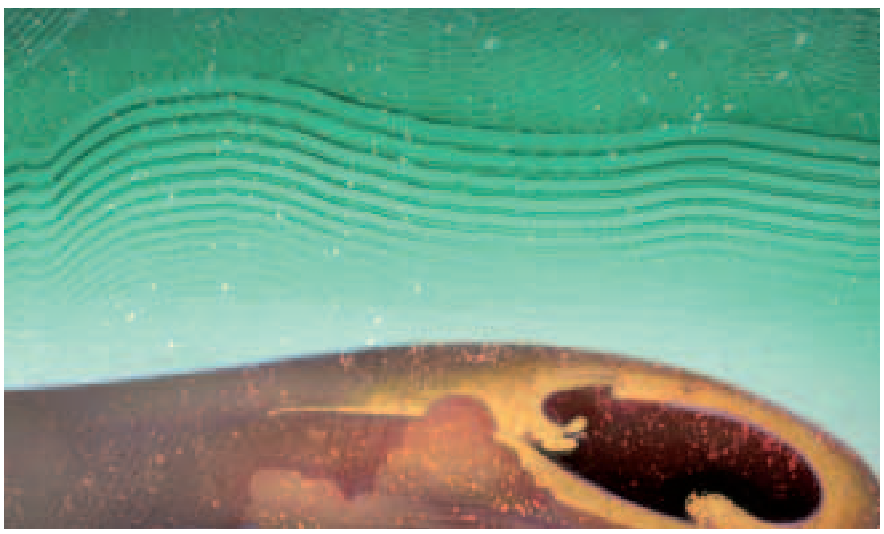
Nuevas oportunidades de diversificación de riesgos:

Valoración

Los derivados de varianza, volatilidad y correlación (derivados de volatilidad) están siendo cada vez más negociados, ya que estos instrumentos nos permiten nuevas oportunidades de diversificación de riesgos y, como señala la experiencia empírica, proporcionan coberturas muy adecuadas cuando nos enfrentamos a situaciones de inestabilidad en los mercados. Además, muchos 'hedge funds', y otros inversores amantes del riesgo, venden regularmente estos productos debido a su elevada prima de riesgo. Hay dos tipos de enfoques que se pueden utilizar para valorar y cubrir derivados de volatilidad. El primero hace uso de un modelo dinámico de volatilidad estocástica, por ejemplo



RAQUEL BALBÁS APARICIO*
Departamento de Economía Financiera y Actuarial
Universidad Complutense de Madrid

**Este trabajo consiguió el premio a la mejor ponencia presentada en la Tercera Reunión de Investigación en Seguros y Gestión del Riesgo (RIESGO 2009), celebrada en Madrid los días 18 y 19 de junio.*

y cobertura de derivados de volatilidad

el modelo de Heston, y el segundo utiliza carteras de réplica compuestas por infinitas opciones. Este último tiene la ventaja de que la mayoría de las opciones pueden negociarse en el mercado real, de modo que tenemos un precio de mercado, incluso con los costes de transacción generados por la clásica horquilla de precios. Sin embargo, en la práctica es imposible utilizar infinitas opciones, lo cual genera errores de cobertura. Este artículo trata con este tipo de réplicas y proporciona aproximaciones óptimas compuestas únicamente por un número finito de opciones, proporcionando una horquilla de precios alternativa para el derivado de volatilidad, así como una estrategia de cobertura dinámica. Se pueden utilizar las modernas funciones generales de riesgo (medidas coherentes o acotadas por la media, medidas de desviación, etc.) para construir tanto la cartera de cobertura como la horquilla de precios del derivado de volatilidad.

Cuando compramos un derivado de volatilidad «apostamos» o «pronosticamos» un valor numérico que será el alcanzado en una fecha futura por la volatilidad realizada de cierto activo financiero (activo subyacente). Ganaremos (perderemos) dinero en la medida en que esta volatilidad realizada sea mayor (menor) que el valor «apostado». Los beneficios (pérdidas) del vendedor coinciden con las pérdidas (beneficios) del comprador de volatilidad.

Los derivados de varianza y volatilidad se están convirtiendo en activos por los que hay un interés creciente en los mercados de capitales. Su rendimiento no depende de si estamos en épocas alcistas o bajistas, sino que se relaciona con la velocidad a la que se producen los cambios de precios en los mercados. Esto ha hecho que sean instrumentos muy interesantes a la hora de diversificar carteras. Así, mientras la evidencia empírica pone de manifiesto que los distintos índices regionales o sectoriales muestran un altísimo grado de correlación, especialmente cuando «las cosas van mal», que es cuando desearíamos que la diversificación fuera más eficaz, los derivados de volatilidad tienen correlación muy baja con estos índices, y además, esta correlación es negativa, lo que compensa posibles pérdidas en los mercados de contado. Por consiguiente, son un buen vehículo de diversificación de riesgos.

