7

Primas puras

7.1 Primas. Concepto y clasificación

En este capítulo comenzamos el estudio de las primas. De una forma muy general la **prima** es el precio del servicio prestado por el asegurador y desde la perspectiva de éste ha de servir para hacer frente tanto a los costes que se derivan de las prestaciones previstas en la póliza como a los correspondientes a la gestión, captación y mantenimiento del negocio.

Este capítulo lo dedicaremos exclusivamente al estudio de las denominadas **primas puras,** esto es, aquellas que han de hacer frente a los costes derivados de los siniestros previstos en la póliza.

Hemos de realizar una primera distinción entre **primas únicas** y **primas periódicas**. Las primeras consisten en un solo pago en el momento de perfeccionarse el contrato y las primas periódicas implican pagos anuales o de otra periodicidad (a lo largo de este capítulo distinguiremos entre las **primas fraccionarias.** y **fraccionadas**).

De las primas periódicas se dice que son **vitalicias** cuando se pagan hasta el fallecimiento del asegurado, y **temporales** cuando además el pago de primas posee un límite temporal.

Es importante hacer referencia a las denominadas **prima natural** y **prima nivelada.** La prima natural es la corresponde al riesgo de un año. En general las primas pagadas no se corresponden con la **prima natural***, lo que es perfectamente comprensible en los seguros para el caso de muerte en los que, al crecer el riesgo de fallecimiento con la edad, se produciría un gran crecimiento en las primas anuales a pagar. Así, los contratos suelen realizarse a prima constante o variable (pero sin excesiva brusquedad), esto es, **a prima nivelada**, lo que implica normalmente que durante los primeros años se paga una prima superior para después pasar a pagar una inferior a la que se tendría que satisfacer según el riesgo del correspondiente

*Una excepción es el seguro **temporal anual renovable** que se suscribe por un año y puede renovarse anualmente mediante el pago de la prima natural más los correspondientes recargos. En relación con la prima natural véase el ejercicio 8 año.

El empleo de primas niveladas implica la formación de las denominadas **reservas matemáticas**, de enorme relevancia en el negocio asegurador, que estudiaremos en el capítulo siguiente. En el contexto de su estudio surgirán las denominadas **prima de riesgo** y **prima de ahorro**

Finalmente, en el capítulo 9 nos referiremos a la **prima recargada**, **prima de inventario** y **prima comercial** que surgen al sumar a la prima pura distintos recargos propios de la actividad aseguradora.

7.2 Principios de equivalencia

El cálculo de la prima requiere del empleo de algún principio de equivalencia entre las obligaciones de las partes implicadas en el contrato de seguro. Si bien en lo que sigue nos referiremos únicamente al denominado **principio de equivalencia actuarial** por ser el empleado en la práctica, no podemos olvidar que en la literatura actuarial aparecen otros de interés téorico a los que nos referiremos en un apéndice de este capítulo.

7.2.1 Principio de equivalencia actuarial

Para establecer el **principio de equivalencia actuarial** definiremos la nueva variable aleatoria "**resultado**" de la póliza, que representaremos mediante la letra L, como la diferencia de dos variables aleatorias: el valor actual de las prestaciones del asegurador menos el valor actual de los pagos por primas.

Notemos que los valores positivos de L representan pérdidas y los negativos ganancias.

Ciertamente, L será en general una variable aleatoria que dependerá de la vida residual o del número de años completos de vida hasta la muerte del asegurado.

El **principio de equivalencia actuarial** establece que la cuantía de las primas han de ser las que anulen la esperanza matemática de L:

$$E(L) = 0$$

Este principio conduce a que **la cuantía de las primas ha de ser aquella para la que se iguala su valor actual actuarial con el de las prestaciones del asegurador.**

7.3 Primas únicas

Ya que la **prima única** es aquella que es pagada de una sola vez en el momento de formalizarse el contrato. Si Z es el valor actual de una o varias de las modalidades estudiadas en los capítulos anteriores cuyos valores dependen de las variables aleatorias T_x o K_x, y representamos mediante Π la prima única a pagar, es claro que

$$L = Z - \Pi$$

y por tanto

$$E(L) = E(Z - \Pi) = E(Z) - \Pi$$

La aplicación de principio de equivalencia conduce a

$$\Pi = E(Z) \tag{7.1}$$

Así, **la prima única pura coincide con la esperanza matemática del valor actual de las coberturas contratadas.**

Tenemos, por tanto, que los valores actuales actuariales de los seguros y rentas estudiados anteriormente coinciden con las correspondientes primas únicas puras.

A modo de ejemplo tratemos, con detenimiento, el caso del **seguro vida entera** para un asegurado de edad x y un capital asegurado unitario.

Sabemos que, bajo la hipótesis de pago del capital asegurado al final del año de fallecimiento, el valor actual de las prestaciones de la empresa es una variable aleatoria

$$Z = v^{K_x+1} \quad K_x = 0, 1, 2, ..., \omega - x - 1$$

siendo

$$P(Z = v^{k+1}) = {}_{k/}q_x \quad k = 0, 1, 2, ..., \omega - x - 1$$

El valor actual de las primas pagadas es en este caso constante e igual a Π_x.

La variable aleatoria L toma los valores

$$L = v^{K_x+1} - \Pi_x \qquad K_x = 0, 1, 2, .., \omega - x - 1$$

siendo

$$P(Z = v^{k+1} - \Pi_x) = {}_{k/}q_x \qquad k = 0, 1, 2, ..., \omega - x - 1$$

La prima única Π_x, que resulta de aplicar el principio de equivalencia es aquella que hace que $E(L) = 0$, esto es,

$$\sum_{k=0}^{\omega-x-1} (v^{k+1} - \Pi_x) \ {}_{k/}q_x = 0$$

o sea,

$$\sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1} \ {}_{k/}q_x - \Pi_x = 0$$

por lo que

$$\Pi_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1} \ {}_{k/}q_x = A_x \tag{7.2}$$

La varianza de L nos puede dar una idea de la "peligrosidad" de la póliza. Es claro que

$$Var(L) = Var(v^{K_x+1}) = {}^2A_x - A_x \tag{7.3}$$

Evidentemente, cuando la prima única está calculada de acuerdo al principio de equivalencia actuarial,

$$Var(L) = E(L^2)$$

ya que $E(L) = 0$.

En el caso de pago del capital asegurado en el instante del fallecimiento tendremos que

$$Z = v^{T_x} \quad T_x \geq 0$$

$$L = v^{T_x} - \overline{\Pi}_x \qquad T_x \geq 0$$

La prima única $\overline{\Pi}_x$, de acuerdo al principio de equivalencia, es aquella que hace que $E(L) = 0$, esto es,

$$\int_0^{\infty} (v^t - \overline{\Pi}_x)\ g_x(t)\ dt = 0$$

de donde

$$\overline{\Pi}_x = \int_0^{\infty} v^t\ g_x(t)\ dt = \overline{A}_x$$

Ejemplo 8 *Considerando de nuevo la ley de mortalidad*

$$\mu_x = 0.00065 + 0.00006\ 1.09^x$$

y un tipo de interés anual del 0.02 *la prima única pura para una edad de* 30 *años es*

$$\overline{\Pi}_{30} = \int_0^{85} (1+0.02)^{-t}\ g_{30}(t)\ dt = 0.408629$$

y para un tipo de interés del 0,06 es

$$\overline{\Pi}_{30} = \int_0^{85} (1+0.06)^{-t}\ g_{30}(t)\ dt = 0.096771$$

En la figura 7.1 representamos las gráficas de las funciones

$$L = (1+0.02)^{-t} - 0.408629 \qquad t \geq 0$$

(línea continua) y

$$L = (1 + 0.06)^{-t} - 0.096771. \qquad t \geq 0$$

(línea de puntos), que nos dan el resultado de la póliza en función de la vida residual de (x).

