8

Reservas matemáticas a prima pura

8.1 Reserva matemática de una operación de seguro de vida

Recordando lo expuesto en el capítulo 7, en el momento de efectuarse el contrato de seguro si las primas han sido calculadas de acuerdo con el principio de equivalencia actuarial, la esperanza matemática de la diferencia entre el valor actual de las obligaciones futuras del asegurador y el valor actual de los futuros pagos por primas es cero.

Con posterioridad al inicio de la cobertura la esperanza matemática de la citada diferencia ya no será, en general cero, y es denominada **reserva matemática.**

Las reservas matemáticas constituyen uno de los elementos más importantes del pasivo de las empresas de seguros que operan en el ramo de vida, y en relación con ellas se encuentran regulados algunos derechos que, en ciertas modalidades, posee el tomador del seguro: los **valores garantizados.**

Aunque en la notación matemática no habrá ningún signo distintivo, es importante señalar que, a la hora de calcular la reserva matemática, las bases técnicas de valoración no tienen que coincidir con las empleadas para el cálculo de la prima, y que a nuestro entender las bases técnicas con que ha de calcularse la reserva matemática no tienen que ser las mismas si la finalidad es el cálculo de la reserva que ha de figurar en el balance o sobre la que ha de girar la cuantía de los valores garantizados.

En este capítulo estudiaremos las reservas matemáticas discretas y continuas a prima pura, haciendo referencia a las reservas de las modalidades clásicas del seguro de vida. Junto a los tradicionales métodos de cálculo prospectivo y retrospectivo estudiaremos la dinámica de las reservas mediante las expresiones recursivas y la ecuación diferencial de Thiele, que poseen importantes aplicaciones prácticas. Finalmente trataremos la descomposición de la prima en prima de riesgo y prima de ahorro.

8.2 Reserva matemática discreta

8.2.1 Definición

Consideremos una operación de seguro de vida para una cabeza de edad x cuyas primas (discretas) se han calculado de acuerdo al principio de equivalencia.

Supongamos que h años después la citada cabeza sigue con vida*. Definamos ${}_hL$ como la diferencia, en ese momento, entre el valor actual de las obligaciones futuras del asegurador y el valor actual de los futuros pagos por primas.

Representemos mediante K_{x+h} la variable aleatoria número de años completos de vida hasta la muerte de una cabeza de edad $x+h$ (cabe recordar ahora que la distribución probabilidad de K_{x+h} no tiene que coincidir con la que se derivaría de las bases técnicas con la que se calcularon las primas)

Lógicamente ${}_hL$ es una variable aleatoria que depende de K_{x+h}.

Definiremos la reserva matemática discreta h años después del inicio de la operación, que se representa mediante ${}_hV$, como la esperanza matemática de ${}_hL$. Esta es la **definición prospectiva de la reserva matemática.**

Para fijar ideas consideremos un seguro de vida general. Tomemos una cabeza de edad x, y sean $C = \{C_1, C_2, ..., C_{\omega-x}\}$ y $P = \{P_0, P_1, ..., P_{\omega-x-1}\}$ los conjuntos que representan respectivamente los capitales en caso de fallecimiento (hipótesis de pago al final del año del mismo) y las primas anuales a pagar al comienzo de cada año (no habría ningún problema en la inclusión de capitales para el caso de supervivencia).

$$\begin{array}{ccccc} & C_1 & C_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & C_h & C_{h+1}\ldots\ldots \\ \hline x & x+1 & x+2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & x+h & x+h+1 \ldots\ldots \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} P_0 & P_1 & P_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & P_h & P_{h+1}\ldots\ldots \\ \hline x & x+1 & x+2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & x+h & x+h+1 \ldots\ldots \end{array}$$

Supuesto que, para unas determinadas bases técnicas, la primas obedezcan al principio de equivalencia, ha de verificarse

$$(V\ddot{a}P)_x = (VAC)_x$$

*Supondremos que la póliza se extingue al fallecer el asegurado. Más adelante haremos referencia a alguna modalidad en la que esto no sucede. Véanse ejercicios 2 y 3.

Calculemos la reserva matemática h años después de suscrita la póliza. Ciertamente la variable aleatoria $_hL$ toma los valores[†]

$$_hL = C_{h+K_{x+h}+1}\ v^{K_{x+h}+1} - \sum_{t=0}^{K_{x+h}} P_{h+t}\ v^t, \quad K_{x+h} = 0, 1, 2, ...$$

siendo

$$P(_hL = C_{h+k+1}\ v^{k+1} - \sum_{t=0}^{k} P_{h+t}\ v^t) = \ _{k/}q_{x+h} \qquad k = 0, 1, 2, ...$$

Por tanto

$$_hV_x = E(_hL) = \sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} (C_{h+k+1}\ v^{k+1} - \sum_{t=0}^{k} P_{h+t}\ v^t)\ _{k/}q_{x+h} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} C_{h+k+1}\ v^{k+1}\ _{k/}q_{x+h} - \sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} (\sum_{t=0}^{k} P_{h+t}\ v^t)\ _{k/}q_{x+h} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} C_{h+k+1}\ v^{k+1}\ _{k/}q_{x+h} - \sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} P_{h+k}\ _kE_{x+h}$$

esto es, la reserva matemática calculada por el **método prospectivo** es

$$_hV_x = (VAC)_{x+h} - (V\ddot{a}P)_{x+h} \tag{8.1}$$

Ahora bien, multiplicando y dividiendo en (8.1) por $_hE_x$ tenemos

$$_hV_x = \frac{_hE_x\ (VAC)_{x+h} - \ _hE_x\ (V\ddot{a}P)_{x+h}}{_hE_x} = \frac{_{h/}(VAC)_x - \ _{h/}(V\ddot{a}P)_x}{_hE_x} =$$

$$= \frac{((VAC)_x - (VAC)_{\overset{1}{x}:\overline{h|}}) - ((V\ddot{a}P)_x - (V\ddot{a}P)_{x:\overline{h|}})}{_hE_x}$$

[†]Supondremos que la prima P_h que ha de pagarse a la edad x+h no ha vencido todavía en el momento de realizar la valoración. Por tanto su cuantía forma parte de los pagos futuros por primas.

y ya que $(V\ddot{a}P)_x = (VAC)_x$,

$$ {}_hV_x = \frac{(V\ddot{a}P)_{x:\overline{h}|} - (VAC)_{\stackrel{1}{x}:\overline{h}|}}{{}_hE_x} \tag{8.2} $$

que es la reserva matemática calculada por el **método retrospectivo**.

En general, el método retrospectivo consiste en "valorar en $x + h$" la diferencia de las obligaciones entre x y $x + h$ del tomador del seguro y del asegurador.

De la deducción realizada de la expresión retrospectiva es posible afirmar que *la reserva matemática calculada por el método prospectivo y por el método restrospectivo coinciden, siempre que se utilicen las mismas bases técnicas y además sean las empleadas para el cálculo de las primas.*

Estudiaremos a continuación con detenimiento la reserva matemática del seguro vida entera, así de para otras modalidades clásicas de seguro.

8.2.2 Reserva matemática para el seguro vida entera

Consideremos en primer lugar un seguro vida entera para una cabeza de edad x. Supongamos que la prima pura anual constante ha sido calculada, para unas bases técnicas determinadas, de acuerdo al principio de equivalencia actuarial, esto es,

$$ P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} $$

Ciertamente, los valores que toma la variable aleatoria ${}_hL$ son

$$ {}_hL = v^{K_{x+h}+1} - P_x\ \ddot{a}_{\overline{K_{x+h}+1}|}, \qquad K_{x+h} = 0, 1, 2, ... $$

siendo además

$$ P(\ {}_hL = v^{k+1} - P_x\ \ddot{a}_{\overline{k+1}|}) = \ {}_{k/}q_{x+h} \qquad k = 0, 1, 2, ... $$

Por lo que, elementalmente, la reserva matemática es

$$ {}_hV_x = E({}_hL) = A_{x+h} - P_x\ \ddot{a}_{x+h} \tag{8.3} $$

Puede tener interés el conocimiento de la **varianza** de ${}_hL$, para ello escribamos

$$ {}_hL = v^{K_{x+h}+1} - P_x\ \frac{1 - v^{K_{x+h}+1}}{d} = v^{K_{x+h}+1}(1 + \frac{P_x}{d}) - \frac{P_x}{d} $$

por lo que

$$ Var(\ {}_hL) = (1 + \frac{P_x}{d})^2\ Var(v^{K_{x+h}+1}) = (1 + \frac{P_x}{d})^2\ ({}^2A_{x+h} - (A_{x+h})^2) \tag{8.4} $$

Es importante hacer notar que en las anteriores expresiones de la esperanza y varianza de ${}_hL$, no necesariamente las bases técnicas de su cálculo han de coincidir con aquellas que se emplearon en el cálculo de la prima P_x.

Estudiemos ahora otras expresiones para la reserva matemática. En éstas, dadas las simplificaciones realizadas es necesario el mantenimiento de las bases técnicas empleadas para el cálculo de las primas.

1.- Recordando que $A_{x+h} = 1 - d\ \ddot{a}_{x+h}$, y que $P_x = \frac{d\ A_x}{1-A_x}$

$$ {}_hV_x = A_{x+h} - P_x\ \ddot{a}_{x+h} = A_{x+h} - \frac{d\ A_x}{1-A_x}\ \frac{1-A_{x+h}}{d} = \frac{A_{x+h}-A_x}{1-A_x} \qquad (8.5)$$

2.- Asimismo,

$$ {}_hV_x = A_{x+h} - P_x\ \ddot{a}_{x+h} = 1 - (d+P_x)\ \ddot{a}_{x+h} \qquad (8.6)$$

3.- Recordando que $P_x = \frac{1}{\ddot{a}_x} - d$, se obtiene

$$ {}_hV_x = 1 - (d+P_x)\ \ddot{a}_{x+h} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+h}}{\ddot{a}_x} \qquad (8.7)$$

4.- Finalmente,

$$ {}_hV_x = A_{x+h} - P_x\ \ddot{a}_{x+h} = \left(\frac{A_{x+h}}{\ddot{a}_{x+h}} - P_x\right)\ddot{a}_{x+h} = (P_{x+h} - P_x)\ \ddot{a}_{x+h} \qquad (8.8)$$

donde

$$P_{x+h} = \frac{A_{x+h}}{\ddot{a}_{x+h}}$$

es la prima anual constante de un seguro vida entera para una cabeza de edad $x+h$.

La **expresión retrospectiva** de la reserva matemática es

$$ {}_hV_x = \frac{P_x\ \ddot{a}_{x:\overline{h|}} - A^{\ 1}_{x:\overline{h|}}}{{}_hE_x} \qquad (8.9)$$

Siendo

$$ {}_hk_x = \frac{A^{\ 1}_{x:\overline{h|}}}{{}_hE_x}$$

el denominado coste acumulado del seguro, tenemos

$$ {}_hV_x = P_x\ \ddot{s}_{x:\overline{h|}} - {}_hk_x \qquad (8.10)$$

Así la reserva matemática retrospectiva h años después de suscrita la póliza se obtiene como la diferencia del valor en ese momento de las primas a pagar entre las edades x y $x+h$ y el coste del riesgo cubierto entre esas edades.