Además, la correlación negativa aludida ha hecho que numerosos inversores los compren para «salvarse» en épocas bajistas. Empíricamente se ha observado que este hecho ha provocado primas usualmente altas, es decir, los vendedores de varianza o volatilidad suelen «ganar casi siempre» y «perder con muy poca frecuencia» (Demeterfi *et al.*, 1999). Aprovechando este hecho, muchos *hedge funds* han tomado posiciones vendedoras en los últimos años, pero asumen un fuerte riesgo de asimetría. En efecto, nuevamente la experiencia muestra que las pérdidas, aunque poco frecuentes, suelen ser mucho mayores que las habituales ganancias (Demeterfi *et al.*, 1999).

Todo lo anterior justifica el interés creciente que estos derivados han despertado entre los inversores. El volumen diario de contratación ha crecido de forma permanente, llegando a los 30 o 35 millones de dólares de nominal en índices de Estados Unidos en 2008 (Broadie y Jain, 2008). Estos activos se empezaron a negociar en mercados organizados hace aproximadamente dos años y medio, cuando el CBOE (Chicago Board Option Exchange) comenzó a comercializar el VIX (sobre el SP500), el VXD (sobre el Dow Jones Industrial Average) y el VXN (Sobre el NASDAQ100), entre otros (www.cboe.com).

Además, recientemente se empezaron a negociar opciones binarias o digitales sobre el VIX en este mercado. También se han creado fondos de volatilidad y varianza, como por ejemplo el Euroption Strategic Fund, que únicamente trata con derivados de volatilidad, principalmente sobre índices europeos (www.europtionfund.com). Más recientemente se han empezado a negociar derivados de volatilidad en mercados organizados europeos, como por ejemplo, el EUREX, que actualmente negocia futuros sobre *swaps* de volatilidad (www.eurexchange.com).

La asimetría de rendimientos provoca la necesidad de cubrir las posiciones vendedoras (y compradoras), lo que conduce a la necesidad de modelos de valoración apropiados. Esto ha hecho despertar también el interés de los investigadores teóricos. Así, Carr y Madam (1998) ya dan métodos de valoración bajo supuestos simples. Mucho más compleja es la metodología propuesta en Carr *et al.* (2005) o Carr y Wu (2006), don-

LOS DERIVADOS DE VARIANZA Y VOLATILIDAD SE ESTÁN CONVIRTIENDO EN ACTIVOS POR LOS QUE EXISTE UN CRECIENTE INTERÉS EN LOS MERCADOS DE CAPITALES; SON INSTRUMENTOS MUY ATRACTIVOS A LA HORA DE DIVERSIFICAR CARTERAS

de se utilizan varios modelos de volatilidad estocástica. Una de las conclusiones importantes de todos estos análisis es la sensibilidad, qué precio teórico y estrategia de cobertura tienen frente al modelo de valoración utilizado, así como a los parámetros estimados para el modelo (véase Moskowitz, 2003).

Un procedimiento alternativo es la utilización de «carteras réplicas compuestas por infinitas opciones europeas», propuesto por Demeterfi *et al.* (1999), quienes se basaron en ideas previas de Neuberger (1994), que no estudió derivados de volatilidad pero sí réplicas de la función logaritmo con infinitas opciones europeas. Demeterfi *et al.* (1999) probaron que el *swap* de varianza se puede replicar y cubrir con infinitas opciones europeas. El método es altamente interesante, pues las opciones europeas son fáciles de encontrar en el mercado y, al tener precio disponible, generan un precio de mercado y una estrategia de cobertura del *swap* de varianza que sólo usa datos de mercado, y, por consiguiente, es independiente de cualquier modelo teórico de valoración.

Demeterfi *et al*. (1999) muestran cómo usar su metodología en la práctica, si bien no miden adecuadamente el error que se comete al negociar sólo con un número finito de opciones. Es obvio que en la realidad no puede haber carteras que incorporen infinitos activos.

Los desarrollos de Demeterfi *et al*. (1999) se han combinado con frecuencia con la fórmula de Black y Scholes y el efecto «sonrisa de la volatilidad» (Carr y Lee, 2007), de forma que se puedan incorporar opciones sintéticas en la cartera réplica si el error se considera excesivo. Pero sigue sin tenerse un criterio de error claro, y la simple interpolación de opciones puede distorsionar sensiblemente los datos de mercado, especialmente cuando esta sonrisa es muy pronunciada (Branger y Schlag, 2004). Por tanto, la mayor ventaja del método, la independencia del modelo y la sola dependencia del mercado, parece desvanecerse ligeramente.

