertida en P. Tenemos:

$$\lambda_i + \lambda_P = 1$$

La rentabilidad esperada para la cartera resultante R es:

$$\mu_R = \lambda_i \cdot \mu_i + \lambda_P \cdot \mu_P$$

y la varianza

$$\sigma^2_R = \lambda_i^2 \cdot \sigma_i^2 + \lambda^2_P \cdot \sigma^2_P + 2\,\lambda_i \cdot \lambda_P \cdot \rho_{iP} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_P$$

Al variar λ_i el punto representativo de la cartera R descubrirá una curva $\widehat{T_i P}$ tal como aparece en la figura 6,

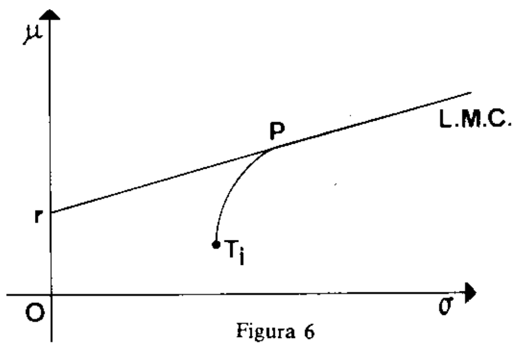


Figura 6

Evidentemente, la forma de la curva dependerá de ρ_{iP}

Teorema

La pendiente de la curva $\widehat{T_i P}$ en el punto P es

$$s = \frac{(\mu_i - \mu_P)\,\sigma_P}{\sigma_{iP} - \sigma^2_P}$$

En efecto, partiendo

$$\begin{aligned}\sigma^2_R &= \lambda_i^2\,\sigma_i^2 + \lambda^2_P\,\sigma^2_P + 2\,\lambda_i\,\lambda_P\,\rho_{iP}\,\sigma_i\,\sigma_P = \\ &= \lambda_i^2\,\sigma_i^2 + (1-\lambda_i)^2\,\sigma^2_P + 2\,\lambda_i\,(1-\lambda_i)\,\sigma_{iP}\end{aligned}$$

tenemos:

$$\frac{\partial\,\sigma_R}{\partial\,\lambda_i} = \frac{\lambda_i\,(\sigma_i^2 + \sigma^2_P - \sigma_{iP}) + \sigma_{iP} - \sigma^2_P}{\sigma_R}$$

Así mismo, dado que

$$\mu_R = \lambda_i \mu_i + (1 - \lambda_i) \mu_P$$

tenemos:

$$\frac{\partial \mu_R}{\partial \lambda_i} = \mu_i - \mu_P$$

Ahora bien, pretendemos calcular

$$\left(\frac{\partial \mu_R}{\partial \sigma_R} \right)_{R=P}$$

entonces, bastará hacer:

$$\frac{\partial \mu_R}{\partial \sigma_R} = \frac{\dfrac{\partial \mu_R}{\partial \lambda_i}}{\dfrac{\partial \sigma_R}{\partial \lambda_i}} = \frac{\mu_i - \mu_P}{\dfrac{\lambda_i (\sigma_i^2 + \sigma^2_P - \sigma_{iP}) + \sigma_{iP} - \sigma^2_P}{\sigma_R}}$$

En el punto *P*, es $\lambda_i = 0$ y $\sigma_R = \sigma_P$, por tanto

$$\left(\frac{\partial \mu_R}{\partial \sigma_R} \right)_{R=P} = \frac{(\mu_i - \mu_P)\, \sigma_P}{\sigma_{iP} - \sigma^2_P} \qquad \text{c. q. d.}$$

La curva $\widehat{T_i P}$ es tangente a la *línea del mercado de capitales* (L.M.C.), de modo que podemos escribir:

$$\frac{(\mu_i - \mu_P)\, \sigma_P}{\sigma_{iP} - \sigma^2_P} = \frac{\mu_P - r}{\sigma_P} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (\mu_i - \mu_P)\, \sigma^2_P = (\mu_P - r) \cdot (\sigma_{iP} - \sigma^2_P)$$

$$\Leftrightarrow \quad \mu_i \sigma^2_P - \mu_P \sigma^2_P = (\mu_P - r)\, \sigma_{iP} - \mu_P \sigma^2_P + r \sigma^2_P$$

$$\Leftrightarrow \quad (\mu_i - r)\, \sigma^2_P = (\mu_P - r)\, \sigma_{iP}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mu_i - r = \frac{\mu_P - r}{\sigma^2_P}\, \sigma_{iP} \qquad [7]$$

La [7] se conoce como LINEA DEL MERCADO DE TITULOS (L.M.T.) y, es importante porque define *la prima de riesgo especifica del valor* T_i como función de tres elementos:

— La prima de riesgo de la *cartera del mercado.*
— La varianza de la cartera del Mercado (σ^2_P)
— La covarianza de los rendimientos del valor T_i y del mercado.