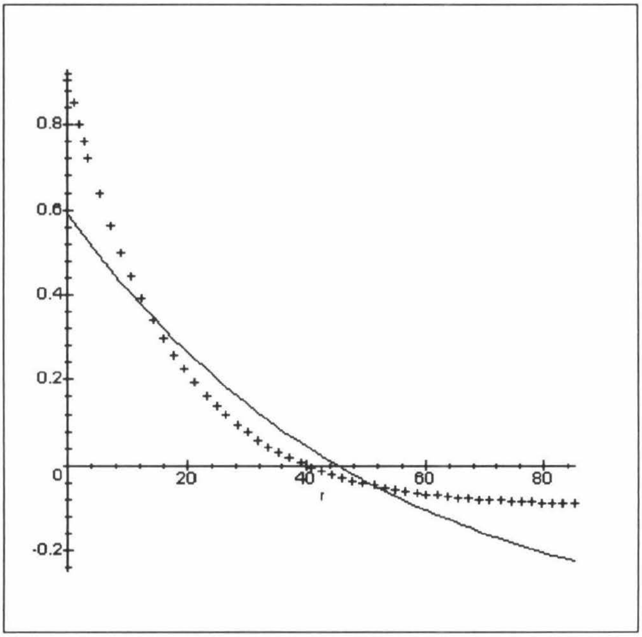

Figura 7.1

Se suele denominar ***duración matemática*** *a aquél valor de* T_x *para el que el resultado de la póliza es cero (antes de él la póliza produce pérdidas,* $L > 0$ *y después ganancias,* $L < 0$*).*

En nuestro caso basta resolver las ecuaciones

$$(1 + 0,02)^{-t} - 0,408629 = 0$$

cuya solución es $45,193$ *y*

$$(1 + 0,06)^{-t} - 0,096771 = 0$$

cuya solución es $40,097$.

Una interpretación elemental de la duración matemática es la siguiente: la empresa aseguradora recibe una prima única de cuantía 0.408629 *que invierte a un* *interés compuesto del* 0.02 *anual; la duración matématica es el tiempo necesario para que la citada prima más los intereses de su inversión sean iguales al capital asegurado (la unidad en este caso). Si el asegurado de 30 años de edad fallece antes de los* 75.193, *la empresa tendrá pérdidas ya que no habrá conseguido llegar al capital asegurado, si fallece después obtendrá beneficio. Notemos que la primera ecuación también puede escribirse como*

$$0,408629\ (1+0,02)^t = 1$$

En la figura 7.2 se representan las correspondientes densidades de la variable aleatoria L (véase ejercicio 3). La línea continua se corresponde con el tipo de 0,06 *y la de puntos con el del* 0,02. *Recordemos que los valores positivos del eje de abscisas representan las pérdidas de la póliza por lo que podemos observar una probabilidad pequeña de grandes pérdidas y una gran probabilidad de pequeños beneficios.*

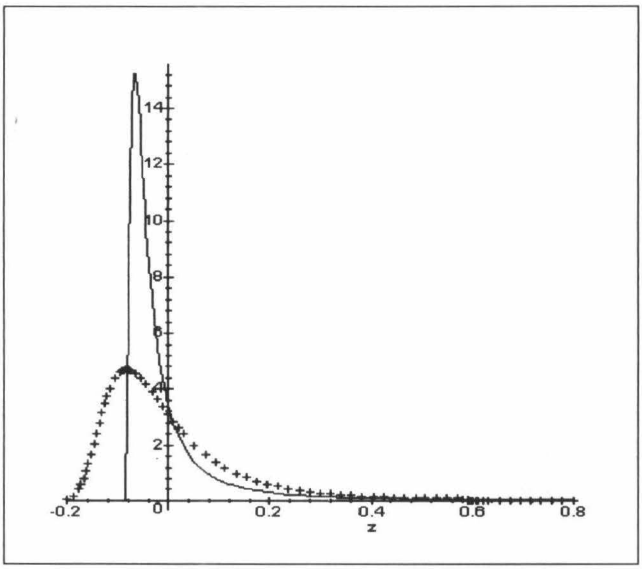

Figura 7.2

7.4 Primas anuales constantes

Estudiaremos ahora las **primas anuales constantes,** refiriéndolas a las principales modalidades de seguros.

Haremos la distinción general entre **prima discreta**, **prima continua** y **semicontinua** según la forma de pago de la prima (un único pago al principio de cada año o un teórico pago de la prima de forma uniforme y continua a lo largo del año) y de la indemnización, cuando es consecuencia de la muerte del asegurado (pago en el momento del fallecimiento o al final del año de fallecimiento).

7.4.1 Seguro vida entera

Primas discretas

Supongamos ahora que las primas son anuales y constantes y se pagan al principio de cada año, mientras viva el asegurado. Asimismo supondremos que el capital asegurado es pagado al final del año de fallecimiento. Representando mediante P_x la prima pura anual constante, los valores de L son

$$L = v^{K_x+1} - P_x\, \ddot{a}_{\overline{K_x+1|}} \qquad K_x = 0, 1, 2, .$$

con

$$P(L = v^{k+1} - P_x\, \ddot{a}_{\overline{k+1|}}) = {}_{k/}q_x \qquad k = 0, 1, 2, ..$$

Obtengamos P_x de acuerdo al principio de equivalencia actuarial. Ya que,

$$E(L) = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} (v^{k+1} - P_x\, \ddot{a}_{\overline{k+1|}})\ {}_{k/}q_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1}\ {}_{k/}q_x - P_x \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \ddot{a}_{\overline{k+1|}}\ {}_{k/}q_x$$

haciendo $E(L) = 0$ se sigue elementalmente

$$P_x\, \ddot{a}_x = A_x$$

Notemos que **el valor actual actuarial de las primas pagadas** (que constituyen una renta constante, prepagable e ilimitada) **iguala al valor actual actuarial de la prestación del asegurado.**

La prima anual constante es

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} \tag{7.4}$$

Recordando la relación $d\, \ddot{a}_x + A_x = 1$ podemos obtener fácilmente otras dos expresiones para P_x,

$$P_x = \frac{d\, A_x}{1 - A_x} \quad y \quad P_x = \frac{1}{\ddot{a}_x} - d \tag{7.5}$$

Calculemos la *varianza* de L . Para ello tendremos en cuenta que

$$v^{K_x+1} - P_x\, \ddot{a}_{\overline{K_x+1|}} = v^{K_x+1} - P_x\, \frac{1 - v^{K_x+1}}{d} = (1 + \frac{P_x}{d})\, v^{K_x+1} - \frac{P_x}{d}$$

y resulta en general,

$$Var(L) = (1 + \frac{P_x}{d})^2\, Var(v^{K_x+1}) = (1 + \frac{P_x}{d})^2\, ({}^2A_x - (A_x)^2) \tag{7.6}$$

Cuando P_x obedece al principio de equivalencia es posible, en este caso, obtener interesantes expresiones para la varianza. En efecto, es claro que,

$$1+\frac{P_x}{d}=1+\frac{A_x}{d\,\ddot{a}_x}=\frac{1}{d\,\ddot{a}_x}=\frac{1}{1-A_x}$$

y por tanto,

$$Var(L)=\frac{{}^2A_x-(A_x)^2}{(d\,\ddot{a}_x)^2}=\frac{{}^2A_x-(A_x)^2}{(1-A_x)^2} \tag{7.7}$$

Podría contratarse el seguro vida entera con pago de primas anuales y constantes mientras viva el asegurado pero como máximo hasta que alcance la edad x+n (que representaremos mediante ${}_nP_x)^{\dagger}$. El lector no ha de tener dificultad en deducir que la equivalencia actuarial conduce a

$${}_nP_x\;\ddot{a}_{x:\overline{n|}}=A_x$$

por lo que la prima pura anual constante es

$${}_nP_x=\frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} \tag{7.8}$$

Observación 5 *Las primas que aquí hemos definido como discretas son las calculadas en la práctica, ya que la información de que se dispone respecto a la mortalidad es habitualmente la proporcionada por la correspondiente tabla de mortalidad. En realidad, el capital asegurado no se paga en el instante del fallecimiento sino a los pocos días del mismo por lo que la prima resultante no puede considerarse exacta. El tradicional cálculo de las primas empleando las funciones de conmutación es sencillo, basta recordar la expresión de los valores actuales actuariales de las rentas y seguros implicados. Así*

$$P_x=\frac{A_x}{\ddot{a}_x}=\frac{\frac{M_x}{D_x}}{\frac{N_x}{D_x}}=\frac{M_x}{N_x} \tag{7.9}$$

o bien

$${}_nP_x=\frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}=\frac{\frac{M_x}{D_x}}{\frac{N_x-N_{x+n}}{D_x}}=\frac{M_x}{N_x-N_{x+n}} \tag{7.10}$$

Es habitual que los símbolos de conmutación correspondientes a prestaciones en caso de fallecimiento se calculen mediante la hipótesis de pago a mitad del año de fallecimiento (véase apartado 4.2.3.) esto produce, en principio un valor de la prima más ajustado a la realidad.