Hasta donde nosotros sabemos, Broadie y Jain (2008) son los primeros en utilizar un criterio objetivo para medir el error cometido. Para tal fin usan la desviación típica de la rentabilidad de la diferencia entre la cartera de cobertura compuesta por opciones europeas y el *swap* de varianza cubierto. Además, Broadie y Jain (2008) dan un segundo paso importante al usar también una cartera con infinitas opciones para replicar el *swap* de volatilidad. En este caso, no obstante, asumen el modelo de Heston con volatilidad estocástica para explicar el comportamiento del subyacente.

El enfoque de Broadie y Jain (2008) presenta dos contribuciones importantes, ya que extiende el análisis a otro activo y mide el error, pero tiene todavía inconvenientes. Como se ha dicho, los derivados de volatilidad muestran fuerte asimetría, con lo que la desviación típica es poco apropiada para medir errores (no es compatible con la dominancia estocástica de segundo orden, Ogryczak y Ruszczynski, 1999). Además, la desviación típica no da el error en términos monetarios, y su medida acotada por la media asociada, que sí lo hace, no es coherente (Rockafellar *et al*., 2006).

En este trabajo utilizamos las teorías desarrolladas en Balbás *et al.* (2009a) y, especialmente, en Balbás *et al.* (2009b), de forma que podamos valorar y cubrir derivados de volatilidad con un número finito de opciones, minimizando el error cometido mediante medidas de riesgo coherentes, acotadas por la media, y compatibles con la dominancia estocástica. Ejemplos de estas medidas de riesgo son, entre otras, el *Conditional Value at Risk* o CVaR (también llamado *Tail Conditional Expectation*, *Average Value at Risk* o *Expected Shortfall,* Rockafellar *et al*., 2006), la *Dual Power Transform* (Wang, 2000), la medida de Wang (Wang, 2000), el *Compatible* CVaR (Balbás y Balbás, 2009) o el *Weighted* CVaR (Cherny, 2006).

Además, ampliamos la gama de derivados a los que se aplica la metodología, y, como novedades adicionales, utilizamos también opciones digitales europeas y consideramos los costes de transacción, que pueden ser altos incluso en los mercados tradicionales y líquidos de opciones.

En la sección siguiente describiremos los derivados de volatilidad, varianza y covarianza más habituales. En la tercera veremos cómo replicar cualquier pago final mediante una cartera de infinitas opciones digitales y europeas, y en la cuarta veremos cómo esto nos permite replicar o aproximar mediante opciones digitales y europeas un derivado de volatilidad. La quinta sección tendrá como objetivo hacer ver cómo la metodología es útil aunque haya sólo un número finito de opciones y se incorporen los costes de transacción. En efecto, la metodología de valoración y cobertura de Balbás *et al*. (2009b) puede aplicarse perfectamente, y permite minimizar la influencia de los inconvenientes mencionados. La última sección presenta las conclusiones más importantes del trabajo.

Descripción de Algunos Derivados de Varianza y Volatilidad

Swaps de varianza y volatilidad

En esencia, un comprador de varianza o volatilidad «apuesta» por un valor que alcanzará la futura varianza/volatilidad del subyacente. El comprador ganará dinero si la varianza/volatilidad realizada es mayor que su valor apostado, y lo perderá en otro caso. Las ganancias/pérdidas del vendedor coincidirán con las pérdidas/ganancias del comprador.

Consideremos un horizonte temporal (o plazo de expiración del derivado) T y un conjunto finito de fechas de negociación

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T.$$

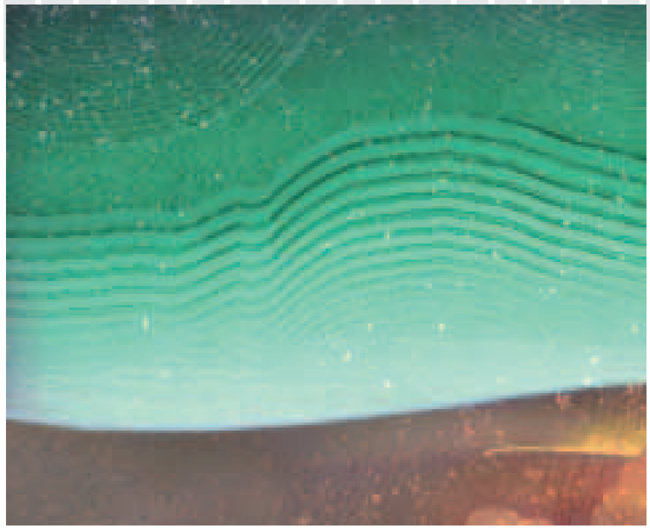
La varianza realizada en $[0, T]$ es igual a

$$\overline{W}^T(n) = \frac{1}{n(\Delta T)} \sum_{i=1}^{n} r_i^2, \qquad (1)$$

donde

$$r_i = L\left(\frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}}\right),$$

es una rentabilidad logarítmica y donde $\Delta t = t_i - t_{i-1}, i = 1, 2, \ldots, n$ es un dato conocido por los agentes. Análogamente, la volatilidad realizada se representa como la raíz cuadrada de la expresión anterior, es decir,



$$\overline{V}^T(n) = \sqrt{\frac{1}{n(\Delta T)} \sum_{i=1}^{n} r_i^2}. \qquad (2)$$