Expresemos la reserva matemática mediante símbolos de conmutación. Sabemos que

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{\frac{M_x}{D_x}}{\frac{N_x}{D_x}} = \frac{M_x}{N_x}$$

por tanto, la expresión prospectiva de la reserva matemática es

$$_hV_x = A_{x+h} - P_x\ \ddot{a}_{x+h} = \frac{M_{x+h}}{D_{x+h}} - \frac{M_x}{N_x}\frac{N_{x+h}}{D_{x+h}} \tag{8.11}$$

Hagamos notar que los símbolos de conmutación referidos a la prima P_x no tienen por qué estar calculados con las mismas bases técnicas que los correspondientes a A_{x+h} y $\ddot{a}_{x+h}$.

Consideremos finalmente el caso de primas anuales constantes que se pagan mientras viva el asegurado pero como máximo durante n años. Ahora la reserva matemática se representa mediante

$$^n_hV_x$$

donde el pre-superindice n indica precisamente la temporalidad en el pago de primas.

Por (7.7) sabemos que

$$_nP_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}$$

Para obtener la expresión de la reserva matemática h años después de suscrita la póliza, hemos de distinguir dos casos:

a) $h < n$, esto es, se calcula la reserva matemática cuando aún no ha finalizado la obligación del pago de primas.

La reserva calculada por el método prospectivo es

$$^n_hV_x = A_{x+h} - {}_nP_x\ \ddot{a}_{x+h:\overline{n-h|}}$$

y por el retrospectivo

$$^n_hV_x = \frac{{}_nP_x\ \ddot{a}_{x:\overline{h|}} - A^{\,1}_{x:\overline{h|}}}{_hE_x}$$

b) $h \geq n$, esto es, ya ha concluido la obligación del pago de primas.

La reserva calculada por el método prospectivo es

$$ {}_h^nV_x = A_{x+h} $$

y por el retrospectivo

$$ {}_h^nV_x = \frac{{}_nP_x\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - A^{\ 1}_{x:\overline{h}|}}{{}_hE_x} $$

Ejemplo 10 *Como ya hemos indicado, según sea la finalidad, el cálculo de la reserva matemática no tiene porque realizarse con las mismas bases técnicas con las que se calculó la prima. Consideremos un seguro vida entera para una cabeza de 30 años de edad, con pago del capital asegurado (la unidad) al final del año de fallecimiento y primas vitalicias constantes.*

Si las bases técnicas de calculo de la prima son la tabla de mortalidad GKM80 y un tipo de interés técnico $i = 0.03$, la prima anual constante es

$$ P_{30} = \frac{A_{30}}{\ddot{a}_{30}} = 0.01210068 $$

donde

$$ A_{30} = \sum_{k=0}^{\omega-30-1} (1+0.03)^{-(k+1)}\ {}_{k/}q_{30} $$

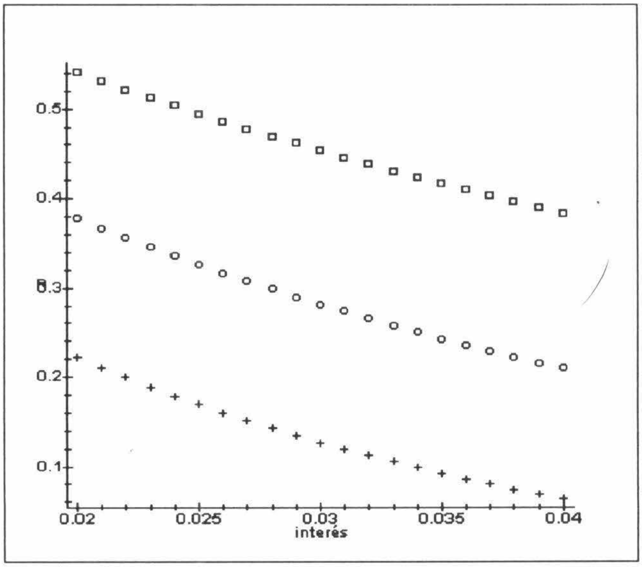
y

$$ \ddot{a}_{30} = \sum_{k=0}^{\omega-30-1} (1+0.03)^{-k}\ {}_kp_{30} $$

La siguiente tabla muestra la cuantía de la reserva matemática a los 10, 20 y 30 años de suscrita la póliza, para distintos tipos de interés:

	${}_{10}V_{30}$	${}_{20}V_{30}$	${}_{30}V_{30}$
0.02	0.221490	0.378270	0.541232
0.025	0.169348	0.326219	0.495142
0.03	0.126887	0.281492	0.453796
0.035	0.092274	0.242977	0.416639
0.04	0.064034	0.209743	0.383186

En la siguiente figura se representan ${}_{10}V_{30}$ (+), ${}_{20}V_{30}$ (o) y ${}_{30}V_{30}$ (□)



Reserva y tipo de interés

Ahora

$$ {}_hV_{30} = A_{30+h} - 0,01210068\ \ddot{a}_{30+h} $$

donde

$$ A_{30+h} = \sum_{k=0}^{\omega-30-h-1} (1+i)^{-(k+1)}\ {}_{k/}q_{30+h} $$

y

$$ \ddot{a}_{30+h} = \sum_{k=0}^{\omega-30-h-1} (1+i)^{-k}\ {}_kp_{30+h} $$

para $i = 0,02, ..., 0.04$

8.2.3 Reserva matemática para otras modalidades

Seguro temporal

La prima anual constante calculada de acuerdo al principio de equivalencia, supuesto que la temporalidad del pago de primas coincide con la de la cobertura del seguro, es

$$ P^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{A^{1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} $$

La reserva matemática por el método prospectivo h años después de suscrita la póliza $(h < n)$ es

$$ {}_hV^{1}_{x:\overline{n}|} = A^{\ 1}_{x+h:\overline{n-h}|} - P^{1}_{x:\overline{n}|}\ \ddot{a}_{x+h:\overline{n-h}|} $$

Asimismo,

$$_nV_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} = 0$$

Seguro a capital diferido

La prima anual constante es

$$P_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = \frac{A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}$$

La reserva matemática por el método prospectivo h años después de suscrita la póliza $(h < n)$ es

$$_hV_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = A_{x+h:\overset{1}{\overline{n-h|}}} - P_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}\, \ddot{a}_{x+h:\overline{n-h|}}$$

y

$$_nV_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = 1$$

Notemos que el capital diferido vence un instante después de calcularse la reserva cuya cuantía ha de coincidir con la de aquél.

En este caso, la fórmula retrospectiva de la reserva (para $h < n$) resulta especialmente sencilla,

$$_hV_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = \frac{P_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}\, \ddot{a}_{x:\overline{h|}}}{_hE_x} = P_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}\, \ddot{s}_{x:\overline{h|}}$$

Seguro mixto simple

La prima anual constante es

$$P_{x:\overline{n|}} = \frac{A_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} + A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} = \frac{A_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}$$

La reserva matemática por el método prospectivo h años después de suscrita la póliza $(h < n)$ es

$$_hV_{x:\overline{n|}} = A_{x+h:\overline{n-h|}} - P_{x:\overline{n|}}\, \ddot{a}_{x+h:\overline{n-h|}}$$

siendo

$$_nV_{x:\overline{n|}} = 1$$

En el ejercicio 1 haremos un estudio más detenido de la reserva matemática de esta modalidad de seguro obteniendo interesantes expresiones tanto para la reserva matemática como para la varianza de $_hL$.

Renta diferida

Tomemos ahora una renta diferida n años y prepagable de cuantía anual la unidad, para una cabeza de edad x, con pago de primas anuales constantes mientras viva el asegurado pero como máximo durante n años de cuantía $P(\ {}_{n/}\ddot{a}_x)$.

El principio de equivalencia actuarial conduce a

$$P(\ {}_{n/}\ddot{a}_x)\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_{n/}\ddot{a}_x$$

de donde

$$P(\ {}_{n/}\ddot{a}_x) = \frac{{}_{n/}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

La reserva matemática por el método prospectivo h años después de suscrita la póliza para $h < n$ es

$$_hV(\ {}_{n/}\ddot{a}_x) = {}_{n-h/}\ddot{a}_{x+h} - P(\ {}_{n/}\ddot{a}_x)\ \ddot{a}_{x+h:\overline{n-h}|}$$

y para $h \geq n$ (ya ha finalizado la obligación del pago de primas),

$$_hV(\ {}_{n/}\ddot{a}_x) = \ddot{a}_{x+h}$$

8.2.4 Ecuación recurrente de las reservas

Además de los métodos prospectivo y retrospectivo para el cálculo de las reservas matemáticas son importantes, desde el punto de vista operativo, las **fórmulas recurrentes** que relacionan la reserva matemática correspondiente a un periodo de tiempo con la del inmediato anterior o posterior. Ciertamente, conocido el valor inicial o final de la reserva es fácil, mediante un simple tratamiento informático, obtener la correspondiente a toda la duración del contrato.

Deduciremos a continuación una expresión recurrente de las reservas válida, en general, para todo tipo de seguros. Para ello retomenos el seguro de vida planteado en el apartado 8.2.1

Consideremos una cabeza de edad x y sean $C = \{C_1, C_2, ..., C_{\omega-x}\}$ y $P = \{P_0, P_1, ..., P_{\omega-x-1}\}$ los conjuntos que representan respectivamente los capitales en caso de fallecimiento (hipótesis de pago al final del año del mismo), y las primas anuales a pagar al comienzo de cada año. Supondremos además que las primas obedecen al principio de equivalencia, esto es,

$$\sum_{k=0}^{\omega-x-1} P_k\ {}_kE_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} C_{k+1}\ v^{k+1}\ {}_{k/}q_x$$

Asimismo la variable aleatoria ${}_hL$ toma los valores

$$ {}_hL = C_{K_{x+h}+h+1}\ v^{K_{x+h}+1} - \sum_{t=0}^{K_{x+h}} P_{h+t}\ v^t \quad K_{x+h} = 0, 1, 2, \dots $$

por lo que la reserva matemática h años después de suscrita la póliza, que representaremos mediante ${}_hV_x$,es

$$ {}_hV_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} C_{k+h+1}\ v^{k+1}\ {}_{k/}q_{x+h} - \sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} P_{k+h}\ v^k\ {}_kp_{x+h} $$

y también

$$ {}_{h+1}V_x = \sum_{k=1}^{\omega-x-h-1} C_{k+h+1}\ v^k\ {}_{k-1/}q_{x+h+1} - \sum_{k=1}^{\omega-x-h-1} P_{k+h}\ v^{k-1}\ {}_{k-1}p_{x+h+1} $$

Escribiendo

$$ {}_hV_x = C_{h+1}\ v\ q_{x+h} - P_h + \sum_{k=1}^{\omega-x-h-1} C_{k+h+1}\ v^{k+1}\ {}_{k/}q_{x+h} - \sum_{k=1}^{\omega-x-h-1} P_{k+h}\ v^k\ {}_kp_{x+h} $$

y teniendo en cuenta que

$$ {}_{k/}q_{x+h} = p_{x+h}\ {}_{k-1/}q_{x+h+1} \quad y \quad {}_kp_{x+h} = p_{x+h}\ {}_{k-1}p_{x+h+1} $$

tenemos

$$ {}_hV_x = C_{h+1}\ v\ q_{x+h} - P_h + v\ p_{x+h}\ {}_{h+1}V_x \tag{8.12} $$

de donde, se obtienen las siguientes relaciones

$$ {}_hV_x = v(C_{h+1}\ q_{x+h} + \ p_{x+h}\ {}_{h+1}V_x) - P_h \tag{8.13} $$

y

$$ {}_{h+1}V_x = \frac{(\ {}_hV_x + P_h)(1+i) - C_{h+1}\ q_{x+h}}{p_{x+h}} \tag{8.14} $$

que nos permiten obtener, conocida la cuantía de las reservas matemáticas de un periodo, bien la del anterior o bien la del siguiente.