†Cuando el periodo de pago de primas no coincide con el periodo de cobertura del riesgo, se hacer notar este hecho en la expresión de la prima expresando la temporalidad del pago de primas con un subíndice a la izquierda de P.

Ejemplo 9 *Analicemos la variación de la prima anual pura, vitalicia y constante para un seguro vida entera de capital asegurado unitario al variar las bases técnicas.*

En la siguiente tabla se recogen los valores de las citadas primas para una cabeza de 30 años, para distintos valores del tipo de interés técnico y para las tablas de mortalidad GKM80 y GKM95:

	$GKM80$	$GKM95$
0.01	0.1845988	0.1702113
0.02	0.1493995	0.0135510
0.03	0.0121006	0.0107950
0.04	0.0098378	0.0086472
0.05	0.0080504	0.0069658
0.06	0.0066472	0.0056807

En la siguiente figura se representan las correspondientes gráficas (GKM80 (+) y GKM95(o)).

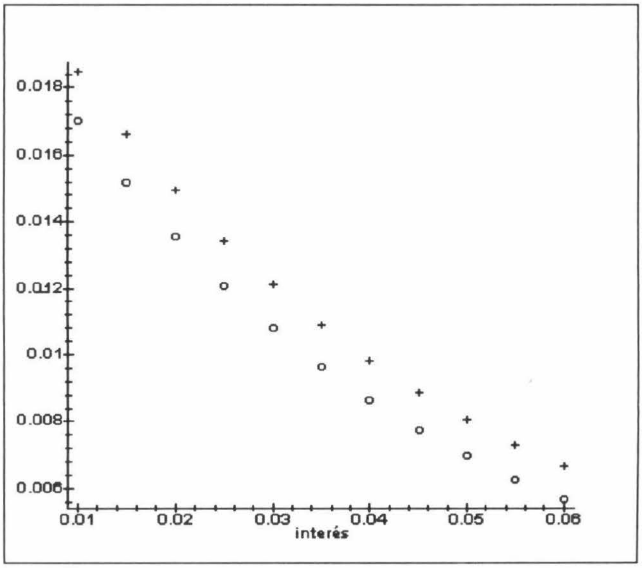

Figura 7.3

Asimismo en la siguiente tabla recogemos la variación de la prima anual con la edad, también para las dos tablas de mortalidad citadas y un tipo de interés técnico $i = 0,03$

	$GKM80$	$GKM95$
20	0.0085007	0.0077565
30	0.0121006	0.0107950
40	0.0180921	0.0158207
50	0.0282522	0.0243237
60	0.0463528	0.0392904
70	0.0806202	0.0680297

cuya representación se presenta en la siguiente figura

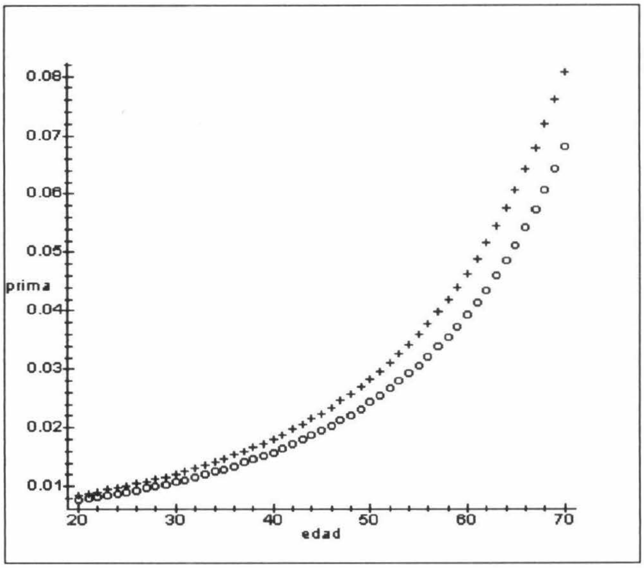

Figura 7.4

Prima continua

Supongamos ahora que el capital asegurado se paga en el momento del fallecimiento y que la prima se recauda uniforme y continuamente y a una tasa anual constante. Su representación es ahora $\bar{P}\ (\bar{A}_x)$, siendo una **prima anual continua.**

Ciertamente ahora

$$L = v^{T_x} - \bar{P}\ (\bar{A}_x)\ \bar{a}_{\overline{T_x|}} \quad T_x \geq 0$$

Calculemos, en primer lugar, $\bar{P}\ (\bar{A}_x)$ de acuerdo al principio de equivalencia actuarial

$$E(L) = \int_0^{+\infty} (v^t - P(\bar{A}_x)\ \bar{a}_{\overline{t|}})\ g_x(t)\ dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} v^t \; g_x(t) \; dt - P(\bar{A}_x) \int_0^{+\infty} \bar{a}_{\overline{t}|} \; g_x(t) \; dt$$

por lo que $E(L) = 0$ conduce a

$$\bar{P} \; (\bar{A}_x) \; \bar{a}_x = \bar{A}_x$$

esto es

$$\bar{P} \; (\bar{A}_x) \; = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x} \tag{7.11}$$

y recordando que $\delta \; \bar{a}_x + \bar{A}_x = 1$,

$$\bar{P} \; (\bar{A}_x) \; = \frac{\delta \; \bar{A}_x}{1 - \bar{A}_x} \tag{7.12}$$

y también

$$\bar{P} \; (\bar{A}_x) = \frac{1}{\bar{a}_x} - \delta \tag{7.13}$$

Calculemos ahora la varianza de L. Ciertamente,

$$L = v^{T_x} - \bar{P} \; (\bar{A}_x) \; \frac{1 - v^{T_x}}{\delta} = v^{T_x}(1 + \frac{\bar{P} \; (\bar{A}_x)}{\delta}) - \frac{\bar{P} \; (\bar{A}_x)}{\delta}$$

Una expresión general de su varianza es

$$Var(L) = (1 + \frac{\bar{P} \; (\bar{A}_x)}{\delta})^2 \; Var(v^{T_x}) = (1 + \frac{\bar{P} \; (\bar{A}_x)}{\delta})^2 \; ({}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2) \tag{7.14}$$

Cuando $\bar{P} \; (\bar{A}_x)$ obedece al principio de equivalencia actuarial, procediendo como en el caso discreto se obtienen las siguientes expresiones:

$$Var(L) = \frac{{}^2 \; \bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{(\delta \; \bar{a}_x)^2} = \frac{{}^2 \; \bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{(1 - \bar{A}_x)^2} \tag{7.15}$$

Si el periodo de pago de primas es inferior al de la duración del seguro tendremos

$${}_n \; \bar{P} \; (\bar{A}_x) \; = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} \tag{7.16}$$

Observación 6 *Un planteamiento más acorde con la realidad consiste en suponer que las primas anuales y constantes se pagan al comienzo de cada año y que el capital asegurado se paga en el momento del fallecimiento.*

La prima anual constante, que se representa ahora mediante $P(\bar{A}_x)$ es una ***prima "semicontinua"****. De la aplicación del principio de equivalencia se ha de seguir que el valor actual actuarial de las primas pagadas ha de ser igual al valor actual actuarial de la prestación, esto es,*

$$P(\bar{A}_x)\ \ddot{a}_x = \bar{A}_x$$

y por tanto,

$$P(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_x} \tag{7.17}$$

Aceptando la hipótesis de la distribución uniforme de la mortalidad sabemos que

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta}\ A_x$$

obteniéndose elementalmente la siguiente relación con la prima discreta

$$P(\bar{A}_x) = \frac{i}{\delta}\ P_x \tag{7.18}$$

7.4.2 Seguro temporal

Primas discretas

Supongamos que las primas son anuales y constantes y se pagan al principio de cada año, mientras viva el asegurado pero como máximo hasta que finalice el período de cobertura, que fijaremos en n años. Asimismo supondremos que el capital asegurado es pagado al final del año de fallecimiento. Representando mediante $P_{\overset{1}{x}:\overline{n|}}$ la prima pura anual constante , los valores de L son

$$L = \begin{cases} v^{K_x+1} - P_{\overset{1}{x}:\overline{n|}}\ \ddot{a}_{\overline{K_x+1|}} & K_x = 0,1,2,..,n-1 \\ -P_{\overset{1}{x}:\overline{n|}}\ \ddot{a}_{\overline{n|}} & K_x = n, n+1, ..., \omega - x - 1 \end{cases}$$

con

$$P(L = v^{k+1} - P_x\ \ddot{a}_{\overline{k+1|}}) = {}_{k/}q_x \qquad k = 0,1,2,..,n-1$$

y

$$P(L = -P_{\overset{1}{x}:\overline{n|}}\ \ddot{a}_{\overline{n|}}) = {}_{n}p_x$$