En la práctica, los mercados financieros utilizan normalmente datos diarios, es decir,

$$(\Delta T) = \frac{1}{252}.$$

Una posición larga en un *swap* de varianza implica el pago de un precio (numérico) $\overline{W}_0^T$ en $t = 0$, y a cambio se recibe la cantidad aleatoria $\Phi \overline{W}^T(n)$ en $t = T$, siendo $\Phi > 0$ un valor nominal conocido por los agentes, y que representa el valor de un punto de volatilidad. Análogamente, el comprador de un *swap* de volatilidad debe pagar $\overline{V}_0^T$ en $t = 0$ y recibir el pago aleatorio $\Phi \overline{V}^T(n)$ en $t = T$.[1]

En la próxima sección proporcionaremos fórmulas para valorar y cubrir ambos activos.

[1] En realidad, el precio inicial (numérico) de un *swap* de varianza o volatilidad se paga normalmente en $t = T$ también, pero nosotros no vamos a considerar esta situación. En cualquier caso, la diferencia entre los dos escenarios no es relevante ya que en el segundo caso el precio teórico sería obviamente igual al precio en el primer caso multiplicado por el factor de capitalización $e^{r_f T}$. Análogamente, la estrategia de réplica sería casi idéntica en ambos casos. Comentarios similares serían pertinentes si utilizáramos futuros u opciones sobre *swaps* de varianza y *swaps* de covarianza.

Futuros y opciones sobre *swaps* de varianza

Una posición larga en un futuro sobre *swap* de varianza con vencimientos en $T_1 < T_2$ implica aceptar en $t = 0$ el compromiso de comprar un *swap* de varianza en T_1 con vencimiento en T_2.

Sencillas operaciones aritméticas permiten comprobar que el futuro sobre el *swap* de covarianza se valora y replica con combinaciones de estos *swaps.* Concretamente, se tiene:

el futuro sobre swap *de varianza con vencimientos en T_1 y T_2 se replica mediante la compra de* $\frac{T_2}{T_2 - T_1}$ swaps *de varianza con vencimiento en T_2, la venta de* $\frac{T_2}{T_2 - T_1}$ swaps *de varianza con vencimiento en T_1 y tomando prestado el precio de la estrategia anterior durante el intervalo de tiempo $[0, T_1]$. Por consiguiente, el precio de un futuro sobre* swap *de varianza viene dado por*

$$\overline{W}_0^{(T_1,T_2)} = \left(\frac{T_2}{T_2 - T_1}\overline{W}_0^{T_2} - \frac{T_1}{T_2 - T_1}\overline{W}_0^{T_1}\right)e^{r_f T_1}, \qquad (3)$$

o $e^{r_f T_2}\,\overline{W}_0^{(T_1,T_2)}$ si el activo se paga en $t = T_2$

Una **opción sobre *swap* de varianza,** también llamada ***swaption,*** se puede introducir de distintas formas que no son equivalentes, aunque todas ellas son bastante análogas desde un punto de vista teórico, y no hay diferencias significativas entre las aproximaciones que nos permiten valorarlas y cubrirlas. En cualquier caso, debemos fijar las características de la opción que vamos a tratar. Así, consideraremos que el comprador de una *call (put)* europea sobre *swap* de varianza con vencimientos en $T_1 < T_2$ tiene el derecho (no la obligación) de comprar (vender) un *swap* de varianza en T_1 con vencimiento en T_2, y a cambio pagará (recibirá) el precio de ejercicio E. El precio de la opción se paga en $t = 0$, mientras que el precio de ejercicio se paga en T_1.

Swaps de covarianza

En este caso, el comprador (vendedor) apuesta la covarianza que habrá entre dos activos financieros, y ganará dinero en la medida en que el valor apostado quede por debajo (encima) del que posteriormente se realizará.

Consideremos un conjunto finito de fechas de negociación

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T.$$

Consideremos también dos activos subyacentes cuyos procesos de precios vendrán denotados por S_t y $\overline{S}_t$. Su covarianza realizada en $[0, T]$ viene dada por

$$\overline{C}^T(n) = \frac{1}{n(\Delta T)}\sum_{i=1}^{n} r_i \overline{r}_i,$$

donde $\overline{r}_i = L\left(\frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}}\right)$. El comprador de un *swap* de covarianza con vencimiento en T pagará en $t = 0$ el precio numérico $\overline{C}_0^T$, y recibirá el pago aleatorio $\Phi\overline{C}^T(n)$ en $t = T$.