Asimismo se obtiene la expresión

$$ (\ {}_hV_x + P_h)(1+i) = \ {}_{h+1}V_x\ p_{x+h} + C_{h+1}\ q_{x+h} \tag{8.15} $$

cuya interpretación es clara: la reserva matemática constituida al comienzo de un año más la prima cobrada en ese momento con los intereses que genera su inversión han de ser suficientes bien para hacer frente al pago del capital asegurado al final de dicho periodo en caso del fallecimiento del asegurado (suceso que posee probabilidad q_{x+h}) bien para constituir la reserva del período siguiente en caso de supervivencia del asegurado (suceso que posee probabilidad p_{x+h}).

Esta última expresión puede ser escrita también como

$$ {}_hV_x + P_h = v \ {}_{h+1}V_x \ p_{x+h} + v \ C_{h+1} \ q_{x+h} $$

En ésta ${}_hV_x + P_h$ puede interpretarse como la prima única pura para un seguro mixto de un año de duración en el que C_{h+1} y ${}_{h+1}V_x$ son los capitales para el caso de fallecimiento y supervivencia, respectivamente.

Asimismo en la expresión (8.12) es claro que $C_{h+1} \ v \ q_{x+h}$ es la prima natural a la edad $x+h$, P^n_h. Por lo que podemos escribir también

$$ {}_hV_x = P^n_h - P_h + {}_1E_{x+h} \ {}_{h+1}V_x \tag{8.16} $$

y

$$ {}_{h+1}V_x = \frac{{}_hV_x + (P_h - P^n_h)}{{}_1E_{x+h}} \tag{8.17} $$

Ejemplo 11 *Consideremos un seguro temporal para una cabeza de 30 años y una temporalidad de 10 años con pago de primas anuales y constantes. Como bases técnicas de valoración se toma un tipo de interés técnico anual del 6% y la tabla GKM80.*

La equivalencia actuarial que nos permite calcular la prima es

$$ P_{\overset{1}{30}:\overline{10|}} \ \ddot{a}_{30:\overline{10|}} = A_{\overset{1}{30}:\overline{10|}} $$

de donde

$$ P_{\overset{1}{30}:\overline{10|}} = \frac{A_{\overset{1}{30}:\overline{10|}}}{\ddot{a}_{30:\overline{10|}}} = 0,00139642405719 $$

La expresión recursiva de las reservas es

$$ {}_{h+1}V_{30} = \frac{(\ {}_hV_{30} + 0,00139642405719)(1 + 0.06) - \ q_{30+h}}{p_{30+h}} $$

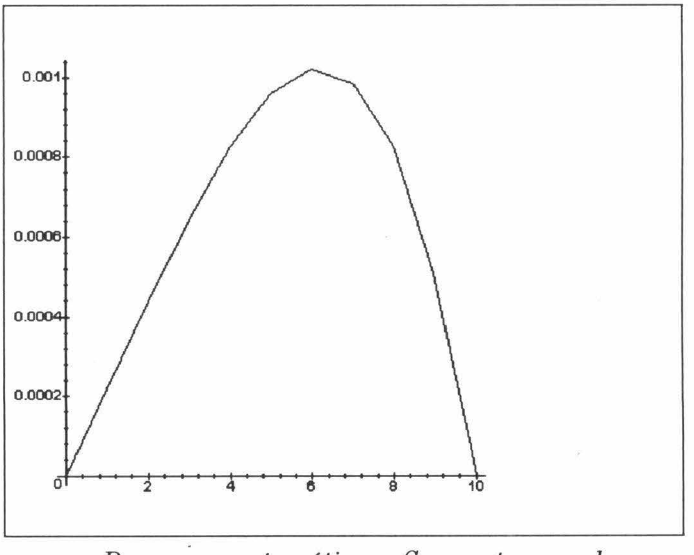
teniendo en cuenta que

$$ {}_0V_{30} = 0 $$

se calcula con facilidad el valor de la reserva matemática para los sucesivos años.

Año	*Reserva matemática*
0	0
1	0.0002184852289
2	0.0004364760364
3	0.0006444458055
4	0.0008248741169
5	0.0009576583168
6	0.0010199461622
7	0.0009859520348
8	0.0008267540146
9	0.0005100686786
10	0

La gráfica de su evolución es



Reservas matemáticas. Seguro temporal

Hagamos notar que en esta modalidad de seguros las reservas matemáticas poseen una escasa cuantía. En nuestro ejemplo para un capital asegurado de 1.000.000 su mayor valor es de 1019.

Observación 7 *No existe problema alguno en incluir en el seguro planteado en este epígrafe capitales en caso de supervivencia. Suponiendo que éstos se encuentran representados por los elementos del conjunto* $C' = \{C'_0, C'_1, ..., C'_{\omega-x-1}\}$, *la* *expresión recurrente para las reservas matemáticas es elementalmente*

$$_{h+1}V_x = \frac{({}_hV_x + (P_h - C'_h))(1+i) - C_{h+1}\; q_{x+h}}{p_{x+h}} \tag{8.18}$$

Es razonable pensar que P_h y C'_h no serán simultáneamente positivos.

Ejemplo 12 *Para ilustrar esta última observación tomemos como ejemplo una renta unitaria, prepagable, diferida n años, para una cabeza de edad x, con pago de primas anuales y constantes mientras viva el asegurado pero como máximo durante n años.*

La equivalencia actuarial conduce a que la prima anual y constante es

$$P(\ {}_{n/}\ddot{a}_x) = \frac{{}_{n/}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}$$

En este caso no existen capitales en caso de fallecimiento y sí para el caso de supervivencia. La expresión recursiva a emplear es

$$_{h+1}V_x = \frac{({}_hV_x + (P_h - C'_h))(1+i)}{p_{x+h}}$$

en la que

$$P_h = \begin{cases} P(\ {}_{n/}\ddot{a}_x) & \text{cuando} \quad h < n \\ 0 & \text{cuando} \quad h \geq n \end{cases}$$

y

$$C'_h = \begin{cases} 0 & \text{cuando} \quad h < n \\ 1 & \text{cuando} \quad h \geq n \end{cases}$$

Tomando como tabla de mortalidad la GRM80, puede el lector comprobar que para una cabeza de 30 años, un diferimiento de 20 años y un tipo de interés técnico del 6% se obtiene una prima

$$P(\ {}_{20/}\ddot{a}_{30}) = 0,34007967$$

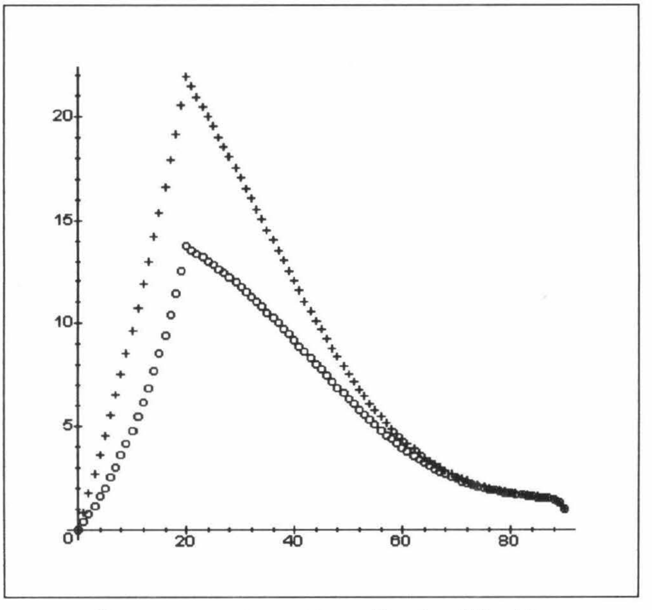
y si el tipo de interés es del 2%,

$$P(\ {}_{20/}\ddot{a}_{30}) = 0,856980768$$

Ya que las reservas iniciales son cero, empleando la expresión recursiva dada es posible obtener el valor de la reserva matemática para los años sucesivos. Así, para $i = 0.06$ e $i = 0.02$, en la siguiente tabla tenemos algunos valores de la reserva matemática:

h	${}_hV_{30}$ $(i = 0.06)$	${}_hV_{30}$ $(i = 0.02)$
0	0	0
5	2.03938315	4.56491658
10	4.79314205	9.65148234
15	8.54150176	15.3716379
19	12.5353550	20.5223977
20	13.7102169	21.9064401
21	13.5397978	21.4305645
25	12.8037118	19.4998269
30	11.7474406	17.0275625
40	9.17647991	12.0318298
50	6.34758274	7.57823794
60	3.94728218	4.37052703
70	2.44591407	2.57887074

En la figura siguiente representamos gráficamente la evolución de la reserva para los tipos de interés indicados. Para $i = 0.02$ *(+++) y para* $i = 0,06$ *(oooo).*



Reserva matematica. Renta diferida.

8.3 Reservas en periodos fraccionarios

En muchas ocasiones puede ser necesario el cálculo de la reserva matemática en un momento no coincidente con uno de los aniversarios de la celebración del contrato.

Sean h entero y $r \in (0,1)$ y hemos de calcular la reserva matemática $h+r$ periodos después de suscrita la póliza, esto es, ${}_{h+r}V_x$.

$$\begin{array}{ccccc} {}_{h}V_x & & {}_{h+r}V_x & & {}_{h+1}V_x \\ \hline \underbrace{x+h \qquad\qquad x+h}_{r} & \!\!\!\! & \underbrace{+r \qquad\qquad x+h+1}_{1-r} & & \end{array}$$

Por analogía con la expresión (8.15),

$${}_{h+r}V_x\ (1+i)^{1-r} = {}_{h+1}V_x\ {}_{1-r}p_{x+h+r} + C_{h+1}\ {}_{1-r}q_{x+h+r}$$

de donde

$${}_{h+r}V_x = {}_{h+1}V_x\ v^{1-r}\ {}_{1-r}p_{x+h+r} + C_{h+1}\ v^{1-r}\ {}_{1-r}q_{x+h+r} \tag{8.19}$$

Notemos que como el momento $h+r$ no coincide con uno de los aniversarios de la póliza, no se produce ningún ingreso por primas.