Calculemos la esperanza de L

$$E(L) = \sum_{k=0}^{n-1} (v^{k+1} - P_{\overset{1}{x}:\overline{n|}}\ \ddot{a}_{\overline{k+1|}})\ {}_{k/}q_x + (-P_{\overset{1}{x}:\overline{n|}}\ \ddot{a}_{\overline{n|}})\ {}_{n}p_x =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ {}_{k/}q_x - P_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\ {}_{k/}q_x + \ddot{a}_{\overline{n}|}\ {}_{n}p_x\right)$$

por lo que de $E(L) = 0$ se sigue elementalmente

$$P_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}$$

La prima anual constante, de acuerdo al principio de equivalencia, es

$$P_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = \frac{A_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \tag{7.19}$$

En este seguro no existen expresiones para la varianza de L tan sencillas como para el vida entera. Tendremos, por tanto, que

$$Var(L) = E(L^2) - E(L)^2$$

Cuando la prima es la calculada de acuerdo al principio de equivalencia, se reduce a

$$Var(L) = E(L^2).$$

Podría contratarse el seguro temporal con pago de primas anuales y constantes mientras viva el asegurado pero como máximo durante m años (m<n lógicamente). El lector no ha de tener dificultad alguna en obtener la citada prima:

$${}_{m}P_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = \frac{A_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} \tag{7.20}$$

En símbolos de conmutación,

$$P_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = \frac{A_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{\frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}}{\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \tag{7.21}$$

y

$${}_{m}P_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = \frac{A_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} = \frac{\frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}}{\frac{N_x - N_{x+m}}{D_x}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+m}} \tag{7.22}$$

Prima continua

Suponemos que el capital asegurado se paga en el momento del fallecimiento y que la prima se recauda uniforme y continuamente y a una tasa anual constante hasta el momento del fallecimiento del asegurado o la finalización de la cobertura del contrato.

Ahora

$$L = \begin{cases} v^{T_x} - \bar{P}\,(\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}})\ \bar{a}_{\overline{T_x|}} & T_x \leq n \\ -\ \bar{P}\,(\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}})\ \bar{a}_{\overline{n|}} & T_x > n \end{cases}$$

El principio de equivalencia actuarial conduce a

$$\bar{P}\,(\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}})\ \bar{a}_x = \bar{A}_x$$

de donde

$$\bar{P}\,(\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}}) = \frac{\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}}}{\bar{a}_{x:\overline{n|}}} \tag{7.23}$$

El lector no ha de tener dificultad en obtener la expresión de la prima cuando la obligación de su pago finaliza antes que la cobertura.

Asimismo la "prima semicontinua", cuando el capital asegurado se paga en el momento del fallecimiento y las primas al principio de cada año mientras viva el asegurado, es

$$P(\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}}) = \frac{\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} \tag{7.24}$$

Recordando que bajo la hipótesis de distribución uniforme de la mortalidad

$$\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}} = \frac{i}{\delta}\ A^{\,1}_{x:\overline{n|}}$$

se obtiene la siguiente relación entre la prima discreta y la semicontinua

$$P(\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}}) = \frac{i}{\delta}\ P^{\,1}_{x:\overline{n|}} \tag{7.25}$$

7.4.3 Seguro mixto simple

Refirámonos previamente al seguro a capital diferido: (x) cobrará una unidad monetaria si alcanza con vida la edad $x+n$. Supuesto que las primas anuales y constantes se pagan mientras viva el asegurado pero como máximo hasta la edad $x+n$, tenemos

$$L = \begin{cases} -P_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}\ \ddot{a}_{\overline{K_x+1|}} & K_x = 0,1,2,...,n-1 \\ v^n - P_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}\ \ddot{a}_{\overline{n|}} & K_x = n, n+1, ..., \omega - x - 1 \end{cases}$$

lo que conduce fácilmente a

$$P_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = \frac{A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}$$

Supuesto que la prima se pague de forma constante uniforme y continua tendremos

$$L = \begin{cases} -\bar{P}(\bar{A}_{\overset{1}{x:\overline{n}|}})\,\bar{a}_{\overline{T_x}|} & T_x \le n \\ v^n - \bar{P}(\bar{A}_{\overset{1}{x:\overline{n}|}})\,\bar{a}_{\overline{n}|} & T_x > n \end{cases}$$

por lo que

$$\bar{P}(\bar{A}_{\overset{1}{x:\overline{n}|}}) = \frac{A_{\overset{1}{x:\overline{n}|}}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}$$

Prima discreta

Centrándonos ya en el seguro mixto simple. En el caso de prima anuales y constantes, el resultado de la póliza es

$$L = \begin{cases} v^{K_x+1} - P_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{\overline{K_x+1}|} & K_x = 0,1,2,...,n-1 \\ v^n - P_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{\overline{n}|} & K_x = n, n+1, ..., , \omega - x - 1 \end{cases}$$

Calculemos $P_{x:\overline{n}|}$ de acuerdo al principio de equivalencia actuarial.

$$E(L) = \sum_{k=0}^{n-1}(v^{k+1} - P_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{\overline{k+1}|})\ {}_{k/}q_x + (v^n - P_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{\overline{n}|})\ {}_n p_x$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ {}_{k/}q_x + v^n\ {}_n p_x - (\sum_{k=0}^{n-1} P_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{\overline{k+1}|})\ {}_{k/}q_x + P_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{\overline{n}|}\ {}_n p_x)$$

De $E(L) = 0$, se sigue

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} + A_{\overset{1}{x:\overline{n}|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \tag{7.26}$$

Recordando la relación (5.25) $d\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|} = 1$, resulta

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{d\ A_{x:\overline{n}|}}{1 - A_{x:\overline{n}|}} \tag{7.27}$$

y

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - d \tag{7.28}$$

En el caso del seguro mixto simple es posible obtener expresiones sencillas para la varianza de L. Basta escribir para ello

$$L = Z - P_{x:\overline{n}|} \frac{1-Z}{d} = (1 + \frac{P_{x:\overline{n}|}}{d})\, Z - \frac{P_{x:\overline{n}|}}{d}$$

donde

$$Z = \begin{cases} v^{K_x+1} & K_x = 0, 1, 2, ..., n-1 \\ v^n & K_x = n, n+1, ... \end{cases}$$

Así

$$Var(L) = (1 + \frac{P_{x:\overline{n}|}}{d})^2\, Var(Z) = (1 + \frac{P_{x:\overline{n}|}}{d})^2\, (\,{}^2A_{x:\overline{n}|} - (A_{x:\overline{n}|})^2) \tag{7.29}$$

y cuando la prima obedece al principio de equivalencia actuarial, teniendo en cuenta las relaciones (7.28) y (5.25), se obtienen las expresiones

$$Var(L) = \frac{{}^2A_{x:\overline{n}|} - (A_{x:\overline{n}|})^2}{(d\, \ddot{a}_{x:\overline{n}|})^2} = \frac{{}^2A_{x:\overline{n}|} - (A_{x:\overline{n}|})^2}{(1 - A_{x:\overline{n}|})^2} \tag{7.30}$$

Prima continua

Para una prima uniforme constante y continua $\bar{P}_{x:\overline{n}|}$,el resultado de la póliza es

$$L = \begin{cases} v^{T_x} - \bar{P}_{x:\overline{n}|}\, \bar{a}_{\overline{T_x}|} & T_x \leq n \\ v^n - \bar{P}_{x:\overline{n}|}\, \bar{a}_{\overline{n}|} & T_x > n \end{cases}$$

La esperanza matemática de L es

$$E(L) = \int_0^n (v^t - \bar{P}_{x:\overline{n}|}\bar{a}_{\overline{t}|})\; g_x(t)\; dt + (v^n - \bar{P}_{x:\overline{n}|}\, \bar{a}_{\overline{n}|})\; {}_np_x$$

De $E(L) = 0$ se sigue, tras sencillas operaciones,[‡]

$$\bar{P}\,(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{\,1}{\overline{n}|}}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} \tag{7.31}$$

[‡]Hagamos notar que en el seguro a capital diferido no tiene sentido distinguir entre pago en el momento del fallecimiento al final del año de fallecimiento.