VALORACIÓN Y RÉPLICA DE UN PAGO ARBITRARIO

En esta sección consideraremos un modelo de un periodo con dos fechas de negociación, $t = 0$ (momento actual) y $t = T$ (momento futuro arbitrario). r_f será el tipo libre de riesgo entre 0 y T, lo cual implica que $e^{r_f T}$ $(e^{-r_f T})$ será el factor de capitalización (descuento)

EL VOLUMEN DIARIO DE CONTRATACIÓN DE LOS DERIVADOS DE VARIANZA Y VOLATILIDAD HA CRECIDO DE FORMA PERMANENTE, LLEGANDO A LOS 30 O 35 MILLONES DE DÓLARES DE NOMINAL EN ÍNDICES DE ESTADOS UNIDOS EN EL AÑO 2008

para el intervalo de tiempo *[0,T]*. Si denotamos el precio de un activo por *S*, entonces un subíndice t indicará cuándo estamos valorando ese precio. Así, S_0 representará su precio actual (numérico), mientras S_T es el precio (aleatorio) en *T*, y se podrían utilizar notaciones similares si reemplazáramos *S* por un símbolo diferente.

Construiremos combinaciones de opciones europeas y/o digitales que replican pagos finales arbitrarios (en *T*). Es importante recordar que una *call (put)* europea paga la cantidad $C_T(k) = (S_T - k)_+ (P_T(k) = (k - S_T)_+)$ en la fecha de vencimiento *T*, siendo S_T el precio final del activo subyacente y *k* el precio de ejercicio de la opción[2]. De forma similar, una *call* digital pagará

$$D_T(k) = \begin{cases} 1, & S_T > k \\ 0, & S_T < k \end{cases},$$

mientras el pago de una *put* digital análoga será $1 - D_T(k)$ En general, asumiremos que la distribución final de la variable aleatoria S_T es conocida.

Hay dos sencillas fórmulas matemáticas que fundamentan el uso de infinitas opciones, digitales o europeas, a la hora de replicar un pago final $g(S_T)$ que depende del valor final de S_T. En efecto, del cálculo diferencial se sabe que

$$g(S) = g(a) + \int_a^S g'(k)dk \qquad (4)$$

y

$$g(S) = \left(g(h) - hg'(h)\right) + Sg'(h) + \int_S^h g''(k)(k - S)dk \qquad (5)$$

Si tomamos $S = S_T$, las fórmulas anteriores sugieren que el valor del pago $g(S_T)$ es suma de dos pagos si observamos (4), o de tres si observamos (5). Centrándonos en (5), $g(S_T)$ se alcanza comprando el activo libre de riesgo en cantidad adecuada (primer sumando, cuyo valor no depende de *S*), el subyacente, también en la proporción requerida, y una tercera cartera cuyo pago venga dando por la integral. Si para intuir mejor los resultados desde el punto de vista económico/financiero asimilamos la integral a una suma infinita, resulta que esta integral se alcanza comprando $g''(k)dk$ unidades de un activo que pague *k–S* euros, es decir, $g''(k)dk$ unidades de *calls* o *puts* europeas con un precio de ejercicio *k* que se mueve en la horquilla *[S, h]*. En definitiva, (4) pone de manifiesto que el derivado de S_T, $g(S_T)$, se puede replicar con carteras de infinitas opciones digitales, mientras que (5) conduce a un resultado similar, pero usando opciones europeas.

VALORACIÓN Y COBERTURA DE DERIVADOS DE VARIANZA, COVARIANZA Y VOLATILIDAD

Estudiemos de momento algunas propiedades de las funciones

$$g_1(x) = (x - 1) - L(x)$$

y[3],

$$g_2(x) = \sqrt{(x - 1) - L(x)}.$$

Es fácil ver que *g1* y sus derivadas de cualquier orden están bien definidas para $x > 0$. Asimismo, *g2* está bien definida para $x > 0$, y sus derivadas de cualquier orden están bien definidas para $x > 0$ y $x \neq 1$. Más aún, tenemos un salto de la derivada en $x = 1$, pues las derivadas laterales son

$$g_2'(1)^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}, g_2'(1)^- = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (6)$$

[2] De ahora en adelante denotaremos $x_+ = Max\{x,0\}$

[3] En este trabajo, $L(\,)$ denotará el logaritmo natural o neperiano.