Si sólo disponemos de probabilidades de muerte y supervivencia para años enteros, habremos de recurrir a alguna de las hipótesis estudiadas en el capítulo 2 para estimar ${}_{1-r}q_{x+h+r}$.

Así, por ejemplo, si aceptamos la hipótesis de distribución uniforme de la mortalidad, tendremos

$${}_{1-r}q_{x+h+r} = \frac{(1-r)\ q_{x+h}}{1-r\ q_{x+h}} \quad y \quad {}_{1-r}p_{x+h+r} = \frac{p_{x+h}}{1-r\ q_{x+h}} \quad ‡$$

por lo que podemos obtener una sencilla expresión para la reserva matemática

$${}_{h+r}V_x = {}_{h+1}V_x\ v^{1-r}\ \frac{p_{x+h}}{1-r\ q_{x+h}} + C_{h+1}\ v^{1-r}\ \frac{(1-r)\ q_{x+h}}{1-r\ q_{x+h}} =$$

‡Ciertamente,

$${}_{1-r}q_{x+h+r} = \frac{s(x+h+r)-s(x+h+1)}{s(x+h+r)} = \frac{(1-r)\ s(x+h)+r\ s(x+h+1)-s(x+h+1)}{(1-r)\ s(x+h)+r\ s(x+h+1)} =$$

$$= \frac{(1-r)\ s(x+h)-(1-r)\ s(x+h+1)}{(1-r)\ s(x+h)+r\ s(x+h+1)} = \frac{(1-r)-(1-r)\ p_{x+h}}{(1-r)+r\ p_{x+h}} = \frac{(1-r)\ q_{x+h}}{1-r\ q_{x+h}}$$

$$= \frac{v^{1-r}}{1 - r\ q_{x+h}} \left({}_{h+1}V_x\ p_{x+h} + C_{h+1}\ (1-r)\ q_{x+h} \right) \tag{8.20}$$

Asimismo, teniendo en cuenta (8.15), es claro que

$$C_{h+1}\ q_{x+h} = (\ {}_hV_x + P_h)(1+i) - \ {}_{h+1}V_x\ p_{x+h}$$

por lo que

$${}_{h+r}V_x = \frac{v^{1-r}}{1 - r\ q_{x+h}} \left((1-r)\ (\ {}_hV_x + P_h)\ (1+i) + r\ {}_{h+1}V_x\ p_{x+h} \right) \tag{8.21}$$

En la práctica suele emplearse la siguiente expresión

$${}_{h+r}V_x = \ (1-r)\ (\ {}_hV_x + P_h) + r\ {}_{h+1}V_x \tag{8.22}$$

que puede considerarse una aproximación de la anterior siempre que i y q_{x+h} estén cercanos a cero. También puede escribirse como

$${}_{h+r}V_x = ((1-r)\ {}_hV_x + r\ {}_{h+1}V_x) + (1-r)\ P_h \tag{8.23}$$

Esta última expresión es la habitualmente utilizada para el cálculo de la **reserva de balance,** para la que las normas legales exigen que incluya la reserva para riesgos en curso, esto es, la parte de prima no consumida al cierre del balance que en la citada expresión viene representada por $(1-r)\ P_h$.

8.4 Reserva matemática continua

8.4.1 Definición

Sea ahora una operación de seguro de vida para una cabeza de edad x en la que el pago del capital asegurado se realiza en el momento del fallecimiento y con prima continua calculada de acuerdo al principio de equivalencia.

Supongamos que h años después la citada cabeza sigue con vida. Definamos la variable aleatoria ${}_hL$ como la diferencia, en ese momento, entre el valor actual de las obligaciones futuras del asegurador y el valor actual de los futuros pagos por primas.

Representemos mediante T_{x+h} la variable aleatoria vida residual o tiempo de vida hasta la muerte de una cabeza de edad x+h.

Definiremos la reserva matemática continua h años después del inicio de la operación, que se representa mediante ${}_h\overline{V}_x$, como la esperanza matemática de ${}_hL$.

Esta es la definición prospectiva de la reserva matemática.

Plantearemos ahora en el campo continuo una operación general de seguro.

Supongamos que una cabeza de edad x contrata un seguro de vida mediante el cual en el momento del fallecimiento sus beneficiarios recibirán un capital cuya cuantía viene determinada por una función

$$C : [0, \omega - x] \to R$$

A cambio el contratante paga la correspondiente prima de forma continua y hasta el momento del fallecimiento del asegurado a una tasa anual determinada por la función

$$\overline{P} : [0, \omega - x] \to R$$

Supuesto que $\overline{P}(t)$ obedece al principio de equivalencia, esto es,

$$E(L) = \int_0^\infty (C(t)\ e^{-\delta t}\ - \int_0^t \bar{P}\ (s)\ e^{-\delta s}\ ds)\ g_x(t)\ dt = 0$$

tenemos

$$\int_0^\infty \bar{P}\ (t)\ e^{-\delta t}\ {}_tp_x\ dt = \int_0^\infty C(t)\ e^{-\delta t}\ g_x(t)\ dt$$

El resultado h años después de suscrita la póliza es

$${}_hL = C(h + T_{x+h})\ e^{-\delta T_{x+h}} - \int_0^{T_{x+h}} \bar{P}\ (h+s)\ e^{-\delta s} ds \quad T_{x+h} \geq 0$$

y la reserva matemática h años después de suscrita la póliza es, elementalmente,

$${}_h\overline{V}_x = E({}_hL) = \int_0^\infty C(h{+}t)\ e^{-\delta t}\ g_{x+h}(t)\ dt - \int_0^\infty (\int_0^t \bar{P}\ (h{+}s)\ e^{-\delta s}\ ds)\ g_{x+h}(t)\ dt$$

donde $g_{x+h}(t)$ es la densidad de la vida residual de $(x+h)$.

Operando[§],

$${}_h\overline{V}_x = \int_0^\infty C(h+t)\ e^{-\delta t}\ g_{x+h}(t)\ dt - \int_0^\infty \bar{P}\ (h+t)\ e^{-\delta t}\ {}_tp_{x+h}\ dt =$$

[§]Tomando

$$\int_0^t \overline{P}(h+s)\ e^{-\delta s}\ ds = u \quad y \quad -(1 - G_{x+h}(t)) = v$$

por tanto

$$\overline{P}(h+t)\ e^{-\delta t}\ dt = du \quad y \quad g_{x+h}(t)\ dt = dv$$

Integrando por partes tenemos

$$\int_0^\infty (\int_0^t \overline{P}(h+s)\ e^{-\delta s}\ ds)\ g_{x+h}(t)\ dt = \int_0^\infty \overline{P}(h+t)\ e^{-\delta t}\ {}_tp_{x+h}\ dt$$

$$= \int_0^\infty C(h+t)\ e^{-\delta t}\ g_{x+h}(t)\ dt - \int_0^\infty \bar{P}\ (h+t)\ {}_tE_{x+h}\ dt =$$

esto es

$$ {}_h\overline{V}_x = (V\overline{A}C)_{x+h} - (V\overline{a}P)_{x+h} \tag{8.24}$$

que es la **expresión prospectiva** de la reserva matemática.

Realizando sencillas operaciones tenemos

$$ {}_h\overline{V}_x = \frac{{}_hE_x\ (V\overline{A}C)_{x+h} -\ {}_hE_x\ (V\overline{a}P)_{x+h}}{{}_hE_x} = \frac{{}_{h/}(V\overline{A}C)_x -\ {}_{h/}(V\overline{a}P)_x}{{}_hE_x} =$$

$$= \frac{((V\overline{A}C)_x - (V\overline{A}C)_{\overset{1}{x}:\overline{h}|}) - ((V\overline{a}P)_x - (V\overline{a}P)_{x:\overline{h}|})}{{}_hE_x}$$

esto es,

$$ {}_h\overline{V}_x = \frac{(V\overline{a}P)_{x:\overline{h}|} - (V\overline{A}C)_{\overset{1}{x}:\overline{h}|}}{{}_hE_x} \tag{8.25}$$

que es la **expresión retrospectiva** de la reserva matemática. Hagamos notar de nuevo que la igualdad de (8.24) y (8.25) requiere que las bases técnicas de cálculo sean las empleadas para el cálculo de la prima.

8.4.2 Reserva matemática para el seguro vida entera

Consideremos en primer lugar un seguro vida entera para una cabeza de edad x. Supongamos que la prima continua ha sido calculada de acuerdo al principio de equivalencia actuarial, esto es,

$$\bar{P}\ (\bar{A}_x)\ = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}$$

Ciertamente

$$ {}_hL = v^{T_{x+h}} - \bar{P}\ (\bar{A}_x)\ \bar{a}_{\overline{T_{x+h}}|},\quad T_{x+h} \geq 0$$

Por lo que la reserva matemática es

$$ {}_h\overline{V}(\bar{A}_x) = E({}_hL) = \int_0^\infty (v^t - \bar{P}\ (\bar{A}_x)\ \bar{a}_{\overline{t}|})\ g_{x+h}(t)\ dt =$$

$$= \int_0^\infty v^t\ g_{x+h}(t)\ dt - \bar{P}\ (\bar{A}_x) \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t}|}\ g_{x+h}(t)\ dt$$

$$=\bar{A}_{x+h} - \bar{P}\ (\bar{A}_x)\ \bar{a}_{x+h}$$

Calculemos la varianza de ${}_hL$. Basta escribir

$${}_hL = v^{T_{x+h}} - \bar{P}\ (\bar{A}_x)\ \frac{1-v^{T_{x+h}}}{\delta} = v^{T_{x+h}}(1+\frac{\bar{P}\ (\bar{A}_x)}{\delta}) - \frac{\bar{P}\ (\bar{A}_x)}{\delta}$$

por lo que

$$Var({}_hL) = (1+\frac{\bar{P}\ (\bar{A}_x)}{\delta})^2\ Var(v^{T_{x+h}}) =$$

$$= (1+\frac{\bar{P}\ (\bar{A}_x)}{\delta})^2\ (\ {}^2\ \bar{A}_{x+h} - (\bar{A}_{x+h})^2) \tag{8.26}$$

En las expresiones dadas de la esperanza y varianza de ${}_hL$, no necesariamente las bases técnicas de su cálculo han de coincidir con aquellas que se emplearon en el cálculo de la prima.

Estudiemos ahora otras expresiones para la reserva matemática análogas a las dadas para el caso discreto. En éstas, dadas las simplificaciones realizadas, sí es necesario el mantenimiento de las bases técnicas empleadas para el cálculo de las primas.