Recordando que $\delta\ \bar{a}_{x:\overline{n|}} + \bar{A}_{x:\overline{n|}} = 1$, resulta,

$$\bar{P}\ (\bar{A}_{x:\overline{n|}}) = \frac{d\ \bar{A}_{x:\overline{n|}}}{1 - \bar{A}_{x:\overline{n|}}} \tag{7.32}$$

y

$$\bar{P}\ (\bar{A}_{x:\overline{n|}}) = \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} - 1 \tag{7.33}$$

Para el cálculo de la varianza de L.escribiremos

$$L = Z - \bar{P}_{x:\overline{n|}}\ \frac{1-Z}{\delta} = (1 + \frac{\bar{P}_{x:\overline{n|}}}{\delta})\ Z - \frac{\bar{P}_{x:\overline{n|}}}{\delta}$$

donde

$$L = \begin{cases} v^{T_x} & T_x \leq n \\ v^n & T_x > n. \end{cases}$$

Así

$$Var(L) = (1 + \frac{\bar{P}\ (\bar{A}_{x:\overline{n|}})}{\delta})^2\ Var(Z) = (1 + \frac{\bar{P}\ (\bar{A}_{x:\overline{n|}})}{\delta})^2\ (\ ^2\ \bar{A}_{x:\overline{n|}} - (\bar{A}_{x:\overline{n|}})^2) \tag{7.34}$$

y cuando la prima obedece al principio de equivalencia actuarial, tenemos

$$Var(L) = \frac{^2\ \bar{A}_{x:\overline{n|}} - (\bar{A}_{x:\overline{n|}})^2}{(\delta\ \bar{a}_{x:\overline{n|}})^2} = \frac{^2\ \bar{A}_{x:\overline{n|}} - (\bar{A}_{x:\overline{n|}})^2}{(1 - \bar{A}_{x:\overline{n|}})^2} \tag{7.35}$$

La "prima semicontinua", que surge cuando el capital para el caso de fallecimiento se paga en el momento del fallecimiento y las primas al principio de cada año mientras viva el asegurado, es elementalmente

$$P(\bar{A}_{x:\overline{n|}}) = \frac{\bar{A}_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} + A_{x:\overset{\ 1}{\overline{n|}}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} \tag{7.36}$$

Verificándose, bajo la hipótesis de distribución uniforme de la mortalidad, la siguiente relación con la prima discreta:

$$P(\bar{A}_{x:\overline{n|}}) = \frac{i}{\delta}\ P_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} + P_{x:\overset{\ 1}{\overline{n|}}} \tag{7.37}$$

7.5 Primas anuales variables

7.5.1 Un seguro de vida en general

Realizaremos un planteamiento general de un seguro de vida en el caso discreto. Consideremos una cabeza de edad x y sean $C = \{C_1, C_2, ..., C_{\omega-x}\}$, $C' = \{C'_0, C'_1, ..., C'_{\omega-x-1}\}$ y $P = \{P_0, P_1, ..., P_{\omega-x-1}\}$, los conjuntos que representan respectivamente los capitales en caso de fallecimiento (hipótesis de pago al final del año del mismo), los capitales a recibir en caso de supervivencia y las primas anuales a pagar al comienzo de cada año respectivamente. Tomando algunos de ellos el valor cero podemos obtener distintos tipos de seguros de vida.

El resultado de la póliza es una variable aleatoria

$$L = C_{K_x+1} v^{K_x+1} + (V\ddot{a}C')_{\overline{K_x+1|}} - (V\ddot{a}P)_{\overline{K_x+1|}} \quad K_x = 0, 1, 2, ..., \omega - x - 1$$

donde

$$(V\ddot{a}C')_{\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} C'_t \, v^t \quad y \quad (V\ddot{a}P)_{\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} P \, v^t$$

El principio de equivalencia actuarial $E(L) = 0$ conduce a

$$(V\ddot{a}P)_x = (VAC)_x + (V\ddot{a}C')_x \tag{7.38}$$

Conocidos los elementos de C y C', habrá que determinar los valores de $P_0, P_1, ..., P_{\omega-x-1}$ (que no serán únicos ni iguales, en general) para los que se verifica la igualdad anterior.

Consideremos dos casos particulares.

- Supongamos en primer lugar que las primas varían en progresión geométrica de razón q, esto es, $P = \{P_x, P_x\, q, P_x\, q^2, P_x\, q^3....\}$. El principio de equivalencia actuarial conduce a

$$P_x \, {}^q\ddot{a}_x = (VAC)_x + (V\ddot{a}C')_x$$

de donde la prima correspondiente al primer año es

$$P_x = \frac{(VAC)_x + (V\ddot{a}C')_x}{{}^q\ddot{a}_x}$$

- Supongamos ahora que las primas varían en progresión aritmética cuya diferencia se establece en un porcentaje ρ de la primera prima. Ahora $P = \{P_x, P_x + \rho\, P_x, +P_x + 2\, \rho\, P_x, ...\}$. De nuevo la aplicación del principio de equivalencia actuarial conduce a (recuérdese (6.76))

$$P_x \, (\ddot{a}_x + \rho \; {}_{1/}(I\ddot{a})_x) = (VAC)_x + (V\ddot{a}C')_x$$

de donde

$$P_x = \frac{(VAC)_x + (V\ddot{a}C')_x}{\ddot{a}_x + \rho\ {}_{1/}(I\ddot{a})_x}$$

Asimismo es posible realizar un planteamiento general en el caso continuo. Para una cabeza de edad x, sea la función

$$C : [0, \omega - x] \rightarrow R$$

donde $C(z)$ nos proporciona el capital asegurado a pagar si dicha cabeza fallece a la edad $x + z$ y sean las funciones

$$C', P : [0, \omega - x] \rightarrow R$$

que representan las densidades de capital correspondientes a la prestación en caso de supervivencia y al pago de primas respectivamente. El principio de equivalencia actual conduce a

$$(V\bar{a}P)_x = (V\bar{A}C)_x + (V\bar{a}C')_x \tag{7.39}$$

Dadas las funciones C y C', el problema será la determinación de la función P.

7.6 Primas fraccionarias y primas fraccionadas

Hasta el momento las primas periódicas estudiadas han sido anuales. En el presente apartado trataremos las primas cuyo periodo es una fracción de año, comúnmente un mes, trimestre o semestre.

En este punto hemos de distinguir dos casos:

1.- La prima es calculada para la fracción de año elegida. Estaremos ante primas mensuales, trimestrales o semestrales. Estas primas reciben el nombre de **primas fraccionarias**.

De estas primas se dice que poseen **poder liberatorio**, esto es, el pago de la correspondiente prima da derecho al cobro de la indemnización completa en caso de producirse el suceso causante de la misma.

Consideremos un seguro vida entera para una cabeza de edad x bajo la hipótesis de pago del capital asegurado al final del año del fallecimiento. Supongamos que las primas se corresponden con una determinada fracción m-ésima de año pagándose al principio de la misma, son constantes y se pagan hasta el fallecimiento del asegurado. Si representamos mediante

$$P_x^{(m)}$$

la cuantía total de los pagos anuales por primas, es claro que

$$\frac{P_x^{(m)}}{m}$$

es la cuantía de la prima correspondiente a la fracción de año elegida.