Volvamos ahora a los derivados de volatilidad. Supongamos que F_0^T refleja el precio futuro del activo subyacente con vencimiento en T[4]. Entonces, bajo supuestos generales (véase Neuberger, 1994, y Demeterfi, 1999), se puede probar que el precio del *swap* de varianza es igual al de un activo cuyo pago final es

$$g_{vas}(S_T) = \frac{\Phi}{T}\left[\frac{S_T}{F_0^T} - 1 - L\left(\frac{S_T}{F_0^T}\right)\right]. \qquad (7)$$

Consecuentemente, el precio del *swap* de volatilidad se aproxima por el del activo cuyo pago final en T es

$$g_{vas}(S_T) = \frac{\Phi}{T}\sqrt{\frac{S_T}{F_0^T} - 1 - L\left(\frac{S_T}{F_0^T}\right)}. \qquad (8)$$

Por consiguiente, si aplicamos los argumentos de réplica infinita de la sección anterior, tenemos:

Las siguientes estrategias replican un activo cuyo precio coincide con el del *swap* de varianza:

Estrategia_VarS_1:

i) Comprando $\frac{\Phi}{T}\left[\frac{1}{F_0^T}-\frac{1}{k}\right]dk$ *calls* digitales para cada precio de ejercicio k, $F_0^T < k < \infty$.

ii) Vendiendo $\frac{\Phi}{T}\left[\frac{1}{F_0^T}-\frac{1}{k}\right]dk$ *puts* digitales para cada precio de ejercicio k,

$$0 < k < F_0^T.$$

Estrategia_VarS_2:

i) Comprando $\frac{\Phi}{T}\frac{1}{k^2}dk$ *puts* europeas con precio de ejercicio k, $0 < k < F_0^T$.

ii) Comprando $\frac{\Phi}{T}\frac{1}{k^2}dk$ *calls* europeas con precio de ejercicio k, $F_0^T < k < \infty$.

Además,

$$W_0^T = \frac{\Phi}{T}\int_0^{F_0^T}\left[\frac{1}{F_0^T}-\frac{1}{k}\right](1-D_0(k))dk + \frac{\Phi}{T}\int_{F_0^T}^{\infty}\left[\frac{1}{F_0^T}-\frac{1}{k}\right]D_0(k)dk,$$

donde $D_0(k)$ representa el precio actual de la *call* digital con precio de ejercicio k. Análogamente,

$$W_0^T = \frac{\Phi}{T}\int_0^{F_0^T}\frac{P_0(k)}{k^2}dk + \frac{\Phi}{T}\int_{F_0^T}^{\infty}\frac{C_0(k)}{k^2}dk$$

siendo $P_0(k)$ y $C_0(k)$ el precio actual de una *put* y *call* europeas con precios de ejercicio k.

De acuerdo con lo que ya probamos en la sección segunda, el futuro sobre *swap* de varianza es fácilmente replicable mediante la combinación de *swaps* de varianza, y, por consiguiente, mediante la combinación de infinitas opciones digitales o europeas.

Con argumentos similares, y teniendo en cuenta (6), las siguientes estrategias aproximan la réplica del *swap* de volatilidad:

Estrategia VolS_1:

i) Compra de

$$\frac{1}{F_0^T}\frac{\Phi}{\sqrt{T}}\frac{k-1}{\sqrt{g_{vas}(k)}}dk$$

calls digitales para cada precio de ejercicio

$$k \in (0,\infty), k > F_0^T$$

ii) Venta de (19) *puts* digitales para cada precio de ejercicio $k \in (0,\infty), k < F_0^T$

LAS TEORÍAS DE BALBAS ET AL. PERMITEN VALORAR Y CUBRIR DERIVADOS DE VOLATILIDAD CON UN NÚMERO FINITO DE OPCIONES, MINIMIZANDO EL ERROR COMETIDO MEDIANTE MEDIDAS DE RIESGO COHERENTE Y COMPATIBLES CON LA DOMINANCIA ESTOCÁSTICA

Estrategia VolS_2:

i) Endeudamiento en $\frac{\Phi}{\sqrt{2T}}\frac{F_0^T-1}{F_0^T}e^{-r_f T}$ euros en el activo sin riesgo.

ii) Venta de $\frac{\Phi}{\sqrt{2T}}\frac{F_0^T-1}{\left(F_0^T\right)^2}$ unidades del activo subyacente.

iii) Compra de

$$4F_0^T\frac{\Phi}{\sqrt{T}}\frac{g_{vas}(k)^2-(k-F_0^T)^2}{2k\sqrt{g_{vas}(k)}}dk$$

puts europeas con precios de ejercicio *k* para cada $k\in(0,F_0^T)$

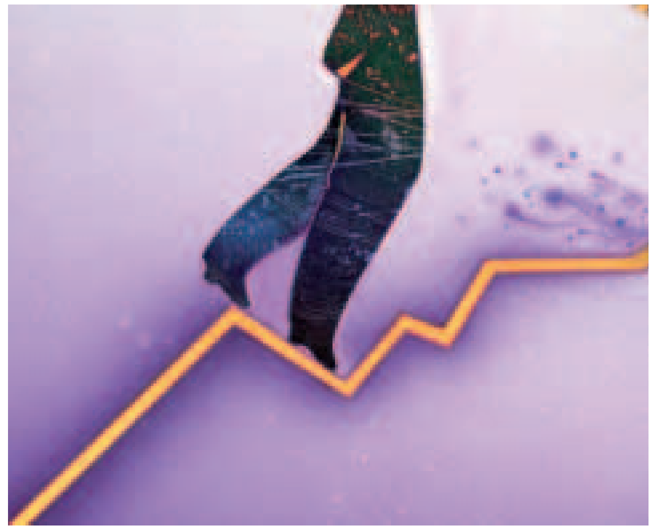
iv) Compra de (20) *calls* europeas con precio de ejercicio *k* para cada $k\in(F_0^T,\infty)$

v) Compra de $\frac{2}{\sqrt{2}}$ *calls* europeas con precio de ejercicio F_0^T [5].