En resumen, *la prima de riesgo del valor* T_i *es una función lineal de su covarianza con el mercado.*

2.3. *Volatilidad.*

La relación $\mu_i - r = \left(\frac{\mu_p - r}{\sigma^2_p}\right)\sigma_{ip}$ puede transformarse en otra que liga la rentabilidad del título $T_i(\xi_i)$ con la rentabilidad de la cartera del mercado (ξ_p). Esta última debe pasar por el punto de coordenadas (μ_p, μ_i)

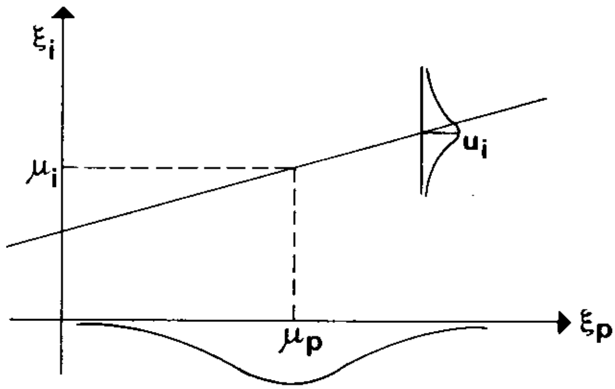


Figura 7

Por definición

$$\sigma_{ip} = E\,[(\xi_i - \mu_i)(\xi_p - \mu_p)]$$

y admitiendo que

$$\xi_i = \alpha_i + \beta_i \cdot \xi_p \quad \Rightarrow \quad \mu_i = \alpha_i + \beta_i \cdot \mu_p$$

resulta

$$\sigma_{ip} = E\,\{[(\alpha_i + \beta_i\,\xi_p) - (\alpha_i + \beta_i\,\mu_p)] \cdot [\xi_p - \mu_p]\} =$$

$$= E\,\{[\beta_i\,\xi_p - \beta_p\,\mu_p] \cdot [\xi_p - \mu_p]\} =$$

$$= \beta_i \cdot \sigma^2_p \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\beta_i = \frac{\sigma_{ip}}{\sigma^2_p}} \qquad [8]$$

La [8] es el tan utilizado *coeficiente beta* del Análisis Financiero.

Una medida adecuada del riesgo de un título es σ_{ip} (*)(18). Ahora bien, como señala W. F. Sharpe, «la noción de covarianza con respecto al mercado carece de un enfoque intuitivo». Por eso, introduciremos el *concepto de volatilidad de la rentabilidad del valor* T_i. La volatilidad nos dice en que medida una variación de ξ_p repercute en ξ_i.

(18) Prima de riesgo $= \mu_i - r = \left(\frac{\mu_p - r}{\sigma^2_p}\right)\sigma_{ip}$

Introduciremos la terminología siguiente:

— Un título se dice *defensivo* cuando β_i es menor que la unidad ($\beta_i < 1$). La lógica de esta denominación es la siguiente: Un incremento del 1 por 100 en la rentabilidad del mercado probablemente implicará un incremento en la rentabilidad del título inferior al 1 por 100. Recíprocamente, una reducción del 1 por 100 en la rentabilidad del mercado implicará posiblemente un descenso inferior al 1 por 100 en la rentabilidad del título; de modo que el inversor tiene una cierta *defensa contra la aparición de una baja importante.* Evidentemente cuanto mayor sea el valor de β_i mayor será su defensa.