Para establecer la equivalencia actuarial hemos de recurrir a las rentas fraccionadas estudiadas en el capítulo 6. La aplicación del principio de equivalencia actuarial conduce elementalmente a

$$P_x^{(m)}\ \ddot{a}_x^{(m)} = A_x$$

esto es

$$P_x^{(m)} = \frac{A_x}{\ddot{a}_x^{(m)}}$$

y asumiendo, por ejemplo la hipótesis de linealidad de los D_x (véase el apartado 6.2.2)

$$P_x^{(m)} = \frac{A_x}{\ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}}$$

Si las primas se pagan mientras viva el asegurado pero como máximo durante n años, tendremos

$${}_nP_x^{(m)}\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = A_x$$

esto es

$${}_nP_x^{(m)} = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}}$$

2.- La prima calculada es anual,dándose la posibilidad al tomador del seguro de satisfacerla mediante varios pagos. En este caso se produce un recargo puramente financiero y las primas pagadas en las fracciones de año no poseen poder liberatorio, por lo que, en caso de producirse el siniestro, de la indemnización se detraerá la parte de la prima anual no satisfecha en ese momento. Este tipo de primas se denominan **fraccionadas.**

De forma elemental la prima anual P_x se sustituye por m pagos iguales de cuantía $P^{(m)}$ al comienzo de cada una de las m fracciones del año. La cuantía de $P^{(m)}$ se obtiene fácilmente a partir de

$$P_x = m\ P^{(m)}\ \ddot{a}_{\overline{1}|} = m\ P^{(m)}\ \frac{i}{j(m)}\ (1+i)^{-\frac{1}{m}}\ a_{\overline{1}|} = m\ P^{(m)}\ \frac{i}{j(m)}\ \frac{(1+i)^{-\frac{1}{m}}}{(1+i)}$$

donde el tipo de interés aplicado no tiene porque coincidir con el tipo de interés técnico.

En las condiciones de la póliza puede establecerse, por ejemplo, que *el pago de la prima se hará por anualidades anticipadas, pudiendo acordarse su pago fraccionado mediante un recargo del 1% si el fraccionamiento es semestral, del 2% si es trimestral y del 3% si es mensual....En caso de fraccionamiento, si se produce el suceso que da lugar a la indemnización, de la suma asegurada se descontarán las fracciones no pagadas de la prima.*

7.7 Contraseguro de primas

En aquellas modalidades de seguro en las que puede darse el caso de no recibir nada a cambio de las primas pagadas (pensemos en un seguro temporal si la vida residual del asegurado supera la temporalidad, o es un capital diferido si el asegurado fallece antes), en algunas ocasiones, fundamentalmente por razón de hacerlas más atractivas, suelen comercializarse incluyendo en las condiciones de la póliza una denominada **cláusula de contraseguro** por la cual de no producirse el suceso que da derecho a la percepción de la indemnización (en nuestros ejemplos: fallecimiento durante el periodo de cobertura o alcanzar con vida la edad estipulada) se devuelve el total o una parte de las primas pagadas, incluso capitalizadas.

En la práctica, la inclusión de cláusulas de contraseguro supone incluir en la póliza una cobertura adicional. Así, un seguro temporal con contraseguro de primas es equivalente a un seguro mixto de capitales distintos y un capital diferido con contraseguro equivale a un seguro mixto en el que el temporal es variable.

Por ejemplo, consideremos este último caso para una cabeza de edad x una temporalidad de n años, capital asegurado unitario y primas anuales y constantes de cuantía $P_{x:\overline{n|}}$; si en el caso de devolución lo serán las primas pagadas hasta el momento del fallecimiento sin capitalizar, la equivalencia actuarial conduce a

$$P_{x:\overline{n|}}\, \ddot{a}_{x:\overline{n|}} = A_{x:\overset{\;\;1}{\overline{n|}}} + P_{x:\overline{n|}} (IA)^{1}_{x:\overline{n|}}$$

de donde

$$P_{x:\overline{n|}} = \frac{A_{x:\overset{\;\;1}{\overline{n|}}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}} - (IA)^{1}_{x:\overline{n|}}}$$

Conviene hacer notar que en la práctica la prima devuelta es la prima comercial que incluye distintos recargos y será objeto de estudio en el capítulo 9.

7.8 Ejercicios

1.- Para un seguro vida entera bajo la hipótesis de pago del capital asegurado en el momento del fallecimiento, compare la varianza y el coeficiente de asimetría de la variable aleatoria L en los casos de prima

única y prima continua constante y vitalicia calculadas de acuerdo al principio de equivalencia.

Solución:

Representemos mediante L_u y L_p las correspondientes variables para los casos de prima única y vitalicia respectivamente.

Sabemos que (7.3)

$$Var(L_u) = {}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2$$

y que (7.15)

$$Var(L_p) = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{(1-\bar{A}_x)^2}$$

Por tanto, ya que $\bar{A}_x \leq 1$, tenemos

$$Var(L_u) \leq Var(L_p)$$

En cuanto al coeficiente de asimetría, tenemos

$$L_u = v^{T_x} - \overline{A}_x \qquad T_x \geq 0$$

y

$$Asim L_u = \frac{\int_0^\infty (v^t - \overline{A}_x)^3 \, g_x(t)\, dt}{(Var(L_u))^{\frac{3}{2}}} = \frac{\int_0^\infty (v^t - \overline{A}_x)^3 \, g_x(t)\, dt}{({}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

y

$$L_p = v^{T_x}(1 + \frac{\bar{P}\,(\bar{A}_x)}{\delta}) - \frac{\bar{P}\,(\bar{A}_x)}{\delta} = v^{T_x}\left(\frac{1}{1-\bar{A}_x}\right) - \frac{\bar{A}_x}{1-\bar{A}_x} \qquad T_x \geq 0$$

y ya que

$$\bar{P}\,(\bar{A}_x) = \frac{\delta\,\bar{A}_x}{1-\bar{A}_x}$$

$$L_p = v^{T_x}\left(\frac{1}{1-\bar{A}_x}\right) - \frac{\bar{A}_x}{1-\bar{A}_x} \qquad T_x \geq 0$$

Por tanto,

$$Asim L_p = \frac{\int_0^\infty (v^{T_x}\left(\frac{1}{1-\bar{A}_x}\right) - \frac{\bar{A}_x}{1-\bar{A}_x})^3 \, g_x(t)\, dt}{(Var(L_p))^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{\int_0^\infty \left(v^{T_x} \left(\frac{1}{1-\bar{A}_x}\right) - \frac{\bar{A}_x}{1-\bar{A}_x} \right)^3 g_x(t)\ dt}{\left(\frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{(1-\bar{A}_x)^2} \right)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{(1-\bar{A}_x)^3 \int_0^\infty \left(v^{T_x} \left(\frac{1}{1-\bar{A}_x}\right) - \frac{\bar{A}_x}{1-\bar{A}_x} \right)^3 g_x(t)\ dt}{({}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{\int_0^\infty \left(v^{T_x} - \bar{A}_x \right)^3 g_x(t)\ dt}{({}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2)^{\frac{3}{2}}} = AsimL_u$$

por lo que **los coeficientes de asimetría coinciden.**

2.- Pruebe que las siguientes pólizas para una cabeza de edad x poseen la misma duración matemática:

a) Un seguro vida entera con pago del capital asegurado en el momento del fallecimiento a prima única.

b) Un seguro vida entera con pago del capital asegurado en el momento del fallecimiento a prima continua constante y vitalicia.

c) Una renta inmediata, constante, continua y vitalicia a prima única.

Solución:

a) Del ejemplo 8 es claro que, la duración matemática será aquél valor de t para el que

$$e^{-\delta\ t} - \overline{A}_x = 0$$

de donde

$$t = -\frac{\ln(\overline{A}_x)}{\delta}$$

b) Ahora, la duración matemática será aquél valor de t para el que

$$e^{-\delta\ t} - \overline{P}(\overline{A}_x)\ \overline{a}_{\overline{t|}} = 0, \quad donde \quad \overline{P}(\overline{A}_x) = \frac{\overline{A}_x}{\overline{a}_x}$$

Ahora bien,

$$e^{-\delta\ t} - \overline{P}(\overline{A}_x)\ \overline{a}_{\overline{t|}} = e^{-\delta\ t} - \frac{\overline{A}_x}{\overline{a}_x}\ \frac{1-e^{-\delta\ t}}{\delta} = e^{-\delta\ t}\ (1 + \frac{\overline{A}_x}{\delta\ \overline{a}_x}) - \frac{\overline{A}_x}{\delta\ \overline{a}_x} =$$

$$= e^{-\delta\ t}\ (\frac{\delta\ \overline{a}_x + \overline{A}_x}{\delta\ \overline{a}_x}) - \frac{\overline{A}_x}{\delta\ \overline{a}_x} = e^{-\delta\ t}\ (\frac{1}{\delta\ \overline{a}_x}) - \frac{\overline{A}_x}{\delta\ \overline{a}_x}$$

Por tanto, de

$$e^{-\delta\, t}\,(\frac{1}{\delta\ \bar{a}_x}) - \frac{\bar{A}_x}{\delta\ \bar{a}_x} = 0$$

se sigue

$$t = -\frac{\ln(\bar{A}_x)}{\delta}$$

c) La duración matemática será aquél valor de t para el que

$$\bar{a}_{\overline{t}|} - \bar{a}_x = 0$$

esto es

$$\frac{1 - e^{-\delta\, t}}{\delta} - \bar{a}_x = 0$$

o sea

$$e^{-\delta\, t} = 1 - \delta\ \bar{a}_x = \bar{A}_x$$

de donde nuevamente

$$t = -\frac{\ln(\bar{A}_x)}{\delta}$$

3.-Obtenga la función de densidad y la función de distribución del resultado de un seguro vida entera con pago del capital asegurado en el momento del fallecimiento, en los casos de pago de una prima única y de pago de prima continua constante y vitalicia.