De forma análoga se pueden formar carteras compuestas por infinitas opciones que aproximen la réplica de un futuro sobre *swap* de varianza, de un *swap* de covarianza o de un *swaption* (opción sobre *swap*) de varianza o volatilidad.

EFECTO DE LAS IMPERFECCIONES Y DE LA FALTA DE INFINITAS OPCIONES

La falta de infinitas opciones y la existencia de costes de transacción en los mercados de opciones europeas pueden tener un claro efecto en la efectividad de las estrategias de réplica anteriores. Como dijimos en la introducción del trabajo, Demeterfi *et al.* (1999) ignoran esta cuestión en su análisis del *swap* de varianza, mientras que Broadie y Jain (2008) minimizan el error cometido a través de la varianza de la rentabilidad de la cartera global (compuesta por el derivado de volatilidad a cubrir más la estrategia de cobertura). Pero, como también se dijo, la fuerte asimetría, tanto de los rendimientos de las opciones europeas como de los derivados de volatilidad, hacen que la varianza de la rentabilidad sea una medida de riesgo inadecuada, porque no es compatible con las funciones de utilidad habituales.



Recientemente se han introducido nuevas funciones de riesgo que son capaces de medir éste en términos monetarios, que se suelen interpretar en términos de requerimientos de capital, y que con frecuencia son compatibles con la dominancia estocástica de segundo orden. Importantes ejemplos son las medidas coherentes del riesgo (Artzner *et al.*, 1999) y las acotadas por la media (Rockafellar *et al.*, 2006). Casos concretos son el *Conditional Value at Risk* o CVaR (también llamado *Tail Conditional Expectation*, *Average Value at Risk* o *Expected Shortfall*, Rockafellar *et al.*, 2006), la *Dual Power Transform* (Wang, 2000), la medida de Wang (Wang, 2000), el *Compatible* CVaR (Balbás y Balbás, 2009) o el *Weighted* CVaR (Cerny, 2006), entre muchos otros.

4 Si la relación estándar de paridad contado/futuro debe cumplirse, entonces tendremos $F_0^T=\left(S_0-D\right)e^{r_f T}$, siendo *D* el valor actual de los dividendos a pagar antes de *T*, aunque, por el momento, no impondremos el cumplimiento de esa expresión.

5 Igual que en el resultado anterior, las estrategias anteriores nos proporcionan fórmulas concretas para el precio del *swap* de volatilidad, aunque las expresiones son un poco más complicadas en este caso. Por ejemplo, la estrategia_VolS_1 implica que

$$V_0^T=\frac{1}{F_0^T}\frac{\Phi}{\sqrt{T}}\left[\int_{F_0^T}^{\infty}\left[\frac{k-1}{g_{vas}(k)}\right]D_0(k)dk-\int_0^{F_0^T}\left[\frac{k-1}{g_{vas}(k)}\right](1-D_0(k))dk\right].$$

Balbás *et al.* (2009b) han introducido un nuevo método de valoración y cobertura que se fundamenta en las propiedades de las funciones de riesgo anteriores. Básicamente, estos autores consideran el precio de la estrategia de cobertura más los requerimientos de capital representados por la función de riesgo, y, mediante la minimización de esta suma, obtienen un precio *bid* (o de compra) y otro *ask* (o de venta) para un nuevo activo a valorar y cubrir. Análogamente, resolviendo el problema de optimización, se da la estrategia óptima de cobertura para una compra (venta) del nuevo activo.

Esta metodología es perfectamente aplicable para resolver el problema que ahora nos ocupa. Es decir, la falta de infinitas opciones se puede solventar mediante la minimización del riesgo residual en el que se incurre al utilizar sólo un número finito, más el coste de la cartera de opciones. Esto, además, permite incorporar las fricciones y/o la falta de liquidez del mercado de opciones. El método nos proporciona precios de compra y venta óptimos (que minimizan la horquilla) para los derivados de volatilidad, así como la forma más barata de cubrirlos.

La teoría desarrollada en Balbás *et al.* (2009a) y Balbás *et al.* (2009b), y muy especialmente en este último, proporciona duales y algoritmos apropiados para resolver los problemas de optimización resultantes.