1.- Recordando que $\bar{A}_{x+h}= 1-\delta\ \bar{a}_{x+h}$, y que $\bar{P}\ (\bar{A}_x) = \frac{\delta\ \bar{A}_x}{1-\bar{A}_x}$

$${}_h\overline{V}(\bar{A}_x) = \bar{A}_{x+h} - \bar{P}\ (\bar{A}_x)\ \bar{a}_{x+h} =$$

$$= \bar{A}_{x+h} - \frac{\delta\ \bar{A}_x}{1-\ \bar{A}_x}\ \frac{1-\ \bar{A}_{x+h}}{\delta} = \frac{\bar{A}_{x+h} - \bar{A}_x}{1-\ \bar{A}_x} \tag{8.27}$$

2.- Asimismo,

$${}_h\overline{V}(\bar{A}_x) = \bar{A}_{x+h} - \bar{P}\ (\bar{A}_x)\ \bar{a}_{x+h} = 1 - (\delta + \bar{P}\ (\bar{A}_x))\ \bar{a}_{x+h} \tag{8.28}$$

3.- Recordando que $\bar{P}\ (\bar{A}_x) = \frac{1}{\bar{a}_x} - \delta$, se obtiene,

$${}_h\overline{V}(\bar{A}_x) = 1 - (\delta + \bar{P}\ (\bar{A}_x))\ \bar{a}_{x+h} = 1 - \frac{\bar{a}_{x+h}}{\bar{a}_x} \tag{8.29}$$

4.- Finalmente,

$${}_h\overline{V}(\bar{A}_x) = \bar{A}_{x+h} - \bar{P}\ (\bar{A}_x)\ \bar{a}_{x+h} = (\frac{\bar{A}_{x+h}}{\bar{a}_{x+h}} - \bar{P}\ (\bar{A}_x))\ \bar{a}_{x+h} =$$

$$= (\bar{P}\ (\bar{A}_{x+h}) - \bar{P}\ (\bar{A}_x))\ \bar{a}_{x+h} \tag{8.30}$$

donde

$$\bar{P}\ (\bar{A}_{x+h}) = \frac{\bar{A}_{x+h}}{\bar{a}_{x+h}}$$

es la prima continua anual constante un seguro vida entera para una cabeza de edad $x + h$.

Procediendo análogamente al caso discreto podemos llegar a la expresión retrospectiva de la reserva matemática

$${}_h\overline{V}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{P}_x\ \bar{a}_{x:\overline{h}|} - \bar{A}^{\ 1}_{x:\overline{h}|}}{{}_hE_x} \tag{8.31}$$

Siendo

$${}_h\overline{k}_x = \frac{\bar{A}^{\ 1}_{x:\overline{h}|}}{{}_hE_x}$$

el denominado coste acumulado del seguro, tenemos

$${}_h\overline{V}(\bar{A}_x) = \bar{P}_x\ \bar{s}_{x:\overline{h}|} - {}_h\ \bar{k}_x$$

Consideremos finalmente el caso de prima continua y constante que se paga mientras viva el asegurado pero como máximo durante n años. Ahora la reserva matemática se representa mediante

$${}^n_h\overline{V}(\bar{A}_x)$$

donde el pre-superindice n indica precisamente la temporalidad en el pago de primas.

Por (7.15) sabemos que

$${}_n\overline{P}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}$$

Para obtener la expresión de la reserva matemática h años después de suscrita la póliza, hemos de distinguir dos casos:

a) $h < n$, esto es, se calcula la reserva matemática cuando aún no ha finalizado la obligación del pago de primas.

La reserva calculada por el método prospectivo es

$${}^n_h\overline{V}(\bar{A}_x) = \bar{A}_{x+h} - {}_n\ \bar{P}\ (\bar{A}_x)\ \bar{a}_{x+h:\overline{n-h}|}$$

y por el restrospectivo

$$ {}_{h}^{n}\overline{V}(\bar{A}_x) = \frac{{}_{n}\bar{P}\,(\bar{A}_x)\ \bar{a}_{x:\overline{h}|} - \bar{A}^{\,1}_{x:\overline{h}|}}{{}_{h}E_x} $$

b) $h \geq n$, esto es, ya ha concluido la obligación del pago de primas. La reserva calculada por el método prospectivo es

$$ {}_{h}^{n}\overline{V}(\bar{A}_x) = \bar{A}_{x+h} $$

y por el retrospectivo

$$ {}_{h}^{n}\overline{V}(\bar{A}_x) = \frac{{}_{n}\bar{P}\,(\bar{A}_x)\ \bar{a}_{x:\overline{n}|} - \bar{A}^{\,1}_{x:\overline{h}|}}{{}_{h}E_x} $$

8.4.3 Reserva matemática para otras modalidades

Seguro temporal

La prima constante y continua calculada de acuerdo al principio de equivalencia, supuesto que la temporalidad del pago de primas coincide con la del seguro, es

$$ \bar{P}^{\,1}_{x:\overline{n}|} = \frac{\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} $$

La reserva matemática por el método prospectivo h años después de suscrita la póliza $(h < n)$ es

$$ {}_{h}\overline{V}(\overline{A}^{\,1}_{x:\overline{n}|}) = \bar{A}^{\,1}_{x+h:\overline{n-h}|} - \bar{P}^{\,1}_{x:\overline{n}|}\ \bar{a}_{x+h:\overline{n-h}|} $$

asimismo

$$ {}_{n}\overline{V}(\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n}|}) = 0 $$

Seguro a capital diferido

La prima anual constante y continua es

$$ \overline{P}(A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}) = \frac{A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} $$

la reserva matemática por el método prospectivo h años después de suscrita la póliza $(h < n)$ es

$$ {}_{h}\overline{V}(A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}) = A_{x+h:\overset{1}{\overline{n-h}|}} - \overline{P}(A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}})\ \bar{a}_{x+h:\overline{n-h}|} $$

y

$$_n\overline{V}(A_{\overset{\ \ 1}{x:\overline{n|}}}) = 1$$

En este caso la fórmula retrospectiva de la reserva (para $h < n$) resulta especialmente sencilla,

$$_h\overline{V}(A_{\overset{\ \ 1}{x:\overline{n|}}}) = \frac{\overline{P}(A_{\overset{\ \ 1}{x:\overline{n|}}})\ \bar{a}_{x:\overline{h|}}}{_hE_x} = \overline{P}(A_{\overset{\ \ 1}{x:\overline{n|}}})\ \bar{s}_{x:\overline{h|}}$$

Seguro mixto simple

La prima anual constante y continua es

$$\overline{P}(\overline{A}_{x:\overline{n|}}) = \frac{\bar{A}_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} + A_{\overset{\ \ 1}{x:\overline{n|}}}}{\bar{a}_{x:\overline{n|}}} = \frac{\overline{A}_{x:\overline{n|}}}{\bar{a}_{x:\overline{n|}}}$$

La reserva matemática por el método prospectivo h años después de suscrita la póliza ($h < n$) es

$$_h\overline{V}(\bar{A}_{x:\overline{n|}}) = \bar{A}_{x+h:\overline{n-h|}} - \overline{P}(\bar{A}_{x:\overline{n|}})\ \bar{a}_{x+h:\overline{n-h|}}$$

siendo

$$_n\overline{V}_{x:\overline{n|}} = 1$$

En el ejercicio 1 haremos un estudio más detenido de la reserva matemática de esta modalidad de seguro obteniendo interesantes expresiones tanto para la reserva matemática como para la varianza de $_hL$.

Renta diferida

El principio de equivalencia actuarial conduce a

$$\overline{P}(\ _{n/}\overline{a}_x)\ \ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \ _{n/}\overline{a}_x$$

de donde la prima anual constante es

$$\overline{P}(\ _{n/}\overline{a}_x) = \frac{_{n/}\overline{a}_x}{\overline{a}_{x:\overline{n|}}}$$

La reserva matemática por el método prospectivo h años después de suscrita la póliza para $h < n$ es

$$_h\overline{V}(\ _{n/}\overline{a}_x) = \ _{n-h/}\overline{a}_{x+h} - P(\ _{n/}\overline{a}_x)\ \overline{a}_{x+h:\overline{n-h|}}$$

y para $h \geq n$ (ya ha finalizado la obligación del pago de primas),

$$_h\overline{V}(\ _{n/}\overline{a}_x) = \overline{a}_{x+h}$$

8.4.4 Ecuación diferencial dinámica de las reservas. Ecuación de Thiele

Retomando la operación general de seguro de 8.4.1, supongamos que una cabeza de edad x contrata una operación de seguro de vida mediante la cual en el momento del fallecimiento sus beneficiarios recibirán un capital cuya cuantía viene determinada por una función $C(t)$. A cambio el contratante paga la correspondiente prima de forma continua y hasta el momento del fallecimiento del asegurado a una tasa anual determinada por la función $\overline{P}(t)$.

Supondremos que $\overline{P}(t)$ obedece al principio de equivalencia, esto es,

$$E(L) = \int_0^\infty (C(t)\; e^{-\delta t} \; - \int_0^t \bar{P}\;(s)\; e^{-\delta s}\, ds)\; g_x(t)\; dt = 0$$

y también

$$\int_0^\infty \bar{P}\;(t)\; {}_tE_x\; dt = \int_0^\infty C(t)\; e^{-\delta t}\; g_x(t)\; dt$$

h años después de suscrita la póliza la diferencia entre el valor actual de las obligaciones futuras del asegurador y los pagos futuros por primas es

$${}_hL = C(h + T_{x+h})\; e^{-\delta T_{x+h}} - \int_0^{T_{x+h}} \overline{P}(h+s)\; e^{-\delta s}\; ds \quad T_{x+h} \geq 0$$

La reserva matemática h años después de suscrita la póliza es,por tanto

$${}_h\overline{V}_x = E(\,{}_hL) = \int_0^\infty C(h+t)\; e^{-\delta t}\; g_{x+h}(t)\; dt - \int_0^\infty (\int_0^t \overline{P}(h+s)\; e^{-\delta s}\; ds)\; g_{x+h}(t)\; dt$$

$$= \int_0^\infty (C(h+t)\; \mu_{x+h+t} \; - \overline{P}(h+t))\; e^{-\delta t}\; {}_tp_{x+h}\; dt$$

Para derivar la ecuación diferencial de las reservas, hagamos $h + t = r$. Ciertamente

$${}_h\overline{V}_x = \int_h^\infty (C(r)\; \mu_{x+r} \; - \overline{P}(r))\; e^{-\delta(r-h)}\; {}_{r-h}p_{x+h}\; dr$$

Derivemos esta expresión respecto a h.

$$\frac{d\; {}_h\overline{V}_x}{d\; h} = \int_h^\infty \frac{d}{dh}((C(r)\; \mu_{x+r} - \overline{P}(r))\; e^{-\delta(r-h)}\; {}_{r-h}p_{x+h})\; dr - (C(h)\; \mu_{x+h} - \overline{P}(h))$$

Ahora bien

$$\frac{d}{dh}((C(r)\; \mu_{x+r} - \overline{P}(r))\; e^{-\delta(r-h)}\; {}_{r-h}p_{x+h}) =$$

$$= (C(r)\ \mu_{x+r} - \overline{P}(r))\ (\delta\ e^{-\delta(r-h)}\ {}_{r-h}p_{x+h} + e^{-\delta(r-h)}\ {}_{r-h}p_{x+h}\ \mu_{x+h}) =$$

$$= (C(r)\ \mu_{x+r}\ - \overline{P}(r))\ e^{-\delta(r-h)}\ {}_{r-h}p_{x+h}\ (\delta + \mu_{x+h})$$

y

$$\int_h^\infty (C(r)\ \mu_{x+r} - \overline{P}(r))\ e^{-\delta(r-h)}\ {}_{r-h}p_{x+h}\ (\delta + \mu_{x+h})\ dr =$$

$$= (\delta + \mu_{x+h}) \int_h^\infty (C(r)\ \mu_{x+r} - \overline{P}(r))\ e^{-\delta(r-h)}\ {}_{r-h}p_{x+h}\ dr =$$

$$= (\delta + \mu_{x+h})\ {}_h\overline{V}_x$$

Por tanto,

$$\frac{d\ {}_h\overline{V}_x}{dh} = (\delta + \mu_{x+h})\ {}_h\overline{V}_x - (C(h)\ \mu_{x+h} - \overline{P}(h)) \tag{8.32}$$

Esta es la **Ecuación Diferencial de Thiele.**

Notemos que $C(h)\ \mu_{x+h}$ nos proporciona la densidad de la prima natural continua a la edad $x + h$, $\overline{P}^n(h)$.

