Estructura e isomorfismo específicos de la matemática actuarial

Por Francisco BUSQUETS ROCA

En la matemática financiera, así como en la actuarial, se presentan determinadas ecuaciones en diferencias finitas, cuya resolución, especialmente en términos de fácil aplicación, se simplifica si se asimilan a otras de solución conocida. Para precisar términos diremos que al identificarse las *estructuras* de las ecuaciones, por *isomorfismo,* se identifican las soluciones, sin que las palabras estructura e isomorfismo tengan la misma significación que en la matemática moderna.

Veamos dos ejemplos:

A. *Determinar la anualidad constante de amortización de un empréstito con primas de amortización iguales para todos sus títulos.*

Si representamos por N_k^v el número de los N títulos del empréstito que subsisten sin amortizar después del pago de la anualidad k-ésima, y por C e i el capital nominal de cada título y el tipo anual de interés, respectivamente, sabemos que la anualidad constante de amortización a la par en n años, es:

$$a = \mathrm{NC} \frac{1}{a_{\overline{n|}}} \qquad [1]$$

y la descomposición de la $k+1$-ésima de estas anualidades:

$$a = \mathrm{N^v\,C\,i} + (\mathrm{N_k^v} - \mathrm{N_{k+1}^v})\mathrm{C} \qquad [2]$$

ecuación en diferencias finitas cuya solución determinada conduce a [1].

Si llamamos D a la prima de amortización de cada título en el problema propuesto, la descomposición de la $k + 1$-ésima anualidad constante para un empréstito amortizable igualmente en n años y al tipo de interés anual i, será:

$$a' = N'^{v}_{k}\, C\, i + (N'^{v}_{k} - N'^{v}_{k+1})\,(C + D)$$

Con las siguientes sustituciones:

$$C + D = C' \quad ; \quad C\, i = C'\, i' \quad \text{es decir} \quad i' = \frac{C\, i}{C + D}$$

la anterior ecuación pasa a ser:

$$a' = N'^{v}_{k}\, C'\, i' + (N'^{v}_{k} - N'^{v}_{k+1})C'$$

o sea, de idéntica *estructura* que [2].

Luego, la fórmula que proporciona la anualidad que buscamos será:

$$a' = NC' \frac{1}{a_{\overline{n}|}^{i'}}$$

es decir, la de un empréstito amortizable a la par, pero con títulos de capital nominal C' y al tipo i' de interés anual.

B. *Determinar la cuota anual constante necesaria para mantener simultáneamente un título de capitalización de la unidad de capital nominal y un seguro temporal decreciente, tales que, en caso de fallecimiento del suscriptor (asegurado), el valor de liquidación del título (Reserva) y el capital del seguro sumen, para cualquier anualidad, el capital unidad.*

Se trata del viejo problema de canalizar el ahorro por camino distinto que el seguro, que ha sido resuelto por procedimientos diversos. Veamos el nuestro que, si más no, tiene el mérito de la brevedad.

Sean las bases técnicas del título de capitalización:

Tipo de interés anual, i_c.

Recargos: a expresado en tanto por uno sobre el capital, y

$1 - b$ expresado en tanto por uno sobre las cuotas comerciales variables del título, y

π''_x, π''_{x+1}, π''_{x+2}, ..., etc., las primas anuales comerciales del seguro temporal de renovación anual (hemos supuesto que el suscriptor tiene la edad x al contratar conjuntamente ambas operaciones).

La cuota anual conjunta y constante a pagar por el suscriptor (asegurado) se descompondrá en el año k-ésimo, en la siguiente forma:

$$P = \frac{p_k + a}{b} + \pi''_{x+k}\left[1 - S_{k+1}(1 + i_c)^{-\frac{1}{2}}\right] \qquad [3]$$

siendo p_0, p_1, ..., p_k, ..., las cuotas anuales puras sucesivas del título de capitalización y S_{k+1} el capital, o reserva, constituido con las $k + 1$ primeras es decir:

$$S_{k+1} = p_0(1 + i_c)^{k+1} + p_1(1 + i_c)^k + \ldots + p_k(1 + i_c) \qquad [4]$$

La igualdad [3] podemos también escribirla en la siguiente forma:

$$Pb - a = p_k + \pi''_{x+k}\, b\left[1 - S_{k+1}(1 + i_c)^{-\frac{1}{2}}\right] \qquad [5]$$

que, unida a la igualdad [4] forma un sistema de ecuaciones en diferencias finitas difícil de resolver en términos conocidos.

Por otra parte, sabemos que la descomposición en prima de ahorro y prima de riesgo, de la prima pura de la anualidad $k + 1$-ésima de un seguro mixto, es:

$$\pi_x = \pi^a_{x+k} + q_{x+k}(1 + i)^{-\frac{1}{2}}\left[1 - V_{k+1}(1 + i)^{-\frac{1}{2}}\right] \qquad [6]$$

siendo:

$$V_{k+1} = \pi^a(1 + i)^{k+1} + \pi^a_{x+1}(1 + i)^k + \ldots + \pi^a_{x+k}(1 + i) \qquad [7]$$

y π^a_x, π^a_{x+1}, ... las sucesivas primas de ahorro que, para la edad fijada x de entrada en el seguro son sólo funciones del orden de la anualidad.

Para llegar a la identidad de *estructura* entre el sistema [4] [5] y el [7] [6], basta identificar:

$$Pb - a = \pi_k \quad ; \quad p_k = \pi^a_{x+k} \quad ; \quad i_c = i$$

y

$$\pi''_{x+k}\, b = q_{x+k}(1 + i_c)^{-\frac{1}{2}}$$

es decir

$$q_{x+k} = (1 + i_c)^{\frac{1}{2}}\, b\, \pi''_{x+k}$$

El problema planteado se soluciona, pues, para cada edad del suscriptor, determinado $Pb - a$, como la prima anual pura de un seguro mixto de igual duración que el título de capitalización calculada con las tasas de mortalidad $q_{x+k} = b\, \pi''_{x+k}(1 + i_c)^{\frac{1}{2}}$ y al tipo de interés anual i_c.

La determinación de los valores de la reserva matemática de las sucesivas anualidades del seguro mixto, con las bases dadas, permitirá hallar las primas del seguro temporal y, por simples diferencias con P las cuotas comerciales de capitalización.