CONCLUSIONES

Los derivados de varianza y volatilidad son cada vez más interesantes, tanto para inversores como para teóricos. Son instrumentos muy adecuados en la diversificación de riesgos, ya que permiten solventar, al menos parcialmente, los inconvenientes generados por las altas correlaciones que se observan entre diferentes activos y mercados, especialmente en épocas convulsas y bajistas en los mercados de capitales.

También son activos muy atractivos para inversores especializados capaces de realizar buenas coberturas. En efecto, la capacidad de estos derivados para diversificar riesgos ha provocado que sus primas suelan ser altas, con los consecuentes beneficios potenciales para los vendedores.

Son instrumentos caracterizados, entre otras muchas propiedades, por la fuerte asimetría de sus rendimientos, así como por las colas pesadas de los mismos. Estos hechos no deben olvidarse. En particular, nunca debe utilizarse la varianza para estimar su riesgo, por cuanto esta medida de dispersión no es compatible con las funciones de utilidad habituales (con la dominancia estocástica de segundo orden) cuando se dan estas circunstancias.

Con respecto a su valoración y cobertura, la literatura previa los ha estudiado mediante técnicas diversas, si bien aquellas que se basan en la utilización de infinitas opciones europeas parecen ser más apropiadas, por cuanto usan datos de mercado, y son más independientes de los modelos teóricos dinámicos y estocásticos de valoración.

Pero el uso en la práctica de sólo un número finito de opciones provoca que se cometa un error que hasta ahora no ha sido fácil de medir.

Este trabajo ha pretendido contribuir a la literatura de varias maneras. Por un lado, se ha ampliado el número de activos al que se le aplica la metodología de la réplica con opciones. Se han utilizado también las opciones digitales y, mucho más importante, se han incorporado los costes de transacción y se han medido los errores usando medidas generales de riesgo, interpretables en términos de posibles pérdidas económicas (VaR, CVaR, *Weighted* CVaR, etc). Estas medidas son, adicionalmente, coherentes y compatibles con la dominancia estocástica de segundo orden.

Palabras clave:
Derivado de volatilidad, cartera pseudo-réplica, medida de riesgo, optimización de riesgos.

REFERENCIAS

- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M. y Heath, D. , 1999. «Coherent measures of risk». Mathematical Finance, 9, 203-228.
- Balbás, A. y Balbás, R., 2009. «Compatibility between pricing rules and risk measures: The CCVaR». RACSAM, 103, en prensa.
- Balbás, A., Balbás, R. y Garrido, J., 2009b. «Extending pricing rules with general risk functions». European Journal of Operational Research (en prensa) doi:10.1016/j.ejor.2009.02.015.
- Balbás, A., Balbás, R. y Mayoral, S., 2009a. Portfolio choice problems and optimal hedging with general risk functions: A simplex-like algorithm. European Journal of Operational Research, 192, 2, 603-620.
- Branger, N. y Schlag, C., 2004. «Why in the index smile so steep?» Review of Finance, 8, 109-127.
- Broadie, M. y Jain, A., 2008. «Pricing and hedging volatility derivatives». Journal of Derivatives, 15, 3, 7-24.
- Carr, P. y Madam, D., 1998. «Towards a theory of volatility trading». In Jarrow, R. (ed), Volatility: New Estimation Techniques for Pricing Derivatives, RISK Publications, London.
- Carr, P., Madam, D., Geman, H. y Yor, M., 2005. «Pricing options on realized variance». Finance & Stochastics, 9, 453-475.
- Carr, P. y Lee, R., 2007.«Realized volatility and variance: Options via swaps». Risk, May, pp 76-83.
- Carr, P. y Wu, L., 2006. «A tale of two indices». Journal of Derivatives, Spring, pp 13-29.
- Cherny, A.S., 2006. «Weighted V@R and its properties». Finance & Stochastics, 10, 367-393.
- Luenberger, D.G.,1969. «Optimization by vector spaces methods». John Wiley & Sons, New York.
- Moskowitz, T., 2003. «An analysis of covariance risk and pricing anomalies». Review of Financial Studies, 16, 417-457.
- Nakano, Y., 2004. «Efficient hedging with coherent risk measure». Journal of Mathematical Analysis and Applications, 293, 345-354.
- Neuberger, A.J., 1994. «The log contract». Journal of Portfolio Management, 20, 2, 74-80.
- Rockafellar, R.T., Uryasev, S. y Zabarankin, M. , 2006. «Generalized deviations in risk analysis». Finance & Stochastics, 10, 51-74.
- Schied, A. 2007. «Optimal investments for risk- and ambiguity-averse preferences: A duality approach». Finance & Stochastics, 11, 107-129.
- Skintzi, V.D. y Refenes, A. N., 2006. «Volatility spillovers and dynamic correlation in European bond markets». Journal of International Financial Markets, Institutions and Money, 16, 1, 23-40.
- Wang, S.S., 2000. «A class of distortion operators for pricing financial and insurance risks». Journal of Risk and Insurance, 67, 15-36.