8.5 Descomposición de la prima. Prima de riesgo y prima de ahorro

Nos referiremos ahora a un resultado teórico importante que se deriva elementalmente de las relaciones recursivas obtenidas en los apartados 8.2.4 y 8.4.4. Estas nos permitirán expresar la prima de cada periodo como suma de las denominadas **prima de riesgo** y **prima de ahorro**. Distinguiremos los casos discreto y continuo.

8.5.1 Caso discreto

Partiendo de la expresión recurrente (8.13), es claro que

$${}_hV_x = v(C_{h+1}\ q_{x+h} + (1 -\ q_{x+h})\ {}_{h+1}V_x) - P_h =$$

$$= v({}_{h+1}V_x + (C_{h+1}\ -_{h+1}V_x)\ q_{x+h}) - P_h$$

y por tanto

$$P_h = v \; {}_{h+1}V_x - \; {}_hV_x + v \; (C_{h+1} - \; {}_{h+1}V_x) \; q_{x+h} \tag{8.33}$$

pudiendo escribirse

$$P_h = P_h^a + P_h^r$$

donde

$$P_h^a = v \; {}_{h+1}V_x - \; {}_hV_x \tag{8.34}$$

es la denominada **prima de ahorro** y,

$$P_h^r = v \; (C_{h+1} - \; {}_{h+1}V_x) \; q_{x+h} \tag{8.35}$$

la **prima de riesgo**. Siendo la diferencia

$$C_{h+1} - \; {}_{h+1}V_x$$

el **capital en riesgo.**

Probemos a continuación que la reserva matemática de un periodo se puede obtener como la suma de las primas de ahorro capitalizadas hasta ese periodo, esto es,

$${}_kV_x = \sum_{h=0}^{k-1} P_h^a \; (1+i)^{k-h}$$

En efecto

$$\sum_{h=0}^{k-1} P_h^a \; (1+i)^{k-h} = \sum_{h=0}^{k-1} (v \; {}_{h+1}V_x - \; {}_hV_x) \; (1+i)^{k-h} = \; {}_1V_x \; (1+i)^{k-1} +$$

$$+ ({}_2V_x \; (1+i)^{k-2} - \; {}_1V_x \; (1+i)^{k-1}) + ... + ({}_kV_x \; - {}_{k-1} \, V_x \; (1+i)^1) = \; {}_kV_x$$

Ciertamente

$$(\; {}_hV_x + P_h^a) \; (1+i) = \; {}_{h+1}V_x$$

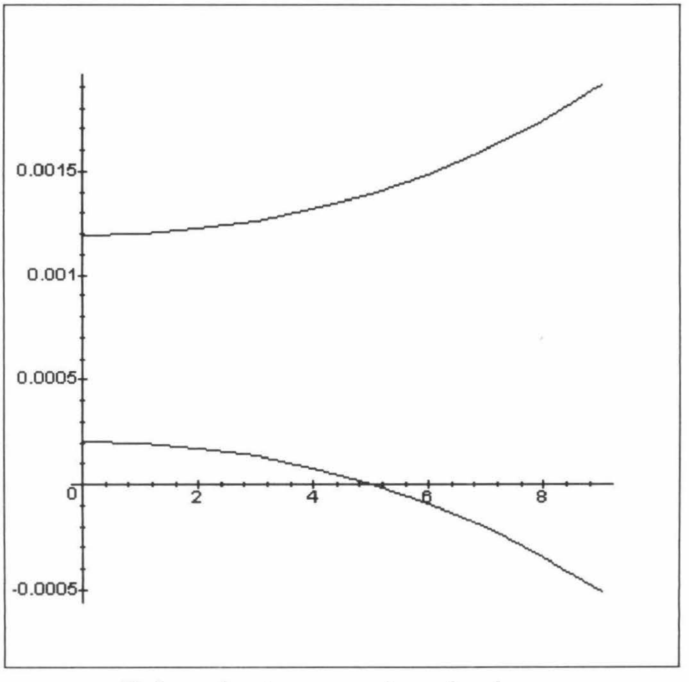
Volviendo al ejemplo 11 del seguro temporal, empleando las expresiones (8.34) y (8.35) es posible obtener fácilmente la descomposición de la prima anual en las primas de riesgo y ahorro.

Año	Prima de ahorro	Prima de riesgo
0	0.00020611814055	0.00119030591664
1	0.00019328461671	0.00120313944047
2	0.00017149170461	0.00122493235257
3	0.00013373732371	0.00126268673347
4	0.00007857712535	0.00131784893183
5	0.00000455504373	0.00139186901345
6	-0.00008980273319	0.00148622679038
7	-0.00020599541723	0.00160241947442
8	-0.00034555714799	0.00174198120518
9	-0.00051006867865	0.00190649273584

Recordemos que

$$P_{\overset{1}{30}:\overline{10|}} = 0.00139642405719$$

El siguiente gráfico analiza la evolución de estas primas



Prima de riesgo y prima de ahorro

8.5.2 Caso continuo

Partiendo de la ecuación diferencial de Thiele

$$\frac{d\ {}_h\bar{V}_x}{dh} = (\delta + \mu_{x+h})\ {}_h\bar{V}_x - (C(h)\ \mu_{x+h} - \overline{P}(h))$$

puede escribirse

$$\overline{P}(h) = (C(h) - {}_h\bar{V}_x)\ \mu_{x+h} + (\frac{d\ {}_h\bar{V}_x}{dh} - \delta\ {}_h\bar{V}_x)$$

lo que permite expresar, como en el caso discreto, la tasa de prima h años después de suscrita la póliza como suma de sus componentes de ahorro

$$\overline{P}^a(h) = (\frac{d\ {}_h\bar{V}_x}{dh} - \delta\ {}_h\overline{V}_x) \tag{8.36}$$

y de riesgo

$$\overline{P}^r(h) = (C(h) - {}_h\overline{V}_x)\ \mu_{x+h} \tag{8.37}$$

Y también análogamente al caso discreto, la capitalización de las primas de ahorro proporciona la reserva matemática, esto es

$${}_k\overline{V}_x = \int_0^k \overline{P}^a(h)\ e^{\delta(k-h)}\ dh$$

Esta igualdad es fácil de probar:

$$\int_0^k \overline{P}^a(h)\ e^{\delta(k-h)}\ dh = \int_0^k (\frac{d\ {}_h\overline{V}_x}{dh} - \delta\ {}_h\bar{V}_x)\ e^{\delta(k-h)}\ dh =$$

$$= e^{\delta\ k}((\int_0^k \frac{d\ {}_h\overline{V}_x}{dh}\ e^{-\delta\ h}\ dh)^{¶} - \int_0^k \delta\ {}_h\overline{V}_x\ e^{-\delta\ h}\ dh) =$$

$$= e^{\delta\ k}(\ {}_h\overline{V}_x\ e^{-\delta\ h}]_0^k - \int_0^k {}_h\overline{V}_x(-\delta\ e^{-\delta\ h})\ dh - \int_0^k \delta\ {}_h\overline{V}_x\ e^{-\delta\ h}\ dh) = {}_k\overline{V}_x$$

¶ Integrando por partes. Tomando

$$e^{-\delta\ h} = u \quad y \quad \frac{d\ {}_h\overline{V}_x}{dh}\ dh = dv$$

se tiene

$$-\delta\ e^{-\delta\ h} dh = du \quad y \quad {}_h\bar{V}_x = v$$

8.6 Ejercicios

1.-Estúdiese la variable $_hL$ para un seguro mixto simple bajo la hipótesis de pago del capital asegurado al final del año de fallecimiento.

Solución:

Ciertamente

$$_hL = \begin{cases} v^{K_{x+h}+1} - P_{x:\overline{n}|}\, \ddot{a}_{\overline{K_{x+h}+1}|} & K_{x+h} = 0,1,2,.n-h-1 \\ v^{n-h} - P_{x:\overline{n}|}\, \ddot{a}_{\overline{n-h}|} & K_{x+h} = n-h, n-h+1, ... \end{cases}$$

siendo

$$Z = \begin{cases} v^{K_{x+h}+1} & K_{x+h} = 0,1,2,.n-h-1 \\ v^{n-h} & K_{x+h} = n-h, n-h+1, ... \end{cases}$$

es claro que

$$_hL = Z - P_{x:\overline{n}|} \frac{1-Z}{d}$$

Ya que

$$E(Z) = A_{x+h:\overline{n-h}|}$$

podemos obtener la siguiente expresión para la reserva matemática

$$_hV_{x:\overline{n}|} = E(\,_hL) = A_{x+h:\overline{n-h}|} - P_{x:\overline{n}|} \frac{1 - A_{x+h:\overline{n-h}|}}{d} =$$

$$= A_{x+h:\overline{n-h}|}\,(1 + \frac{P_{x:\overline{n}|}}{d}) - \frac{P_{x:\overline{n}|}}{d}$$

Asimismo la varianza de $_hL$ es, elementalmente

$$Var(\,_hL) = Var(Z)\,(1 + \frac{P_{x:\overline{n}|}}{d})^2 = ({}^2A_{x+h:\overline{n-h}|} - (A_{x+h:\overline{n-h}|})^2)\,(1 + \frac{P_{x:\overline{n}|}}{d})^2$$

Cuando las primas obedecen al principio de equivalencia, procediendo como en la obtención de las relaciones (7.30) tenemos

$$Var(\,_hL) = \frac{{}^2A_{x+h:\overline{n-h}|} - (A_{x+h:\overline{n-h}|})^2}{(d\;\ddot{a}_{x:\overline{n}|})^2} = \frac{{}^2A_{x+h:\overline{n-h}|} - (A_{x+h:\overline{n-h}|})^2}{(1 - A_{x:\overline{n}|})^2}$$

Invitamos al lector a que desarrolle expresiones análogas para el caso de pago del capital asegurado en el momento del fallecimiento

Observación 8 *Estas fórmulas simples para la varianza de $_hL$ (y de L) sólo se dan para los seguros vida entera y mixto simple. En general, el Teorema de Hattendorf (véase Gerber (1995) apartado 6.7) nos proporciona una expresión sencilla para el cálculo de la citadas varianzas:*

$$Var(L) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{2k+2} \left(c_{k+1} - {}_{k+1}V\right)^2 {}_{k+1}p_x \; q_{x+k}$$

y

$$Var({}_hL) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{2k+2} \left(c_{h+k+1} - {}_{h+k+1}V\right)^2 {}_{k+1}p_{x+h} \; q_{x+h+k}$$

2.- Consideremos una cabeza de edad x que contrata una operación de seguro mediante la cual si fallece entre las edades x y $x+n$, recibirán sus beneficiarios una unidad monetaria cuando hubiese alcanzado la edad $x+n$. Las primas son anuales y constantes y se pagan mientras viva el asegurado pero como máximo durante n años. Calcúlese la reserva matemática h años después de suscrita la poliza.