Solución:

Recordemos el valor actual del seguro vida entera:

$$Z = v^{T_x} \quad T_x \geq 0$$

Conocemos las funciones de densidad y distribución de Z (véase el capítulo 4) la función de densidad del valor actual es

$$f(z) = \begin{cases} \frac{{}_{h(z)}p_x . \mu_{x+h(z)}}{\delta . z} & si \;\; 0 < z \leq 1 \\ 0 & si \;\; z \leq 0 \text{ ó } z > 1 \end{cases}$$

y la función de distribución

$$F(z) = \begin{cases} 0 & si \;\; z \leq 0 \\ {}_{h(z)}p_x & si \;\; 0 < z \leq 1 \\ 1 & si \;\; z > 1 \end{cases}$$

donde $h(z) = -\frac{\ln(z)}{\delta}$.

a) A prima única

$$L = Z - \Pi$$

y si dicha prima única se encuentra calculada de acuerdo al principio de equivalencia actuarial,

$$\Pi = E(Z) = \bar{A}_x$$

La distribución de probabilidad de L se obtiene con facilidad. Basta realizar el cambio de variable $l = z - A$ (donde $A = \bar{A}_x$).

La función de distribución es

$$F(l) = \begin{cases} 0 & si \quad l \leq -A \\ {}_{h(l+A)}p_x & si \quad -A < l \leq 1 - A \\ 1 & si \quad l > 1 - A \end{cases}$$

y la función de densidad es

$$f(l) = \begin{cases} \frac{{}_{h(l+A)}p_x . \mu_{x+h(l+A)}}{\delta.(l+A)} & si \quad -A < l \leq 1 - A \\ 0 & si \quad l \leq -A \text{ ó } l > 1 - A \end{cases}$$

Cuando la prima única no obedece al principio de equivalencia, basta sustituir en las expresiones anteriores A por dicha prima para obtener la distribución de probabilidad del resultado.

b) En el caso de que las primas se paguen de forma constante uniforme y continua, recordando que

$$L = v^{T_x} - \bar{P}\,(\bar{A}_x)\,\frac{1 - v^{T_x}}{\delta} = v^{T_x}(1 + \frac{\bar{P}\,(\bar{A}_x)}{\delta}) - \frac{\bar{P}\,(\bar{A}_x)}{\delta}$$

podemos escribir

$$L = a\ Z + b$$

con

$$Z = v^{T_x},\ a = (1 + \frac{\bar{P}\,(\bar{A}_x)}{\delta}) \quad y \quad b = -\frac{\bar{P}\,(\bar{A}_x)}{\delta}$$

Tenemos ahora que realizando el cambio de variable $l = a\ z + b$, la función de distribución es

$$F(l) = \begin{cases} 0 & si \quad l \leq b \\ {}_{h(\frac{l-b}{a})}p_x & si \quad b < l \leq a + b \\ 1 & si \quad l > a + b \end{cases}$$

y la función de densidad es

$$f(l) = \begin{cases} \frac{h(\frac{l-b}{a})p_x \cdot \mu_{x+h(\frac{l-b}{a})}}{\delta . (\frac{l-b}{a})} \frac{1}{a} & si \quad b < l \leq a+b \\ 0 & si \quad l \leq b \text{ ó } l > a+b \end{cases}$$

4.- Justifique que para las pólizas del ejercicio anterior las probabilidades de obtener un resultado positivo coinciden.

Solución:

En el caso de pago de una prima única

$$F(0) = {}_{h(A)}p_x$$

Con pago de prima continua

$$F(0) = {}_{h(\frac{-b}{a})}p_x$$

Ahora bien,

$$\frac{-b}{a} = \frac{\frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}}{1 + \frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}} = A = \bar{A}_x$$

(basta despejar $\bar{A}_x$ en la expresión (7.12)).

Una prueba más sencilla se fundamenta en la coincidencia de la duración matemática de las dos pólizas, tal y como se probó en el ejercicio 2.

5.- Pruebe que cuando el tipo de interés técnico crece las distribuciones de probabilidad de ejercicio anterior tienden a coincidir.

Solución:

Basta tener en cuenta que

$$h(\frac{l-b}{a}) = h\left(\frac{l + \frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}}{1 + \frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}}\right) = h\left(\frac{l}{1 + \frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}} + \frac{\frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}}{1 + \frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}}\right) =$$

$$= h\left(\frac{l}{1 + \frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}} + A\right)$$

y claramente

$$h\left(\frac{l}{1 + \frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}} + A\right) \to h\,(l + A) \quad cuando \ \delta \to \infty$$

Asimismo cuando $\delta \to \infty$, $\bar{A}_x - > 0$ y $\bar{P}\ (\bar{A}_x) \to 0$. Es fácil ver que las funciones de distribución tienden a coincidir cuando el tipo de interés crece.

Aparentemente esta convergencia es más lenta segun crece la edad. Notemos que $\frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}$ tiende más despacio a cero al ser lógicamente $\bar{P}\ (\bar{A}_x)$ mayor.

6.- Para una cabeza de edad x consideremos un seguro temporal en el que en caso de fallecimiento el beneficiario recibe el capital asegurado, que supondremos unitario, más las primas pagadas hasta el momento del fallecimiento, que consideraremos anuales y constantes, capitalizadas al tipo de interés técnico i.

Empleando la hipótesis de pago del capital asegurado al final del año de fallecimiento, se pide:

a) Distribución de probabilidad del resultado L para esta póliza.

b) Cálculo de la prima anual y constante aplicando el principio de equivalencia actuarial.

c) Calculo de la varianza de L.

Solución:

Notemos que, en conjunto, tenemos un seguro temporal de capital asegurado variable. Representaremos por $P_{x:\overline{n}|}$ la prima anual constante y aceptaremos la hipótesis de pago del capital al final de año de fallecimiento. Así el capital asegurado sera

$$1 + P_{x:\overline{n}|}\ \ddot{s}_{\overline{1}|}$$

si el asegurado fallece a la edad x,

$$1 + P_{x:\overline{n}|}\ \ddot{s}_{\overline{2}|}$$

si fallece a la edad $x+1$, y así sucesivamente, hasta

$$1 + P_{x:\overline{n}|}\ \ddot{s}_{\overline{n}|}$$

si fallece a la edad $x+n-1$.

La variable aleatoria L se define fácilmente

$$L = \begin{cases} (1 + P_{x:n]}\ \ddot{s}_{\overline{K_x+1}|})\ v^{K_x+1} - P_{x:\overline{n}|}\ \ddot{a}_{\overline{K_x+1}|} & K_x = 0,1,2,...,n-1 \\ -P_{x:\overline{n}|}\ \ddot{a}_{\overline{n}|} & K_x = n, n+1, ... \end{cases}$$

ahora bien

$$(1 + P_{x:\overline{n}|}\ \ddot{s}_{\overline{K_x+1}|})\ v^{K_x+1} = v^{K_x+1} + P_{x:\overline{n}|}\ \ddot{a}_{\overline{K_x+1}|}$$

por lo que

$$L = \begin{cases} v^{K_x+1} & K_x = 0,1,2,...,n-1 \\ -P_{x:\overline{n}|}\ \ddot{a}_{\overline{n}|} & K_x = n, n+1, ... \end{cases}$$

Aplicando el principio de equivalencia actuarial, ya que

$$E(L) = \sum_{k=0}^{n-1} v^{K_x+1} \ {}_{k/}q_x - \sum_{k=n}^{\omega-x-1} P_{x:\overline{n|}} \ \ddot{a}_{\overline{n|}} \ {}_{k/}q_x = A_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} - P_{x:\overline{n|}} \ \ddot{a}_{\overline{n|}} \ {}_{n}p_x$$

de $E(L) = 0$, se sigue

$$P_{x:\overline{n|}} = \frac{A_{\overset{1}{x}:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{\overline{n|}} \ {}_{n}p_x}$$

En cuanto a la varianza de L, es claro que

$$Var(L) = E(L^2) = \sum_{k=0}^{n-1} (v^{K_x+1})^2 \ {}_{k/}q_x - \sum_{k=n}^{\omega-x-1} (P_{x:\overline{n|}} \ \ddot{a}_{\overline{n|}})^2 \ {}_{k/}q_x =$$

$$= {}^2 A_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} - \frac{(A_{\overset{1}{x}:\overline{n|}})^2}{{}_{n}p_x}$$

7.- Siendo

$$\mu_x = \frac{1}{110 - x} \quad x \geq 0 \ ; \ i = 0.03$$

Calcule la prima única pura y la prima anual continua y constante para un seguro vida entera de capital asegurado la unidad que se paga en el instante del fallecimiento para un asegurado de 30 años de edad.

