Cálculo del tanto de interés en las rentas ciertas, utilizando como instrumento los números complejos

Por José Antonio Estrugo

El método que damos a conocer tiene un marcado carácter teórico; sin embargo, creemos conveniente su divulgación habida cuenta de lo sencillo de su fundamento y de la aproximación que el mismo consigue, superior al clásico de Baily.

Partiendo del desarrollo en serie del binomio en la expresión

$$a = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \qquad [1]$$

se tiene, simplificando y dividiendo ambos miembros por *n*,

$$\frac{a}{n} = 1 - \frac{(n + 1)}{2}\, i + \frac{(n + 1)\,(n + 2)}{6}\, i^2 - \frac{(n + 1)(n + 2)(n + 3)}{24}\, i^3 + \frac{(n + 1)(n + 2)(n + 3)(n + 4)}{120}\, i^4 \pm \ldots \qquad [2]$$

que podemos escribir en esta otra forma:

$$\alpha_1 = \frac{2}{n + 1}\left(1 - \frac{a}{n}\right) = i - \frac{n + 2}{3}\, i^2 + \frac{(n + 2)\,(n + 3)}{12}\, i^3 - \frac{(n + 2)(n + 3)(n + 4)}{60}\, i^4 \pm \ldots \qquad [3]$$

Se comprende que la expresión más sencilla del segundo miembro de [3] sería $(i;\ ki)$; es decir, una progresión geométrica de primer término i, y de razón ki, puesto que entonces, al ser $\alpha_1 = \frac{i}{1 - ki}$, se obtendría $i = \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1 k}$, mediante una ecuación de primer grado.

La igualdad anterior no será posible conseguirla exactamente en la [3]; pero comprobado por los métodos de Baily y el logarítmico, lo plausible de una aproximación del orden de potencias cuartas de i, debemos intentar lograrlo.

Si aplicamos esta idea directamente al desarrollo dado en [3], resultaría $\alpha_1 = \left(i \cdot - \frac{n+2}{3}\ i\right)$, que sólo coincide en sus dos primeros términos, produciendo un $e_a < Ai^3$ de insuficiente aproximación.

Los anteriores razonamientos nos llevan a la creación de un desarrollo en que intervenga una indeterminada a la que luego le haremos cumplir la condición deseada.

A este objeto, si elevamos ambos miembros de [2] a $\theta/n + 1$, se obtendrá una serie que escrita en la forma [3], sería:

$$\left[1 - \left(\frac{a}{n}\right)^{\frac{\theta}{n+1}}\right]\frac{2}{\theta} = i - \frac{3\theta + n + 5}{12}\ i^2 +$$

$$+ \frac{\theta^2 + (n+5)\theta + 2(n+3)}{24}\ i^3 -$$

$$- \frac{15\theta^3 + 30(n+5)\theta^2 + 5(n^2+34n+97)\theta - 2(n^3 - n^2 - 109n - 251)}{24^2 \cdot 5}\ i^4 \pm \ldots \quad [4]$$

Si ahora hacemos cumplir a θ la condición

$$\left[1 - \left(\frac{a}{n}\right)^{\frac{\theta}{n+1}}\right]\frac{2}{\theta} = \left(i;\ - \frac{3\theta + n + 5}{12}\ i\right) \quad [5]$$

obliga a que se verifique

$$\left(\frac{3\theta + n + 5}{12}\right)^2 = \frac{\theta^2 + (n+5)\theta + 2(n+3)}{24} \quad [6]$$

igualdad que se cumple para

$$\theta = \sqrt{\frac{n^2 - 2n - 11}{3}}\ j = mj \qquad (j = \sqrt{-1}) \qquad [7]$$

De acuerdo con lo indicado y con error menor que términos de potencias cuartas de *i*, podemos escribir

$$\left[1 - \left(\frac{a}{n}\right)^{\frac{mj}{n+1}}\right]\frac{2}{mj} = \frac{i}{1 + \frac{3mj + n + 5}{12}\, i} \qquad [8]$$

y de aquí

$$i = \frac{\left[1 - \left(\frac{a}{n}\right)^{\frac{mj}{n+1}}\right]\frac{2}{mj}}{1 - \left[1 - \left(\frac{a}{n}\right)^{\frac{mj}{n+1}}\right]\frac{2}{mj} \cdot \frac{3mj + n + 5}{12}} \qquad [9]$$