Solución:

Nos encontramos ante una operación de seguro que no se extingue con la muerte del asegurado. El cálculo de la reserva matemática se realiza como es habitual calculando la diferencia entre el valor esperado de las obligaciones futuras del asegurador y el de los futuros pagos por primas.

Calculemos en primer lugar la prima anual y constante. El principio de equivalencia actuarial conduce a

$$P_{x:\overline{n}|} \; \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = v^n \; {}_nq_x$$

de donde

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{v^n \; {}_nq_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

Para el cálculo de la reserva matemática h años después de suscrita la póliza, ya que ésta no se extingue con el fallecimiento del asegurado, hemos de distinguir dos casos:

a) Si el asegurado está con vida a la edad $x+h$

$${}_hV_{x:\overline{n}|} = v^{n-h} \; {}_{n-h}q_x - P_{x:\overline{n}|} \; \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$$

b) Si el asegurado ha fallecido

$${}_hV_{x:\overline{n}|} = v^{n-h}$$

Notemos que ya no hay que pagar primas pero el asegurador tendrá que pagar el capital unitario dentro de $n-h$ años.

3.- En las mismas condiciones del ejercicio anterior consideremos ahora un seguro a término fijo que consiste en que el asegurado de edad x recibirá un capital unitario cuando hubiese cumplido la edad $x+n$, esté con vida o haya fallecido a dicha edad.

Solución:

Ciertamente la aleatoriedad de esta operación de seguro proviene de que las primas se pagan mientras viva el asegurado. Asimismo la póliza no se extingue al fallecimiento del asegurado.

Prima anual y constante. De

$$P_{x:\overline{n}|}\, \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = v^n$$

tenemos

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{v^n}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

Reserva matemática h años después de suscrita la póliza.

a) Si el asegurado está con vida a la edad $x+h$

$${}_hV_{x:\overline{n}|} = v^{n-h} - P_{x:\overline{n}|}\, \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$$

b) Si el asegurado ha fallecido

$${}_hV_{x:\overline{n}|} = v^{n-h}$$

4.-Establezca la expresión prospectiva de la reserva matemática h años después de suscrita la póliza para una operación de seguro vida entera en la que el capital asegurado se paga en el momento del fallecimiento mientras que las primas son discretas, constantes y vitalicias. Encuentre la relación entre esta reserva "semicontinua" y la reserva discreta aceptando la hipótesis de distribución uniforme de la mortalidad.

Solución:

Ciertamente la diferencia de las esperanzas matemáticas de las obligaciones del asegurador y asegurado en el momento dado es

$${}_hV(\bar{A}_x) = \bar{A}_{x+h} - P(\bar{A}_x)\, \ddot{a}_{x+h}$$

donde como sabemos

$$P(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_x}$$

La reserva discreta es

$${}_hV_x = A_{x+h} - P_x\ \ddot{a}_{x+h}$$

Sabemos asimismo que bajo la hipótesis de distribución uniforme de mortalidad,

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta}\ A_x$$

y

$$P(\bar{A}_x) = \frac{i}{\delta}\ P_x$$

Por tanto, elementalmente.

$${}_hV(\bar{A}_x) = \frac{i}{\delta}\ {}_hV_x$$

5.-Resuelva el ejercicio anterior para un seguro mixto simple.
Solución:
Ciertamente la reserva semicontinua es

$${}_hV(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \bar{A}_{x+h:\overline{n-h}|} - P(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\ \ddot{a}_{x+h:\overline{n-h}|}$$

y la reserva discreta

$${}_hV_{x:\overline{n}|} = A_{x+h:\overline{n-h}|} - P_{x:\overline{n}|}\ \ddot{a}_{x+h:\overline{n-h}|}$$

Sabemos que bajo la hipótesis de distribución uniforme de la mortalidad

$$\bar{A}_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = \frac{i}{\delta}\ A_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} + A_{x:\overset{\ 1}{\overline{n}|}}$$

y

$$P(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{i}{\delta}\ P_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} + P_{x:\overset{\ 1}{\overline{n}|}}$$

Por tanto elementalmente

$${}_hV(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{i}{\delta}\ {}_hV_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} + {}_hV_{x:\overset{\ 1}{\overline{n}|}}$$

6.- La reserva matemática de un seguro vida entera con pago de primas fraccionarias h años después de suscrita la póliza es

$$_hV_x^{(m)} = A_{x+h} - P_x^{(m)}\ \ddot{a}_{x+h}^{(m)}$$

Compárese con la reserva en el caso de primas anuales

$$_hV_x = A_{x+h} - P_x\ \ddot{a}_{x+h}$$

aceptando la hipótesis de distribución uniforme de la mortalidad.

Solución:

Sabemos que

$$P_x\ \ddot{a}_x = P_x^{(m)}\ \ddot{a}_x^{(m)} = A_x$$

por lo que

$$P_x = \frac{P_x^{(m)}\ \ddot{a}_x^{(m)}}{\ddot{a}_x}$$

y también que bajo la hipótesis de distribución uniforme de la mortalidad, (véase 6.2.1)

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)\ \ddot{a}_x - \beta(m)$$

donde

$$\alpha(m) = \frac{i\ d}{j(m)\ d(m)} \quad y \quad \beta(m) = \frac{i - j(m)}{j(m)\ d(m)}$$

Por tanto

$$_hV_x^{(m)} = {}_hV_x + P_x\ \ddot{a}_{x+h} - P_x^{(m)}\ \ddot{a}_{x+h}^{(m)} =$$

$$= {}_hV_x + \frac{P_x^{(m)}\ (\alpha(m)\ \ddot{a}_x - \beta(m))}{\ddot{a}_x}\ \ddot{a}_{x+h} - P_x^{(m)}\ (\alpha(m)\ \ddot{a}_{x+n} - \beta(m)) =$$

$$= {}_hV_x + P_x^{(m)}\ \beta(m)\ (1 - \frac{\ddot{a}_{x+h}}{\ddot{a}_x}) = {}_hV_x + P_x^{(m)}\ \beta(m)\ {}_hV_x$$

Al ser

$$P_x^{(m)}\ \beta(m)\ {}_hV_x > 0$$

tenemos

$$_hV_x^{(m)} > {}_hV_x$$

7.- Consideremos un seguro para una cabeza de edad x con las siguientes coberturas: si la citada cabeza alcanza con vida la edad $x + n$ recibirá un capital unitario y si fallece recibirán sus beneficiarios la

reserva matemática al final del año de fallecimiento. Las primas son anuales y constantes.

Calcúlese la prima anual y la reserva matemática t años después de suscrita la poliza.

Solución:

En este y en el siguiente ejercicio se muestra la utilidad de las fórmulas recurrentes para el estudio de algunos tipos de seguro.

En este caso la expresión (8.33), al ser $P_h = P$ y $C_{h+1} = {}_{h+1}V_x$, queda

$$P = v\ {}_{h+1}V_x - {}_hV_x$$

La prima pura coincide con la prima de ahorro.

Esta última ecuación, escrita en la forma

$${}_{h+1}V_x - (1+i)\ {}_hV_x = (1+i)\ P$$

es una ecuación en diferencias finitas lineal de primer orden con coeficientes constantes

La solución particular que obedece a la condición inicial ${}_0V_x = 0$, es[‖]

$${}_hV_x = P\ \frac{1-(1+i)^h}{-i} = P\ \ddot{s}_{\overline{h|}}$$

Ahora bien ciertamente en este caso ${}_nV_x = 1$, por tanto

$$1 = P\ \ddot{s}_{\overline{n|}}$$

esto es,. la prima anual constante es

$$P = \frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n|}}}$$

Notemos que esta es una simple operación de constitución de un capital unitario mediante n imposiciones anuales constantes. En caso de fallecimiento

[‖]En general, la solución particular de la ecuación en diferencias finitas

$$y_{t+1} - a\ y_t = b$$

para la condición inicial $y_0 = \gamma$ es

$$y_t = \gamma\ a^t + b\frac{1-a^t}{1-a}$$

logicamente se recupera el capital constituido hasta el final del año en que ocurre (reserva matemática).

8.-Resuelva el ejercicio anterior suponiendo que el capital en caso de fallecimiento es la unidad más la reserva matemática constituida.

Solución:

Ahora $P_h = P$ y $C_{h+1} = 1 + {}_{h+1}V_x$, la expresión (8.33) queda

$$P = v \; {}_{h+1}V_x - {}_hV_x + v \; q_{x+h}$$

Notemos que ahora la prima de riesgo coincide con la prima natural.

Tenemos ahora una ecuación en diferencias finitas lineal de primer orden con coeficientes variables

$${}_{h+1}V_x - (1+i) \; {}_hV_x = (1+i) \; P - q_{x+h}$$

La solución particular que obedece a la condición inicial ${}_0V_x = 0$ es**

$${}_hV_x = P \; \ddot{s}_{\overline{h}|} - \sum_{k=0}^{h-1} v^{k-h+1} \; q_{x+k}$$

Ahora bien, ciertamente en este caso ${}_nV_x = 1$, por tanto

$$1 = P \; \ddot{s}_{\overline{n}|} - \sum_{k=0}^{n-1} v^{k-n+1} \; q_{x+k}$$

esto es, la prima anual constante es

$$P = \frac{1 + \sum_{k=0}^{n-1} v^{k-n+1} \; q_{x+k}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}$$

**En general la solución particular de la ecuación en diferencias finitas

$$y_{t+1} - a_t \; y_t = b_t$$

para la condición inicial $y_0 = \gamma$ es

$$y_t = (\gamma + \sum_{k=0}^{t-1} \frac{b_t}{\prod_{j=0}^{k} a_j}) \prod_{k=0}^{t-1} a_k$$

9- Aceptando el modelo determinista, y siendo

x	l_x	dx
30	982676	1240
31	981436	1252
32	980184	1273
33	978911	1312
34	977599	1367
35	976232	1442
36	974790	1537
37	973253	1655
38	971598	1795
39	969803	1960
40	967843	2151

Estudie la evolución de las reservas de un seguro mixto simple de 10 años de temporalidad con capital para el caso de muerte y supervivencia C=1000 para un colectivo de 982676 cabezas de 30 años de edad con pago de primas anuales y constantes. El tipo de interés de valoración es i=0.03.