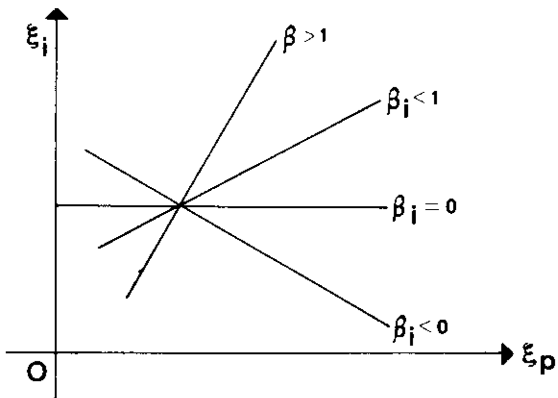


Figura 8

— Por *simetría* denominaremos *agresivo a un título cuyo* β_i *es mayor que la unidad* ($\beta_i > 1$). Cuanto mayor sea el valor de β_i más agresivo es el título.

Puede demostrarse que la *volatilidad de una cartera* es el promedio ponderado de las volatilidades de los títulos que la constituyen, utilizando los λ_i como factores de ponderación.

La línea del mercado de títulos puede expresarse en función de la volatilidad (β_i) En efecto, habíamos obtenido

$$\mu_i - r = \frac{\mu_p - r}{\sigma^2_p}\sigma_{ip} \qquad \text{y} \qquad \beta_i = \frac{\sigma_{ip}}{\sigma^2_p}$$

entonces:

$$\mu_i - r = (\mu_p - r)\beta_i \qquad \Leftrightarrow \qquad \mu_i = r + (\mu_p - r)\beta_i \qquad [9]$$

La [9] muestra que la prima de riesgo del título ($\mu_i - r$) es *proporcional al riesgo medido por la volatilidad* (β_i) La figura 9 recoge esta relación.

Obsérvese que si la rentabilidad del título T_i (ξ_i) está incorrelacionada con el mercado, es

$$\sigma_{iP} = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta_i = 0$$

Por otra parte, si la *correlación fuera rígida y positiva,* sería

$$\sigma_{iP} = \sigma^2_P \quad \Rightarrow \quad \beta_i = 1$$

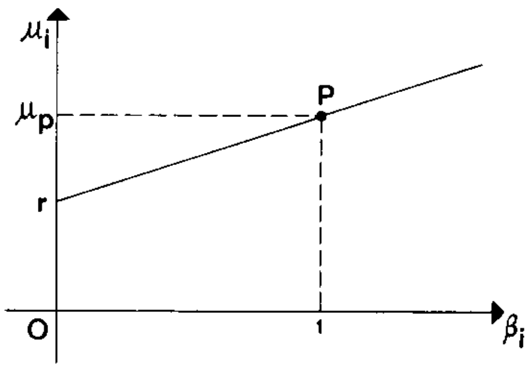


Figura 9

Podemos afirmar, pues, que la línea de Mercado de títulos (L.M.T.) *representa la relación entre la rentabilidad esperada y la volatilidad.*

Otra cuestión a destacar es la siguiente: Entre la rentabilidad ξ_i y ξ_P admitiamos la relación

$$\xi_i = \alpha_i + \beta_i\, \xi_P$$

de modo que la estimación por mínimos cuadrados de α_i y β_i nos permite escribir:

$$\xi_i - \mu_i = \frac{\mu_{iP}}{\sigma^2_P}(\xi_P - \mu_P) \qquad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \qquad \xi_i - \mu_i = \beta_i \cdot (\xi_P - \mu_P)$$

Ahora bien, la [9] nos proporciona

$$\mu_i = r + (\mu_P - r)\,\beta_i$$

por tanto

$$\xi_i = r + (\mu_P - r)\,\beta_i + \beta_i \cdot (\xi_P - \mu_P) = r + \beta_i \cdot (\xi_P - r) \qquad [10]$$

De [10] se deduce que, si $\xi_p = r$ también es $\xi_i = r$ y esta *propiedad* es válida para todo título. La figura 10, recoge esta propiedad.

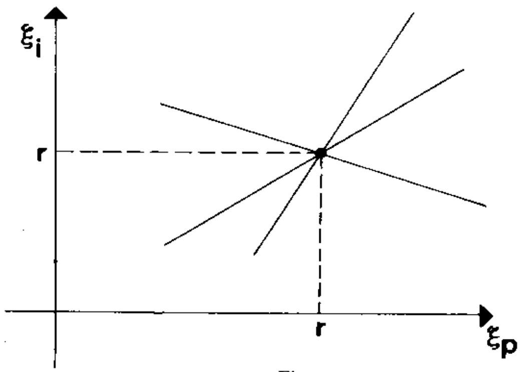


Figura 10

Así mismo, se deduce que a *mayor pendiente de la línea característica, o lo que es lo mismo, a mayor volatilidad, mayor rentabilidad esperada.*