Resultando el primer miembro un valor real y el segundo una expresión compleja, debemos poner de manifiesto su valor, para lo cual agruparemos en un solo término la parte imaginaria dividiendo numerador y denominador por el primero, quedándonos

$$i = \frac{1}{\dfrac{1}{\left[1 - \left(\frac{a}{n}\right)^{\frac{mj}{n+1}}\right]\frac{2}{mj}} - \dfrac{3mj + n + 5}{12}} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{1}{\left[1 - \left(\frac{a}{n}\right)^{\frac{mj}{n+1}}\right]\frac{2}{mj}} - \dfrac{mj}{4} - \dfrac{n + 5}{12}} =$$

$$= \cfrac{1}{\cfrac{mj}{4}\,\cfrac{1+\left(\cfrac{a}{n}\right)^{\frac{mj}{n+1}}}{1-\left(\cfrac{a}{n}\right)^{\frac{mj}{n+1}}} - \cfrac{n+5}{12}}$$

y teniendo en cuenta que $\left(\frac{a}{n}\right)^{\frac{mj}{n+1}} = e^{\frac{mj}{n+1} l \frac{a}{n}} = e^{-\frac{mj}{n+1} l \frac{n}{a}} = e^{-\alpha j}$, se tiene

$$i = \cfrac{1}{\cfrac{mj}{4}\,\cfrac{1+e^{-\alpha j}}{1-e^{-\alpha j}} - \cfrac{n+5}{12}} \qquad \left[\alpha = \frac{m}{n+1}\, l\, \frac{n}{a}\right] \quad [10]$$

Ahora bien

$$\frac{1+e^{-\alpha j}}{1-e^{-\alpha j}} = \frac{1+\cos\alpha - j \operatorname{sen}\alpha}{1-\cos\alpha + j\operatorname{sen}\alpha} =$$

$$= \frac{(1+\cos\alpha - j\operatorname{sen}\alpha)(1-\cos\alpha - j\operatorname{sen}\alpha)}{(1-\cos\alpha + j\operatorname{sen}\alpha)(1-\cos\alpha - j\operatorname{sen}\alpha)} =$$

$$= \frac{-2j\operatorname{sen}\alpha}{2(1-\cos\alpha)} = \frac{-2j\operatorname{sen}\alpha/2\cos\alpha/2}{2\operatorname{sen}^2\alpha/2} =$$

$$= -j \cdot \operatorname{ctg}\alpha/2$$

y sustituyendo este valor en [10], se llega sucesivamente a

$$i = \cfrac{1}{\cfrac{-mj}{4}\, j \operatorname{ctg}\alpha/2 - \cfrac{n+5}{12}} = \qquad [11]$$

$$= \frac{12 \operatorname{tg}\alpha/2}{3m - (n+5)\operatorname{tg}\alpha/2}$$

expresión real, tal como deseábamos.

Si ahora desarrollamos la progresión geométrica y la comparamos con la inicial [4], vemos coincide en sus tres primeros términos y su *diferencia con el cuarto —en el que se anulan los componentes imaginarios—* es

$$e_a < \frac{(n-1)(n+2)(n-7)}{2160} i^4 \qquad [12]$$

señalándonos un error inferior al término del mismo grado que se desprecia en la fórmula de Baily (1).

La [12] nos indica que si $n < 7$, la fórmula [11] da un valor por exceso; si $n > 7$, por defecto y un óptimo resultado para $n = 7$.

Como ejemplo de aplicación, sea calcular el tanto de interés a que ha sido evaluada la renta $a_{\overline{19|}} = 12{,}08532$.

$$n = 19 \qquad 1 \frac{n}{a} = 0{,}3692379$$

$$a = 12{,}08532$$

$$\frac{m}{n+1} 1 \frac{n}{a} = \alpha = 0{,}18822746$$

$$m = \sqrt{104} = 10{,}19804$$

$$\alpha/2 = 0{,}0941373 \sim 5° \; 23' \; 37''$$

$$\frac{m}{n+1} = 0{,}509902 \qquad \text{tg } 5° \; 23' \; 37'' = 0{,}09442$$

$$i = \frac{12 \times 0{,}09442}{30{,}59412 - 2{,}26608} = \frac{1{,}13304}{28{,}32804} = 0{,}039997$$

El tanto exacto es $i = 0{,}04$.

(1) En efecto, dicho término vale $\frac{(n-1)(n+2)(n+3)}{1440} i^4$