Solución.

Puede el lector comprobar que la prima anual constante es

$$P_{30:\overline{10|}} = \frac{1000\ A_{\overset{1}{30}:\overline{10|}} + 1000\ A_{30:\overset{\ 1}{\overline{10|}}}}{\ddot{a}_{30:\overline{10|}}} = 85.35204$$

Observemos la siguiente tabla

h	A	B	C	D	E	F
1	83873404.39	83873404.39	86389606.52	1240000	85149606.52	86.76
2	83767567.86	168917174.4	173984689.6	1252000	172732689.6	176.22
3	83660707.10	256393396.7	264085198.6	1273000	262812198.6	268.47
4	83552053.95	346364252.6	356755180.2	1312000	355443180.2	363.58
5	83440072.07	438883252.3	452049749.9	1367000	450682749.9	461.65
6	83323395.83	534006145.7	550026330.1	1442000	548584330.1	562.77
7	83200318.18	631784648.3	650738187.7	1537000	649201187.7	667.04
8	83069132.09	732270319.8	754238429.4	1655000	752583429.4	774.58
9	82927874.46	835511303.9	860576643.0	1795000	858781643.0	885.52
10	82774667.54	941556310.5	969802999.8	1960000	967842999.8	1000

En esta tabla

- $A = P_{30:\overline{10|}}\ l_{30+h-1}$ representa el global de primas ingresadas al principio del año h.
- $B = A + R_{h-1}$ donde R_{h-1} representa la reserva para el conjunto de los asegurados al principio del año h.
- $C = B\ (1 + 0.03)$.
- $D = 1000\ d_{30+h-1}$esto es los pagos por fallecimientos ocurridos en el año correspondiente, realizados al final del año h.
- $E = C - D = R_h$.
- $F = \frac{R_h}{l_{x+h}} = {}_hV_x$, que ha de coincidir con la reserva por cada uno de los supervivientes.

10.- Siendo

$$\mu_x = \mu$$

y δ constante. Calcule:

a) La prima anual continua constante para un seguro vida entera de capital asegurado la unidad con pago en el instante del fallecimiento para un asegurado de edad x.

b) Plantee y resuelva la ecuación diferencial de Thiele.

Solución:

a) Por el ejercicio 6 del capitulo 4 sabemos que

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty e^{-\delta\ t} e^{-\mu\ t}\ \mu\ dt = \frac{\mu}{\delta + \mu}$$

por tanto

$$\bar{P}_x = \frac{\delta\ \bar{A}_x}{1 - \bar{A}_x} = \frac{\frac{\delta\ \mu}{\delta+\mu}}{1 - \frac{\mu}{\delta+\mu}} = \mu$$

Notemos que la prima no depende de la edad del asegurado.

b) La ecuación diferencial de Thiele es en este caso

$$\frac{d\ {}_h\overline{V}_x}{dh} = (\delta + \mu)\ {}_h\overline{V}_x - (\mu - \mu)$$

esto es

$$\frac{d\ {}_h\overline{V}_x}{dh} = (\delta + \mu)\ {}_h\overline{V}_x$$

Su solución general es elementalmente

$${}_h\overline{V}_x = C\ e^{(\delta+\mu)\ h}$$

La condición inicial es

$${}_0\overline{V}_x = 0$$

esto es, las reservas iniciales son cero (la prima se calcula de acuerdo al principio de equivalencia actuarial).

Por tanto,

$$0 = C\ e^{(\delta+\mu)\ 0}$$

de donde $C = 0$.

La solución particular que nos proporciona la evolución de las reservas matemáticas es

$${}_h\overline{V}_x = 0$$

Este resultado era de esperar ya que la prima anual constante ($\bar{P}_x = \mu$) coincide con la prima natural.

8.7 Apéndice.- Aplicaciones de las expresiones recurrentes

Es importante señalar que las expresiones recursivas estudiadas en el apartado 8.2.4 así como las correspondientes ecuaciones diferenciales del caso continuo que se trataron en el apartado 8.4.4 poseen una aplicabilidad mayor que el simple cálculo de las reservas matematicas de una operación de seguro. Es conocido que una ecuación diferencial o en diferencias finitas permite, a partir de la caracterización de la variación de los estados de un fenómeno en un pequeño intervalo de tiempo, el conocimiento de su evolución en toda su duración. Las soluciones de las citadas ecuaciones diferenciales y en diferencias nos permiten conocer la evolución de la operación de seguro a que se refieren, siendo esta, en algunas ocasiones, la forma más sencilla de estudiar algunas operaciones de seguros tanto para el cálculo de las primas como de las reservas matemáticas (véanse por ejemplo los ejercicios 6 y 7 de este capítulo o, para una ampliación de estas ideas la consulta del capitulo 5 de Nieto y Vegas (1995)).

Asimismo, las expresiones recurrentes son útiles en otras aplicaciones como las que brevemente comentamos a continuación:

1.- El reaseguro de vida.

Sabido es que mediante el reaseguro el asegurador directo traspasa una parte de los riesgos asumidos a otra empresa, la reaseguradora, a cambio de una prima de reaseguro.

La características de los contratos de reaseguro, al depender de la voluntad de las partes implicadas, son muy variadas, pero es habitual que el reaseguro en vida se realice en función del capital en riesgo.

Supongamos que en un año el asegurador directo traslada todo el riesgo a una reaseguradora. Sabemos que la prima que recibe el asegurador directo se descompone en prima de riesgo y prima de ahorro, esto es,

$$P_h = P_h^a + P_h^r$$

donde

$$P_h^a = v \ {}_{h+1}V - \ {}_hV \tag{8.38}$$

$$P_h^r = v \ (C_{h+1} - \ {}_{h+1}V_x) \ q_{x+h} \tag{8.39}$$

Siendo el capital en riesgo,

$$C_{h+1} - \ {}_{h+1}V_x$$

se entregará a la reaseguradora. la cantidad

$$P_h^r = v \ (c_{h+1} - \ {}_{h+1}V_x) \ q_{x+h}$$

A cambio, en caso de fallecimiento del asegurado la reaseguradora pagará al asegurador directo, al final del año, la indemnización

$$C_{h+1} - \ {}_{h+1}V_x$$

Por otra parte la empresa se queda con la prima que ahorro, que junto a la reserva matemática ${}_hV_x$ y los intereses permite obtener

$$(\ {}_hV_x + P_h^a)(1+i) = \ {}_{h+1}V_x$$

Si el asegurado sigue con vida al final del año considerado, la empresa tiene constituída la reserva necesaria ${}_{h+1}V_x$.

Si el asegurado fallece, esta reserva más lo que se recibe de la reaseguradora permite pagar el capital asegurado

$${}_{h+1}V + (C_{h+1} - \ {}_{h+1}V) = C_{h+1}$$

Evidentemente, lo normal es trasladar sólo una parte del riesgo asumido; en este caso, la prima de riesgo y la parte del capital en riesgo que, en su caso, tendrá que abonar la reaseguradora se repartirán de acuerdo a las estipulaciones del contrato.

2.- Seguros flexibles.

Las expresiones recursivas como

$$({}_hV_x + P_h)(1+i) = {}_{h+1}V_x \; p_{x+h} + C_{h+1} \; q_{x+h}$$

nos proporcionan las relaciones entre primas, capitales asegurados y reservas matemáticas que mantienen la equivalencia de la operación en un periodo determinado. Por ello, este tipo de expresiones puede ser de gran utilidad en aquellos seguros en los que se permite al asegurado cierta flexibilidad m0dificar algunas de sus características, como las primas a ingresar, el ahorro generado y los capitales asegurados (por ejemplo los "Universal Life" de gran implantación en el mercado anglosajón) y en los que las componentes de ahorro y riesgo del seguro poseen cierta autonomía.

Ciertamente, al comienzo de un periodo $[h, h+1]$ se encuentra constituída una reserva ${}_hV_x$.(que puede considerarse como el ahorro del asegurado); si nos fijamos en la relación recurrente anterior, si el asegurado decide la prima que entrega P_h y el capital a recibir en caso de fallecimiento C_{h+1}, dicha expresión recurrente nos proporcionará la reserva ${}_{h+1}V_x$ disponible para el periodo siguiente.

3.- Beneficio por rentabilidad.

Consideremos un seguro vida entera para una cabeza de edad x, con un capital asegurado constante y de cuantía C que se paga al final del año del fallecimiento y primas vitalicias, anuales y constantes cuya cuantía, para unas determinadas bases técnicas (tabla de mortalidad y tipo de interés técnico i), es

$$P_x = C \; \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$$

Supuesto que el asegurado se encuentra con vida h años después de suscrita la póliza, la cuantía de la reserva matemática será ${}_hV_x$

P_x ....${}_hV_x + P_x$ .....

x $\quad x+1$ ....$x+h$ $\quad x+h+1$......

Supongamos que durante el año $[x+h, x+h+1]$ la rentabilidad real obtenida es

$$i_r > i$$

Si la rentabilidad hubiese coincidido con el tipo de interés técnico i, sabemos que

$$({}_hV_x + P_x)(1+i) = {}_{h+1}V_x \; p_{x+h} + C \; q_{x+h}$$

pero al ser i_r, podemos escribir (notemos que $(1+i_r) = (1+i) + (i_r - i)$),

$$({}_hV_x + P_x)(1+i_r) = ({}_hV_x + P_x) \; (1+i) + ({}_hV_x + P_x) \; (i_r - i) =$$

$$= {}_{h+1}V_x \; p_{x+h} + C \; q_{x+h} + (v \; {}_{h+1}V_x \; p_{x+h} + v \; C \; q_{x+h}) \;\; (i_r - i) =$$

$$= (1 + v \; (i_r - i)) \; {}_{h+1}V_x \; p_{x+h} + (1 + v \; (i_r - i)) \; C \; q_{x+h}$$

por lo que el citado incremento de rentabilidad puede traducirse en un incremento de $v \; (i_r - i)$ veces tanto del capital asegurado del citado año como de la reserva matemática a constituir al final del mismo

Un incremento en la misma proporción de las primas sucesivas permitirá que el capital asegurado de los sucesivos años sea $(1 + v \; (i_r - i)) \; C$. En efecto, sabemos que para la operación original se verifica

$${}_{h+1}V_x + P_x \; \ddot{a}_{x+h+1} = C \; A_{x+h+1}$$

por tanto

$$(1 + v \; (i_r - i)) \; {}_{h+1}V_x + (1 + v \; (i_r - i)) \; P_x \; \ddot{a}_{x+h+1} = (1 + v \; (i_r - i)) \; C \; A_{x+h+1}$$

Notemos que $\ddot{a}_{x+h+1}$ y A_{x+h+1} están calculados con el tipo i.