Solución:

Sabemos que la prima única pura es la esperanza matemática del valor actual, esto es,

$$\bar{A}_{30} = \int_0^{80} (1.03)^{-t} \ \frac{1}{80} \ dt = -\frac{1}{80} \frac{(1 + 0.03)^{-t}}{\ln(1.03)} \Bigg]_0^{80} = 0.3831442799$$

En cuanto a la prima anual continua constante, basta tener en cuenta que

$$\bar{P}_{30} = \frac{\delta \ \bar{A}_{30}}{1 - \bar{A}_{30}} = \frac{Ln(1.03) \ 0.3831442799}{1 - 0.3831442799} = 0.01835970006$$

8.- Consideremos la operación de seguro contratada sobre una cabeza de edad x consistente en el cobro mientras viva y al principio de

cada año de un capital de cuantía $d = i/(1+i)$ (donde i es el tipo de interés técnico), y el cobro además por parte de los beneficiarios de una unidad monetaria al final del año en que fallezca el asegurado.

Supuesto que la operación se contrata a prima única, estúdiese la variable aleatoria L. Calcule asimismo la esperanza de L (prima única pura) y su varianza.

Solución:

Ciertamente se han contratado dos coberturas distintas: un seguro vida entera de capital asegurado unitario y una renta vitalicia inmediata ilimitada y prepagable. de cuantía anual d.

El valor actual de cada una de ellas ya ha sido estudiado en los capítulos 4 y 5, siendo

$$Z_1 = v^{K_x+1} \quad K_x = 0, 1, 2, ...$$

para el seguro vida entera, y

$$Z_2 = d\ \ddot{a}_{\overline{K_x+1|}} = 1 - v^{K_x+1} \quad K_x = 0, 1, 2, ...$$

para la renta.

La suma de estas variables aleatorias, es una variable que toma los valores

$$Z = Z_1 + Z_2 = 1 \quad K_x = 0, 1, 2, ...$$

Ciertamente

$$L = 1 - \Pi_x \quad K_x = 0, 1, 2, ...$$

Así, su esperanza matemática, prima única pura , es

$$\Pi_x = E(Z) = 1$$

Notemos que a este resultado se llega sin más que recordar la relación

$$d\ \ddot{a}_x + A_x = 1.$$

Por otra parte, la varianza de L es claramente

$$Var(L) = 0.$$

Sugerimos al lector una reflexión sobre el riesgo que comporta este tipo de póliza.

9.- Establezca la prima natural en los siguientes seguros:
a) Vida entera o temporal.
b) Integral.
Solución:

Representemos mediante P_k^n la prima natural correspondiente al año en que el asegurado posee la edad $x+k$

$$P_0^n \quad P_1^n \quad P_2^n \ldots\ldots\ldots\ldots P_{n-1}^n \quad \ldots\ldots$$

$$x \quad x+1 \quad x+2 \ldots\ldots\ldots\ldots x+n-1 \quad x+n\ldots\ldots$$

a) En este caso, bajo la hipótesis de pago del capital asegurado al final del año de fallecimiento, es claro que

$$P_k^n = v\; q_{x+k}$$

b) Supuesto una temporalidad de n años (recordemos que en caso de fallecimiento el capital asegurado se paga al final de año n),

$$P_k^n = v^{n-k}\; q_{x+k}$$

7.9 Apéndice. El Principio de Utilidad Nula

El Principio de Equivalencia Actuarial comentado en el apartado 7.2.1 no es el único principio de cálculo de primas que encontramos en la bibliografía actuarial, aunque sí el más usado en la práctica. En este Apéndice comentamos brevemente un principio alternativo denominado **Principio de la Utilidad Nula** (zero utility principle), muy riguroso desde el punto de vista teórico y del cual el Principio de Equivalencia Actuarial resulta ser un caso particular, aunque de difícil aplicación en la práctica. Para simplificar la exposición, consideraremos únicamente el caso de primas únicas, así como un periodo de exposición al riesgo no muy grande (por ejemplo un año).

El Principio de la Utilidad Nula se basa en la hipótesis de que la prima a pagar depende de las preferencias subjetivas de cada asegurado y de sus actitudes ante el riesgo, reflejadas en su función de utilidad. Asumiendo por tanto la existencia de tales funciones, y llamando W a la riqueza inicial del asegurado, U a su función de utilidad, S a la (incierta) siniestralidad a la que deberá hacer frente durante el periodo considerado y P a la prima (única) a pagar a cambio de transferir dicha siniestralidad a la empresa aseguradora, la teoría de la utilidad de Von Newmann y Morgenstern nos permite asegurar que la prima P deberá ser tal que

$$U(W-P)=E[U(W-S)]$$

El principio anterior se denomina **Principio de la Utilidad Nula**, y su interpretación es evidente. El primer miembro de la igualdad, $U(W-P)$, representa la utilidad de la cantidad (cierta) de riqueza resultante de restar a la riqueza inicial W del asegurado la prima que este paga por protegerse del riesgo. El segundo miembro, $E[U(W-S)]$, representa la utilidad (esperada) de la cantidad (incierta) de riqueza resultante de restar a la riqueza inicial W del asegurado la siniestralidad S a la que este debería hacer frente durante el periodo en caso de no asegurarse. El primer miembro, por tanto, representa la utilidad del asegurado después de pagar la prima, mientras que el segundo miembro representa su utilidad después de pagar el coste de los siniestros. Suponiendo, como es habitual, que las funciones de utilidad son crecientes, si la prima fuese demasiado alta, de forma que el primer miembro fuese menor que el segundo, el posible asegurado preferiría pagar él mismo los siniestros; si fuese mayor el primer miembro que el segundo, el asegurado preferiría evidentemente pagar la prima que los siniestros, e incluso aceptaría pagar una prima algo mayor. El Principio de Utilidad Nula representa la situación límite entre las dos anteriores.

El Principio de Utilidad Nula resulta impecable desde el punto de vista teórico, pero presenta serios inconvenientes que hacen inviable su aplicación práctica, como el que la prima dependa de las preferencias del asegurado, o la determinación efectiva de las funciones de utilidad. En la práctica, las empresas suelen aplicar el Principio de Equivalencia Actuarial, que en el contexto de primas puras únicas que estamos suponiendo aquí establece que

$$P=E[S]$$

Es fácil comprobar que dicho Principio de Equivalencia Actuarial resulta ser un caso particular del Principio de Utilidad Nula, el caso en el que la función de utilidad es lineal:

$$U(x)=a.x+b$$

Evidentemente, en tal caso se tiene:

$$U(W-P)=a(W-P)+b$$

$$E[U(W-S)]=a(W-E[S])+b$$

y, por tanto,

$$U(W-P)=E[U(W-S)]\Longleftrightarrow P=E[S]$$

Como ejercicio, el lector puede tratar de extender el Principio de Utilidad Nula al caso de periodos de exposición al riesgo más largos, así como de primas periódicas, y comprobar posteriormente que en el caso de funciones de utilidad lineales se obtiene precisamente el Principio de Equivalencia Actuarial tal y como está enunciado en 7.2.1.

Es preciso comentar, finalmente, que el fundamento tradicional del Principio de Equivalencia Actuarial no reside en la Teoría de la Utilidad sino en la Ley de los Grandes Números. El lector puede encontrar un desarrollo más extenso de esta fundamentación en el apéndice del capítulo 9.