2.4. *Riesgo sistemático y no sistemático*

Hemos supuesto que

$$\xi_i = \alpha_i + \beta_i \, \xi_p$$

pero, la especificación correcta debería ser:

$$\xi_i = \alpha_i + \beta_i \cdot \xi_p + u_i$$

de modo que

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \cdot \sigma^2_p + \sigma^2_u \qquad [11]$$

que podemos en lenguaje ordinario expresar así:

Riesgo total = riesgo sistemático + riesgo no sistemático.

El riesgo *sistemático por consiguiente es aquella parte de la variabilidad de la rentabilidad de un título que se debe a una causa común.* Normalmente es el que tiene por causa los cambios económicos, psicológicos y políticos que afectan a todos los títulos. *Como se desprende de* [11] *la relación entre el riesgo sistemático y la volatilidad es la misma para todos los títulos y carteras:*

$$\text{Riesgo sistemático} = \beta_i^2 \cdot \sigma^2_p$$

El riesgo *no sistemático* tiene como *causas* acontecimientos atribuibles al ente emisor de los títulos tales como nuevas patentes, errores de dirección, huelgas en su seno, etc. Viene medido por la varianza de u_i. Empleando la terminología de Lintner, que es la habitual en la Teoría Estadística, es la *varianza residual.*

Las *carteras eficientes* sólo tienen *riesgo sistemático.* Como hemos dicho se encuentran en la Línea del Mercado de Capitales o lo que es lo mismo la rentabilidad de una cartera eficiente *tiene una correlación rígida* con la cartera del mercado.

Una cartera *con riesgo no sistemático* no es *eficiente,* y desaparecerá cuando el título entre a formar parte de una *cartera eficiente. Luego, podemos decir que «la medida significativa del riesgo de un título es su volatilidad, es decir, su riesgo sistemático»* (19). *El riesgo total de un título no es significativo si el título ha de formar parte de una cartera diversificada; pues el riesgo no sistemático se elimina con la diversificación.*

3. VALORACION DE UNA CARTERA DE VALORES

Con la diversificación de H. Markowitz *es posible minimizar el riesgo sin disminución del rendimiento.* Esto, evidentemente no se asegura con otros criterios sin justificación científica que, en general pueden asegurar una disminución del riesgo, pero con repercusiones en la rentabilidad.

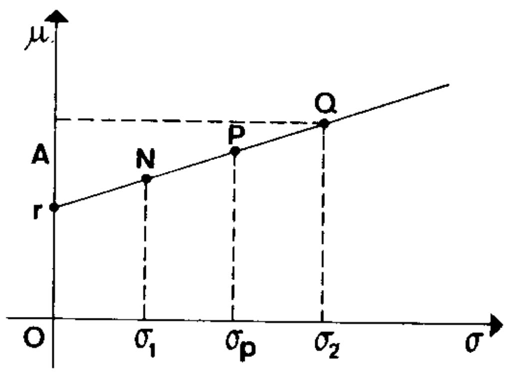


Figura 11

La disversificación afecta al valor de la cartera. En efecto, la línea del mercado de capitales proporciona para cada clase de riesgo, el tanto de valoración. Así, por ejemplo, para la clase de riesgo determinada por σ_1 el tanto de valoración es *i.*

(19) Véase W. F. Sharpe: «Teoría de Cartera y del Mercado de Capitales», pág. 125.

La diferencia de $i—r$ es la prima de riesgo. Entonces, si el rendimiento neto de la cartera fuera *D*, su valor vendría dado por

$$V = \frac{D}{i}$$

Un valor para la cartera superior al de los costos o valores de sus componentes, *es el resultado de la diversificación.* V *es el valor teórico,* pero en la práctica el valor real puede no coincidir con él, entre otras razones por las deficiencias del mercado de capitales. En efecto, de una parte está la incapacidad de los inversores para medir el riesgo, por otra la existencia de los honorarios de los agentes de bolsa, los impuestos, el desconocimiento por parte de los inversores de la Línea del Mercado de Capitales (L. M. C.), etc., *todos ellos tienden a reducir la claridad de las conclusiones* teóricas y justifica la diferencia entre el valor real de la cartera y el valor teórico.